INSTITUTO DE ECONOMÍA

TESIS de MAGÍSTER

2007

Agrupar o Mezclar: Decisiones de la Escuela en Tiempos de Escasez

Marcela Huepe.

www.economia.puc.cl

TESIS DE GRADO
MAGISTER EN ECONOMIA

Julio 2007

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

Agrupar o mezclar: decisiones de la escuela en tiempos de escasez

Marcela A. Huepe M.

Comisión
Claudio Sapelli
Carlos Rodríguez

Julio 2007

Agrupar o mezclar: decisiones de la escuela en tiempos de escasez

Marcela A. Huepe M.
Julio, 2007

Resumen ejecutivo

Este trabajo busca predecir las decisiones de las escuelas privadas respecto del tamaño de la clase y la composición de los alumnos, extendiendo el modelo propuesto por Edgard P. Lazear que clasifica a los estudiantes por tipo según la cantidad de externalidad negativa que producen en un ambiente de instrucción colectiva. La extensión al modelo incorpora una tecnología que reeduca a los alumnos y disminuye el nivel de dicha externalidad en la sala de clases. Si bien el resultado que domina en el modelo original es que segregar es más eficiente que mezclar, en presencia de tecnología general asociada a profesores buenos pero escasos, el resultado es ambiguo, ya que bajo ciertas condiciones es óptimo mezclar. Esto va en línea con alguna evidencia reciente para Chile que indica que las escuelas privadas mezclan más a sus alumnos que las públicas. Con tecnología especializada, en cambio, y en un contexto de optimización sin escasez de insumos, se obtienen resultados similares a los del modelo original: agrupar por tipo es óptimo para el producto educacional agregado. Además, a la luz de los modelos base y extendido, se analizan intervenciones de política pública frecuentemente propuestas: se cuantifican las pérdidas que se producen en el producto agregado al imponer restricciones en la composición de alumnos sin aplicar tecnología; además, se concluye que es más costoso lograr objetivos educacionales si sólo se disminuye el número de alumnos por clase que si se optimiza tanto el ratio profesor-alumno como el nivel de tecnología especializada y que, aunque el costo es menor al aplicar políticas en un contexto de clases mixtas, el beneficio total es siempre mayor cuando éstas se aplican en un sistema segregado.

Índice

1. Introducción

En este trabajo se pretende desarrollar un modelo de función de producción educativa, dentro de un contexto de optimización de beneficios privados, que permita predecir algunas decisiones eficientes que toman las escuelas y los sistemas educacionales. Específicamente la pregunta es:

¿Cuáles son el tamaño de la clase y la composición de alumnos óptimos, los que –por lo tanto– debieran ser los escogidos por una escuela que pretende maximizar el producto educativo?

Para responder esta pregunta se tomará como modelo base la función educativa propuesta por Edward P. Lazear (2001), y la función de beneficios de la escuela que le corresponde. Se analizará en detalle la función de producción y se propondrá una extensión al modelo: una tecnología que mejora la realización del tipo de los alumnos en la clase. Con estos elementos, adicionalmente se evaluarán algunas intervenciones de política que buscan resultados equitativos en la distribución del producto educacional.

Antecedentes

Uno de los desafíos pendientes de la economía de la educación es estimar una función de producción que tenga poder de predicción respecto de los resultados educacionales. Como desarrollan Hanushek y otros autores (1996) los recursos económicos que se introducen en el sistema educativo parecen no tener ningún efecto sobre el producto. Gallego (2002) señala que un modelo de función de producción requiere que ésta no sea homogénea en las características de los estudiantes u otros insumos ni *ad hoc* a los distintos tipo de escuelas (por ejemplo, privadas "eficientes", públicas "ineficientes"), y que la asignación de los factores productivos sea endógena a los esquemas de incentivos enfrentados por los agentes tomadores de decisiones.

Entre los insumos que una escuela puede considerar para la producción educativa, se encuentra la calidad de sus propios alumnos, generalmente representada por algún momento de la distribución de habilidad o rendimiento. Al respecto, las escuelas deben decidir la distribución de los alumnos en cursos de tipo homogéneo o heterogéneo, y cómo asignarles los profesores disponibles. Las consideraciones respecto del efecto que los pares tienen en el aprendizaje llevan a adoptar políticas sobre la composición óptima de los grupos. Sin embargo, un modelo lineal en las medias, como el que se ha empleado tradicionalmente en la literatura, implica que no importa como se distribuyan los pares, el producto agregado será idéntico, ya que para darle un mejor par a un estudiante y así incrementar la media de su grupo, necesariamente se le quita a otro, donde la media decrece, por lo que ambos efectos se cancelan.

Cuando la varianza es importante, en cambio, sí existen combinaciones de estudiantes que generan más valor que otras, sin embargo puede que estas mezclas óptimas no sean obvias. Consideraciones sobre el efecto de la varianza en la distribución de habilidad de la clase llevan a países e instituciones optar por políticas de *tracking* o *mixing*.[1] Al respecto, las conclusiones no van en una sola línea. Gamoran y Mare (1989) concluían que el *tracking* favorece el aprendizaje matemático y algunas poblaciones con desventaja inicial, sin embargo, la literatura de las ciencias sociales que analiza las consecuencias de aplicar políticas de agrupación por habilidad muy temprano en la vida escolar, se ha referido a ellas como el "Efecto Mateo", aludiendo a una cita bíblica que predice que diferencias iniciales en dotación tenderán a acentuarse.[2] Hanushek y Wößmann (2005) en un estudio para seis pruebas internacionales en alrededor de 20 países, encuentran que el *tracking* temprano incrementa desigualdad educacional con algunas evidencias de reducir el desempeño medio; Tach y Farkas (2005) para preescolares, argumentan que sólo exacerba la brecha de rendimiento si se inicia muy temprano. Entorf y Lauk (2006) confirman en sus resultados la hipótesis de que el *tracking* temprano (empleado en países como Austria y Alemania) refuerza el efecto de la segregación de modo que los inmigrantes que atienden escuelas de bajo rendimiento (por ej.: la *Hauptschule* en Alemania) reciben poco efecto de pares de alta habilidad, lo que lleva a que las diferencias prevalecientes entre los niños de familias desaventajadas y aventajadas se amplifique[3].

Presentación del modelo base

Edward P. Lazear (2001) desarrolla un modelo de función de producción educacional donde lo relevante para el resultado educativo es el proceso de instrucción que ocurre en la sala de clases. Este proceso tiene características de bien público ya que, dada las características de la tecnología instructiva, cuando un alumno interrumpe el desarrollo de la clase sus compañeros aprenden menos. En un ambiente de instrucción colectiva el aprendizaje está sujeto a congestión y, por lo mismo, el efecto de los pares se expresa a través de la externalidad negativa que los alumnos se generan entre sí. Hay heterogeneidad en los alumnos en la medida de que tipos diferentes producen distintas cuantías de esta externalidad.

[1] *Tracking* es el concepto que define el agrupar por habilidad a los estudiantes ya sea a lo largo de las escuelas o al interior de ellas, en *todas* las materias. *Streaming* se refiere a una agrupación por habilidad sólo al interior de la escuela y para *algunas* materias. Ambas son expresiones de una política de *grouping* que privilegia la agrupación homogénea de los estudiantes por habilidad, versus una de *mixing* o *detracking*, donde los grupos se conforman heterogéneamente.

[2] "Porque al que tiene se le dará y abundará pero a quien no tiene aún lo que tiene se le quitará" (Mateo XXV:29).

[3] Sin embargo es necesario aclarar que, en el contexto europeo, *tracking* toma la forma de sistemas educativos paralelos (habiendo típicamente al menos uno académico y otro vocacional) a los cuales los alumnos son asignados a partir de cierta edad después de enfrentar algún sistema de selección (*selective schooling*). En cambio, en Norteamérica, *tracking* se refiere a agrupar por habilidad dentro de un único sistema de enseñanza que abarca a alumnos de todos los niveles de aptitud (*comprehensive schooling*). El concepto empleado en este trabajo corresponde más a esta última definición.

A partir de esta función educativa, el modelo de Lazear incorpora agentes maximizadores y endogeneidad en la asignación del recurso ratio profesor-alumno. Al momento de definir la cantidad de alumnos que pueden estar juntos en una sala de clases, las escuelas privadas que maximizan beneficios toman en consideración cuánto del aprendizaje individual potencial es mermado por las interrupciones de los compañeros. Uno de los méritos de este modelo, que define el efecto pares en términos de la externalidad negativa que se produce en la sala de clases, es que tiene poder explicativo respecto las decisiones que toman las escuelas en relación al tamaño de sus cursos.

Este trabajo consta de cinco partes además de la presente Introducción. En la sección 2 se describe y analiza la función de producción empleada, cuya base es el modelo desarrollado por Lazear (2001). Se analizan los insumos, la relación entre ellos y la forma funcional. Se extiende el modelo de Lazear incorporando tecnología de reeducación para elevar el nivel de los alumnos en la sala de clases. En la sección 3 se analiza el marco de la decisiones óptimas en el modelo base y con la extensión en dos versiones. La sección 4 discute sobre dos políticas recurrentes al momento de proponer formas de mejorar el producto de algunos sectores. Se contrastan con una estrategia de minimización de costos. En la sección 5 se da una breve mirada a los datos, antes de concluir en la sección 6.

2. La función de producción

En esta sección se presenta el modelo de función de producción educativa con que se responderán las preguntas planteadas por este trabajo. En su forma más general, la función de producción considera tres insumos presentes en la sala de clases:

1. la calidad media de los alumnos, que depende de su tipo,

2. el ratio profesor-alumno, que en un sistema privado se decide mediante un proceso de optimización, y

3. una tecnología que mejora la realización de los estudiantes por sobre el nivel correspondiente a su tipo, que puede representar la calidad del profesor u otras intervenciones de la escuela.

Los dos primeros pertenecen al modelo base desarrollado por Lazear (2001) y se analizan con mayor detalle en la sección 3 dedicada a la optimización de la función de beneficios de la escuela. El tercero es una extensión al modelo base y se describen más adelante en esta sección.

La instrucción en sala de clases tiene características de un bien público sujeto a congestión. El modelo que desarrolla Lazear propone una función de producción que recoge esta característica: los alumnos se definen por el nivel de externalidad negativa que producen en un ambiente de instrucción colectiva. El foco está puesto en la externalidad negativa porque su principal objetivo es explicar cómo la decisión del número de alumnos es endógena a la optimización de una función de beneficios que depende positivamente de la calidad de los alumnos.

Por otra parte, aunque los costos de instruir alumnos en una sala de clases disminuyen con el tamaño del grupo, no es posible agregar alumnos sin límite porque la congestión producida hace decaer el producto educativo por debajo del óptimo. Cuanto más alta la calidad del grupo menor es la congestión y mayor es el número óptimo de alumnos. Por último, aunque el nivel de los alumnos esté fijo, existe una tecnología disponible para algunos profesores u otros profesionales que puede mejorar la realización de los alumnos en una sala de clases. Esta extensión al modelo de Lazear permite enriquecer los resultados obtenidos con el modelo base. En especial afecta las decisiones entre escuelas y al interior de ellas respecto de la distribución óptima de los alumnos cuando éstos son de distinto tipo.

Luego de describir los insumos, se discute brevemente el comportamiento de la forma funcional cuya base también proviene del trabajo de Lazear, pero que se ha extendido para incorporar tecnología. En particular se describe lo que ocurre cuando el nivel de los parámetros desciende bajo un umbral. Se argumenta que, a pesar de que estos últimos casos existen, no serán considerados dentro del conjunto de posibilidades, ya que es altamente improbable que se observen en un contexto de optimización.

2.1 Los insumos

A continuación, se describen los tres insumos del modelo de función de producción empleado este trabajo. Para el insumo que corresponde a la calidad de los alumnos, se describe dos casos:

1. todos los alumnos tienen el mismo tipo o nivel (la calidad en la sala de clases es homogénea), y

2. conviven dos tipos o niveles de alumnos en alguna proporción (si hay heterogeneidad en la sala de clases).

Que existan dos (o más) tipos de alumnos no afecta el ratio profesor-alumno óptimo, ya que este factor depende de la calidad media de la clase. Por lo mismo, tampoco afecta el nivel óptimo de tecnología, aunque en la sección 2.2 se verá que existen dos maneras de incorporarla a la forma funcional.

2.1.1 Una medida de calidad para los alumnos *(p)*

El primer insumo es el alumno, el que determina la calidad promedio de la clase según su tipo. En el modelo de Lazear los alumnos tienen un solo comportamiento relevante para la función de producción: la probabilidad de no estar deteniendo el proceso tecnológico que se lleva a cabo al interior de la sala de clases. Todo comportamiento que impida que el curso completo obtenga provecho de un momento de instrucción se considera una interrupción. Puede tomar la forma de una disrupción, en que todos pierden, o cualquier otra manera en que un alumno captura el trabajo del profesor de modo exclusivo para sí, por ejemplo preguntando algo que todos saben. Aun cuando el alumno que pregunta obtiene un beneficio, se considera interrupción.

La probabilidad de interrupción puede corresponder a una conducta más general aun, como la necesidad de recibir atención individual para lograr un aprendizaje. De esta manera se puede ligar el nivel de no disrupción potencial de un alumno a su nivel de capital humano acumulado que le permite aprender al ritmo de una clase dictada colectivamente. Si el nivel es el adecuado, la clase logra su objetivo. Si el alumno tiene carencias previas, hay aprendizajes que no se lograrán, a menos que reciba atención individual. Bajo el supuesto de que el alumno efectivamente recibe esa atención individual durante el transcurso de la clase colectiva, sus carencias afectan el aprendizaje del resto de los alumnos.

Para el desarrollo de este trabajo se denominará *interrupción* la conducta que genera una externalidad negativa en el aprendizaje colectivo. La probabilidad de no interrumpir está definida por el nivel de p del alumno.

En presencia de heterogeneidad

Con dos tipos de alumnos: *tipo A* (alumnos con baja probabilidad de interrumpir la clase) y *tipo B* (alumnos con alta probabilidad de interrumpir la clase) ya es posible analizar el caso de la sala de clases mixta. Cuando los alumnos son de dos tipos, se definen tres parámetros:

p_A : conducta de alumnos *tipo A* : baja probabilidad de interrupción

p_B : conducta de alumnos *tipo B* : alta baja probabilidad de interrupción

α : porcentaje de alumnos *tipo A* con $0 \leq \alpha \leq 1$

Si $\alpha = 1$, hay sólo alumnos *tipo A* y si $\alpha = 0$ hay sólo alumnos *tipo B*.

La calidad media de la clase corresponde a $P \equiv p_A^{\alpha} p_B^{1-\alpha}$, la media geométrica ponderada de dos niveles de p. Se define $\gamma \equiv p_B / p_A$ como el porcentaje del nivel del p alto equivalente al nivel del p bajo, con $0 < \gamma \leq 1$. El parámetro γ mide la distancia proporcional entre los dos niveles. Reemplazando p_B por γp_A, se obtiene que $P \equiv p_A \gamma^{(1-\alpha)}$. A mayor proporción de tipos altos en la clase y más cercanía entre p_B y p_A (mayores valores para α y γ respectivamente), el tipo medio de la clase mixta es más cercano a p_A.

El ratio profesor–alumno *(1/n)*

El segundo insumo de la función de producción, es un factor productivo cuyo nivel óptimo puede decidirse a partir de una maximización de beneficios. Corresponde a la cantidad de profesores por alumno (*1/n*), lo que también se puede expresar como *n*, recordando que en este caso <u>más</u> *n* produce <u>menos</u> producto. Debido a que alumnos de p más alto permiten reunir una mayor cantidad de estudiantes antes de que se produzca un nivel de congestión excesivo, el ratio profesor-alumno óptimo es menor para un tipo de alumno más alto. Este punto se desarrollará en la sección 3.

Si n corresponde número de alumnos en un clase, p^n es la probabilidad de que ningún alumno impida el desarrollo del proceso de instrucción y $1-p^n$ es la probabilidad de que este proceso sea interrumpido.

Cuando un grupo varía su tamaño se observa un efecto sobre el producto. Si el número de alumnos aumenta el producto cae y, obviamente, lo contrario ocurre si el número de alumnos disminuye. Este efecto (E) es mayor para las clases con menor nivel ($\partial E/\partial P<0$) y con mayor número de alumnos ($\partial E/\partial n>0$).[4]

En presencia de heterogeneidad

Si hay dos tipos de alumnos en proporción $\alpha/(1-\alpha)$, la probabilidad de que ningún alumno impida el desarrollo del proceso de instrucción es:

$$P^n \equiv (p_A^{\alpha} p_B^{1-\alpha})^n \tag{1}$$

donde αn es la cantidad de alumnos *tipo A* y $(1-\alpha)n$ es la cantidad de alumno *tipo B.*

Reemplazando p_B por γp_A se obtiene:

$$P^n \equiv p_A^n \gamma^{(1-\alpha)n} = (p_A \gamma^{(1-\alpha)})^n \tag{1'}$$

El resultado de la función de producción con los insumos P y $1/n$, es $P^{\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}} = P^n$ lo que corresponde al producto educativo que cada alumno obtiene de un momento interrumpido de instrucción. El menor producto educativo por estudiante se obtiene en las clases con alumnos *tipo B*, luego en las clases mixtas, y el más alto se produce en las clases con alumnos *tipo A*:

$$p_B^n < p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n} < p_A^n \tag{2}$$

$$(\gamma p_A)^n < (p_A \gamma^{(1-\alpha)})^n < p_A^n \tag{2'}$$

La diferencia entre estos tres niveles de producto depende de γ, es decir de cuán similares o distintos son los dos tipos de alumnos (lo que llamaremos *varianza*), y de α, la proporción de alumnos *tipo A* en la clase mixta. Cuanto más similares son los alumnos y cuanto mayor es la proporción de alumnos *tipo A*, menor es la diferencia del producto por alumno entre estos tres tipos de clases.

---

[4] Desarrollo en Apéndice matemático I

2.1.3 Una tecnología que mejora el nivel de los estudiantes *(q)*

El último insumo corresponde a la posibilidad de que, a pesar de su tipo y su probabilidad de interrumpir, la realización de un alumno en la sala de clases sea mejor. Aunque el modelo de Lazear introduce la posibilidad de que el comportamiento del alumno pueda ser modificado a través de la disciplina, en éste el nivel óptimo de disciplina es una decisión endógena dependiente del tipo. Dado que es más costoso aplicar disciplina en los tipos bajos y que a más alto el tipo mayor el efecto de la disciplina, el resultado es que los tipos altos enfrentan más disciplina por infracción que los bajos.

En el modelo con tecnología que se presenta en este trabajo, la disciplina o reeducación de los alumnos es un insumo más que entra a la función de producción. El término *reeducación* es más general que *disciplina* ya que abarca cualquier intervención que disminuya la atención individual que un alumno necesita para lograr un objetivo de aprendizaje durante el transcurso de una clase colectiva. Los dos términos se refieren a una tecnología que disminuye la externalidad negativa que produce un tipo de alumno en la sala de clases, mejorando su nivel de atención. Esto le permite conectarse con el proceso de aprendizaje sin interrumpir al resto de sus compañeros ni a sí mismo.

Si consideramos que hay dos insumos q y $1/n$, el producto puede aumentar tanto reduciendo el número de alumnos (aumentando $1/n$) como incorporando más q. Para aumentar $1/n$ es necesario contratar más profesores. Para aplicar q se necesitan profesores distintos o prácticas profesionales diferentes que eleven el nivel de comportamiento y atención de los alumnos, disminuyendo la cantidad de externalidad negativa producida en la sala de clases.

Hay tres posibles resultados para la realización de un grupo de alumnos cuando se aplica tecnología. Como los alumnos no pueden quedar peor, se descarta el caso (*) con tecnología negativa:

$$P^{\frac{1}{1+q}} = \begin{cases} P^0 < P \Leftrightarrow q < 0 \ (*) \\ P \Leftrightarrow q = 0 \\ P' > P \Leftrightarrow q \in (0,\infty) \\ 1 \Leftrightarrow q \to \infty \end{cases}$$

Si no se aplica tecnología (*q=0*), este es el caso del modelo base de Lazear (2001). La escuela toma a los alumnos tal como vienen y el producto educativo depende únicamente del grado de congestión que ocurra en la sala de clases según el ratio profesor-alumno.

Si se aplica tecnología infinita todos los alumnos obtienen el máximo producto posible independiente de su tipo. Este caso irreal ilustra la dificultad de obtener resultados homogéneos con una población heterogénea.

2.2. La forma funcional

La función de producción educativa expresada de manera general tiene la siguiente forma:

$$\theta \equiv P^{\frac{n}{1+q}} \tag{3}$$

donde θ es el producto educativo y P es el nivel medio[5] de los alumnos de una clase, por lo que no es relevante si se compone de un tipo de alumnos o más. El ratio profesor-alumno está expresado en su forma inversa, es decir como n –el número de alumnos por profesor– y q representa la tecnología.

Esta función de producción se comporta de manera distinta dependiendo de las productividades marginales de los factores *1/n* y *q*. Existen tres combinaciones posibles[6] que en términos generales describen zonas de la función de producción con comportamientos específicos, si bien ésta cumple como un todo con el requisito de cuasiconcavidad[7]:

1. El ratio profesor-alumno (*1/n*) y la cantidad de tecnología (*q*) presentan retornos decrecientes a escala, son q-anticomplementarios[8] entre sí y ambos son más productivos para niveles bajos de *P*. Corresponde a un caso en que los tres insumos son sustituibles entre ellos. Así, para aumentar el nivel de producto, se puede escoger entre disminuir el número de alumnos por sala (aumentando *1/n*), aumentar la cantidad de tecnología (agregando *q*) o reemplazar algunos alumnos por otros de mayor calidad (elevando *P*).

---

[5] Recordar que P corresponde a la media geométrica del curso si hay más de un nivel de alumno: $P = p_A^{\alpha} p_B^{1-\alpha}$ con $p_A > p_B$.

[6] Desarrollo en Apéndice matemático II

[7] Desarrollo en Apéndice matemático III

[8] Si son q-anticomplementarios son sustitutos en la producción y por lo tanto al aumentar el nivel de uno de los insumos, el otro disminuye su productividad marginal

2. El ratio profesor-alumno (*1/n*) y la cantidad de tecnología (*q*) presentan retornos decrecientes a escala al igual que en el caso anterior, pero los factores son q-complementarios[9] y ambos son más productivos para niveles altos de *P*. En este caso los tres insumos actúan como complementos entre sí. Sólo aumentando los tres simultáneamente se puede generar un incremento importante en el producto. Estos resultados se obtienen cuando los parámetros descienden bajo un umbral, es decir cuando la calidad de los alumnos es muy baja, el número de alumnos es muy alto y hay escasa o nula tecnología.

3. El ratio profesor-alumno (*1/n*) y la cantidad de tecnología (*q*) presentan retornos crecientes a escala, los factores son q-complementarios y ambos son más productivos para niveles altos de *P*. Estos resultados se obtienen cuando los parámetros descienden bajo un umbral incluso más bajo que el requerido en el caso anterior. Este caso definitivamente están fuera del conjunto de posibilidades en un contexto de optimización ya que al maximizar la función objetivo[10] la Condición de Segundo Orden es positiva.

Estas dos ultimas combinaciones de características, donde los factores no son sustitutos entre sí sino complementos, se descartan porque para que sean observadas deben participar subsidios, y por lo tanto actores no privados, lo que se encuentra fuera del alcance de este trabajo. Lazear (2001) ya había señalado que no se observará provisión de educación por parte de una escuela privada para niveles muy descendidos de *P* ya que el número óptimo de alumnos es tan bajo que se obtienen rentas negativas. Algo similar ocurre con la tecnología: se necesitan niveles tan altos que no es rentable contratar a profesores que cobren por ella. Por lo tanto, sin subsidios, las escuelas privadas no abrirán para niños de *P* muy bajo y las públicas no podrán lograr niveles razonables de aprendizaje, ya que estos alumnos requieren tanto de clases pequeñas como de altos niveles de tecnología.

Otra irregularidad de los casos descartados es que los factores *1/n* y *q* aumentan su productividad marginal a medida que aumenta el nivel de *P*. Esto encarece aun más la provisión de educación para los niveles de *P* más descendidos y refuerza el argumento de la necesidad de fuertes subsidios. Por último, es posible que no exista suficiente tecnología (*q*) entre los profesores disponibles. Se requerirían subsidiar costos de entrenamiento y selección de profesores, además

[9] Si son q-complementarios son complementos en la producción y por lo tanto al aumentar el nivel de uno de los insumos, el otro aumenta su productividad marginal

[10] Ver Apéndice matemático IV

de los subsidios directos por alumno, para que la provisión de educación de este segmento cumpla con el objetivo de lograr aprendizajes.

El siguiente cuadro comparativo (Tabla 1) presenta de manera muy esquemática el comportamiento de la función de producción para distintos niveles de los parámetros descritos anteriormente. Algunos valores extremos de *1/n* y *q* ya han sido descartados.

Tabla 1
Comportamiento de la función de producción
para distintas combinaciones de los niveles de los parámetros (*1/n*, *P* y *q*)

	ratio profesor:alumno (*1/n*)					
	bajo			alto		
	tecnología (*q*)			tecnología (*q*)		
nivel medio de la clase (*P*)	0	bajo	alto	0	bajo	alto
>0	*min*	*min*	*min*	*min*	*min*	–
	min	*min*	*min*	*min*	–	–
	min	*min*	–	–	–	+
	min	–	–	–	+	+
	–	–	+	+	+	+
	–	+	+	+	+	+
	+	+	+	+	+	+
<1	+	+	+	+	+	+

+ (combinación 1) : retornos decrecientes a escala, sustitutos, productividad mayor para niveles altos de *P*.
– (combinación 2) : retornos decrecientes a escala, sustitutos, productividad mayor para niveles altos de *P*.
min (combinación 3) : retornos crecientes a escala, complementos, productividad mayor para niveles altos de *P*.
> 0 : el nivel medio de la clase tiende a 0
< 1 : el nivel medio de la clase tiende a 1.

En la Tabla 1 se aprecia que con un nivel de tecnología alto y un ratio profesor-alumno bajo, se obtiene un similar comportamiento que sin tecnología (*q=0*) pero con un ratio profesor-alumno alto. Hay casos extremos, por ejemplo, cuando el nivel medio de la clase es muy alto se obtiene siempre un resultado (+) independiente de *1/n* o *q*. Otras observaciones:

<u>Nivel medio de la clase</u> (*P*)
Ninguno de los dos extremos (0 ó 1) es técnicamente posible.

<u>Ratio profesor-alumno</u> (*1/n*)
Se definen sólo dos niveles (bajo) y (alto), para enfatizar que las posibilidades de obtener un resultado (+) aumentan cuando *1/n* aumenta. No se consideran niveles extremos como *1/n=0* ó *1/n=1* porque no corresponden a valores de un problema definido para una sala de clases. Se puede ver en la tabla que la función tiene un comportamiento similar con *1/n* bajo y *q* alto y con *1/n* alto y *q=0*.

Tecnología (q)
Se considera $q=0$ porque la función del modelo base no tiene tecnología y el problema está bien definido. No se considera tecnología infinita, ya que en ese caso cualquier alumno en cualquier clase obtendría $p=1$, lo que queda fuera del ámbito de interés atingente al problema propuesto.

En presencia de heterogeneidad
Si hay dos tipos de alumnos en proporción $\alpha/(1-\alpha)$, el producto educativo por alumno (θ^{mix}) es:

$$\theta^{mix} \equiv P^{\frac{n}{1+q}} \equiv (p_A^{\alpha} p_B^{1-\alpha})^{\frac{n}{1+q}} \qquad (4)$$

Reemplazando p_B por γp_A se obtiene:

$$\theta^{mix} \equiv P^{\frac{n}{1+q}} \equiv (p_A \gamma^{1-\alpha})^{\frac{n}{1+q}} \qquad (4')$$

La equivalencia en (4') permite apreciar el papel de α y γ en una función de producción con dos tipos de alumnos. La función es creciente en ambos parámetros por lo que en un contexto de clases mixtas, como es previsible, se obtiene un mayor producto educativo por alumno con valores más altos de α (con un mayor porcentaje de alumnos *tipo A*) y valores más altos de γ (menor varianza, p_A y p_B similares).

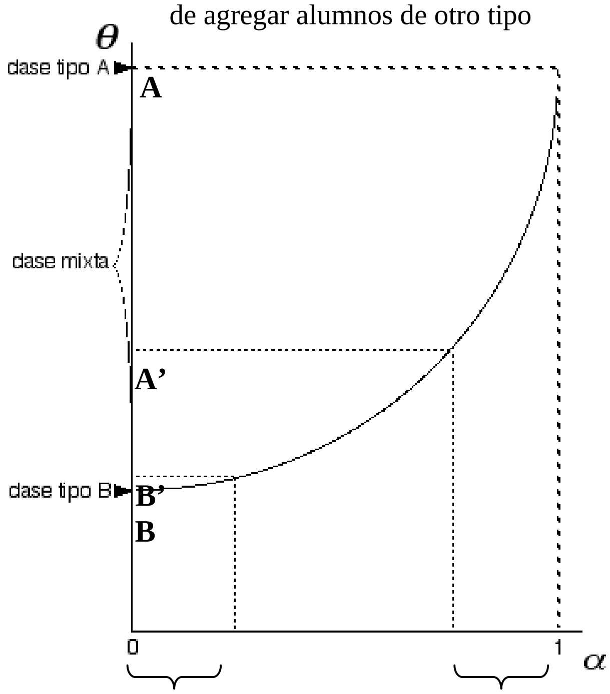
Pero además, la función es convexa en ambos parámetros, de modo que el cambio que se produce en el producto educativo al modificar el porcentaje de alumnos *tipo A* es mayor en cursos con un mayor porcentaje de alumnos de tipo alto (mayor α). Y el cambio que se produce en el producto educativo al modificar la varianza de un curso es mayor en cursos con menor varianza (mayor γ). Como consecuencia de lo anterior:

1. Incorporar alumnos *tipo B* a una clase hace descender menos el producto de un curso si éste es mixto (menor α) que si es *tipo A* (mayor α).

2. No es simétrico trasladar algunos alumnos *tipo A* a cursos *tipo B*, que incorporar alumnos *tipo B* en cursos *tipo A*. Esto se ilustra en el Gráfico 1. En el primer caso el aumento en el producto del curso receptor es bajo (se eleva de **B** a **B'**), en cambio la disminución para el alumno *tipo A* que se integra es alto (desciende de **A** a **B'**). En el segundo caso la disminución en el producto del curso receptor es menor (sólo desciende de **A** a **A'**), y el

aumento para el alumno *tipo B* que se integra, es mayor (se eleva de **B** a **A’**). Hay mayor pérdida de producto agregado en el primer caso.[11]

Gráfico 1
Efecto en el producto de una clase de un tipo de agregar alumnos de otro tipo



se agregan alumnos *tipo A* a una clase *tipo B*

se agregan alumnos *tipo B* a una clase *tipo A*

Por otra parte[12]:

1. Las diferencias observadas en el producto de cursos con distinta varianza (distinto γ) son mayores cuando se comparan cursos con más alumnos y/o menor porcentaje de alumnos *tipo A*.

2. Las diferencias observadas en el producto de cursos con distinto porcentaje de alumnos *tipo A* (distinto α) son mayores si se comparan cursos con más alumnos y/o varianza mayor.

[11] Ver Apéndice matemático V
[12] Ver Apéndice matemático VI

La aplicación de la tecnología

Cuando los alumnos son heterogéneos la tecnología puede ser tratada de dos maneras distintas, según cómo se incorpore q a la forma funcional:

1. *Tecnología general:* puede producir efectos en los dos tipos de alumnos. La tecnología general tiene un límite en su efectividad y además está fija ($q = \overline{q}$). Esto implica que actúa hasta un punto y luego ya no produce más incrementos en el producto. Existe una restricción en la cantidad de unidades de q disponibles, o a partir de un nivel de q las unidades adicionales no producen ningún efecto (su productividad marginal es 0). Esta tecnología general corresponde, por ejemplo, al profesor que tiene la capacidad –definida por unidades fijas de q– de elevar el nivel de atención de todos los alumnos en su clase, no cobra un salario distinto por esto,[13] pero es escaso.

2. *Tecnología especializada:* se aplica sólo a los alumnos *tipo B*, donde es más productiva. Cuando una tecnología es especializada está diseñada para elevar el nivel de un solo tipo de alumno ya que los cambios que produce no son relevantes para el otro tipo. Esta tecnología especializada corresponde, por ejemplo, al profesional especialista que trabaja directamente con los alumnos con más dificultad reeducándolos con unidades de q y cobra por cada alumno que debe tratar. Puede ser un programa implementado por la escuela, focalizado en los alumnos de bajo p, que tiene un costo W_q por alumno.

La principal diferencia entre estas dos aplicaciones es que el profesor con tecnología general eleva el nivel de atención de todos los alumnos de su clase, en cambio un programa focalizado concentra su trabajo sobre los alumnos con problemas. Según esto, q se incorpora de manera distinta en la función de producción de las clases mixtas:

1. Tecnología general $\theta \equiv (p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)})^{\frac{n}{1+q}} = (p_A \gamma^{(1-\alpha)})^{\frac{n}{1+q}}$ (5)
2. Tecnología especializada $\theta \equiv p_A^{\alpha} p_B^{\frac{(1-\alpha)n}{1+q}} = (p_A^{(1+\alpha q)} \gamma^{(1-\alpha)})^{\frac{n}{1+q}}$ (5')

Respecto de la tecnología especializada, es necesario enfatizar que, en este caso el rol de la productividad marginal es crucial y se produce porque la diferencia entre un alumno *tipo A* y otro *tipo B* es cualitativa además de cuantitativa. Los estilos de aprendizaje son distintos y la relación tecnología-alumno es mucho más determinante del producto educativo de los alumnos de tipo bajo que de los de tipo alto.

[13] Esto puede ocurrir, por ejemplo, si en el mercado laboral de los educadores se ha producido una compresión en los salarios debido a rigideces que impiden que éstos varíen con la productividad. En estos casos las diferencias de salario provienen de los años de antigüedad, los que no parecen estar correlacionados con efectividad (Rivkin et al, 2005; Rockoff, 2004).

3. Las decisiones óptimas

En esta sección se describe el proceso de optimización que sigue la escuela para responder la pregunta principal de este trabajo, la que se refiere a decidir:

1. La cantidad de alumnos por sala de clases, lo que es equivalente al ratio profesor-alumno y a la subdivisión óptima del total de alumnos matriculados en una escuela.

2. La composición de las clases cuando asisten dos tipos de alumnos y las escuelas tiene más de un curso por nivel.

Primero se describen los resultados cuando no se incorpora tecnología, los que corresponden al modelo base de Lazear (2001). Luego se desarrolla la extensión con tecnología para revisar cómo los resultados propuestos en el modelo base referidos a la asignación de los alumnos, se extienden a la asignación de los profesores. Se desarrolla un caso específico donde la tecnología se aplica de manera general y existe una restricción en el número de profesores que dispone de ella.

3.1 Optimización en el modelo base

A continuación se exponen los principales resultados de Lazear (2001). Éstos se derivan de la función de beneficios de la escuela donde existe una única variable de decisión: la subdivisión óptima de los alumnos matriculados (m^*) o, equivalentemente, el número óptimo de alumnos por clase (n^*).

Lazear demuestra tres proposiciones. La primera se refiere al efecto que tienen otras variables de la función de beneficios sobre el tamaño óptimo. Se observará un n^* mayor en presencia de profesores con salarios más altos, menor valor de mercado del capital humano, y alumnos mejor comportados. La segunda proposición se refiere al hecho de que, aun cuando hay sustitución entre tamaño óptimo y calidad de alumno, esta sustitución no es perfecta y siempre el producto por alumno será mayor en clases con más alumnos de mayor calidad, que en clases con menos alumnos pero de un nivel más bajo. Una reducción en n no es suficiente para contrarrestar el efecto de un aprendizaje más lento debido a que el valor de p^n es menor. Se comprende, entonces, que sea tan difícil identificar en datos de corte transversal el efecto del tamaño de la clase sobre el producto educativo. Muchos de los grupos observados habrán ajustado su tamaño lo más cercano posible al nivel óptimo correspondiente a su tipo de alumno, por lo que se encontrarán clases de mayor tamaño con mejores resultados que clases más pequeñas.

La última proposición postula que se obtiene un mayor producto agregado con clases agrupadas por tipo que con clases mezcladas. Este resultado se aplica al sistema educacional como un todo, donde los alumnos se auto seleccionan en distintos tipos de escuelas ya que los alumnos *tipo A* se benefician más que los alumnos *tipo B* de ingresar a una clase *tipo A.* En el Gráfico 1 examinado anteriormente, se aprecia claramente que un alumno *tipo B* ingresando en una clase *tipo A,* y haciendo que α descienda de 1 a algún valor cercano a 1, logra un producto muy inferior al que obtiene un alumno *tipo A* que ingresa a la misma clase y α se mantiene en 1.

Un alumno de calidad alta se beneficia más que un alumno de menor calidad de estar cerca de un alumno *tipo A*. Cuando alumnos de calidad alta se juntan entre sí, se complementan en el aprendizaje y la escasa externalidad negativa que se producen entre ellos es irrelevante. Se puede pensar que los alumnos se potencian en lo que son *especialistas*. Los alumnos *tipo A* son especialistas en no interrumpir, de modo que al juntarse con sus iguales experimentan distintas formas de permitir un desarrollo ininterrumpido de una clase y la congestión se minimiza. Los alumnos *tipo B* se especializan en interrumpir, lo que puede concebirse como un estilo de aprendizaje con más intervenciones personalizadas, o con más correcciones individuales por parte del profesor[14]. Cuando los alumnos *tipo B* están juntos se congestionan entre sí, y también congestionan el aprendizaje de cualquier otros tipo de alumno con quien compartan el profesor. El producto agregado es mayor en clases segregadas porque los alumnos *tipo A* pierden muy poco de juntarse entre sí, y en cambio pierden mucho de mezclarse con otro tipo de alumnos. De aquí que los alumnos *tipo A* se auto seleccionen en escuelas de su tipo.

Por lo tanto, la única forma de obtener escuelas mixtas es imponiéndolo como una restricción al sistema educacional. Sin embargo, cuando las escuelas pretenden maximizar el producto y están obligadas recibir alumnos de distinto tipo, todavía tienen la opción de segregarlos al interior de la escuela si es que tiene suficientes alumnos como para formar más de una clase por nivel. A lo largo del modelo de Lazear este es el resultado dominante: agrupar por tipo es más eficiente que mezclar.

[14] De ahí que, enfatizando un comentario previo respecto de la tecnología especializada, estos alumnos son más tecnológico-dependientes Su aprendizaje depende más de la calidad del profesor, que en el caso de los alumnos de tipo alto.

Formalización del modelo base

La función de beneficios de la escuela, tiene la siguiente forma:

$$\Pi = ZVp^{\frac{Z}{m}} - Wm \qquad (6)$$

donde Z corresponde al número de alumnos en la escuela, m al número de profesores y por lo tanto al número de grupos o clases y $Z/m = n$, el número de alumnos en la sala de clases. V es el valor de una unidad de aprendizaje que está determinado por el valor de mercado del capital humano y la capacidad del alumno de aprender en un instante no interrumpido de instrucción. Durante el desarrollo del modelo de Lazear, V se normalizará a 1, salvo que se explicite lo contrario.

W corresponde al salario del profesor y al precio de arriendo del capital asociados a su sala de clases, por cada *instante de instrucción*. En un equilibrio competitivo, las escuelas pueden vender cada momento de instrucción a ZVp^n con un costo de Wm. Una escuela que maximiza beneficios siempre aumentará n o, lo que es equivalente, disminuirá m hasta el punto en que la congestión generada disminuya el valor de su producto más de lo que le disminuye sus costos.

Por cada instante de instrucción, el producto de toda la escuela es $ZVp^n = mnVp^n$. El producto por clase es nVp^n; y el producto por alumno, Vp^n. Este último valor corresponde, además, a lo máximo que estará dispuesto a pagar el alumno (su familia) por recibir un instante de instrucción y, por lo tanto, es lo máximo que puede ser cobrado por la escuela a cada alumno.

Desde el punto de vista de la escuela, cuando existe un solo valor de p, o un P que es la media geométrica ponderada de la clase, el beneficio que obtiene por cada alumno que educa queda definido por:

$$\frac{\Pi}{Z} \equiv \Pi_s = Vp^n - \tfrac{W}{n} \qquad (6')$$

La condición de primer orden[15] para la ecuación (6) es:

$$[m]: -V\frac{Z^2}{m^2}p^{\frac{Z}{m}}\ln(p) - W = 0 \qquad (7)$$

[15] Desarrollo en Apéndice matemático VII

y para la ecuación (6'):

$$[n]: Vp^n \ln(p) + \tfrac{W}{n^2} = 0 \qquad (7')$$

Para obtener *m**, que es la subdivisión óptima para un total de *Z* alumnos, se emplea la ecuación (7). Para obtener *n** que es el número óptimo de alumnos por clase, se emplea la ecuación (7'). Para simplificar el análisis, y sin ninguna pérdida de generalidad, en adelante siempre se emplearán las ecuaciones (6') y (7') para obtener los resultados.

Agrupar y mezclar en el modelo base

Siguiendo el desarrollo de Lazear, si la economía está compuesta de α alumnos *tipo A* y $1-\alpha$ alumnos *tipo B*, el producto por estudiante en una economía con escuelas agrupadas por tipo es:

$$\alpha p_A^n + (1-\alpha) p_B^n \qquad (8)$$

En cambio el producto por estudiantes, si el sistema es de escuelas mixtas, es:

$$p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n} \qquad (8')$$

Para mostrar que es mejor agrupar los tipos que mezclarlos se debe demostrar que la diferencia entre (8) y (8') es positiva. Esta diferencia es:

$$dif = \alpha p_A^n + (1-\alpha) p_B^n - p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n} > 0 \qquad (9)$$

Cuando $p_A = p_B$, *dif=0*, ya que si hay un solo tipo mezclar o agrupar es irrelevante. Para comprobar que la función *dif* es positiva, se debe demostrar que es creciente en p_A. Al elevar el nivel de p_A, el producto aumenta más en las clases donde los alumnos del *tipo A* están solos que donde están mezclados. Esto se comprueba al diferenciar (8) respecto de p_A. Con $p_A > p_B$:

$$\frac{\partial dif}{\partial p_A} = \alpha n p_A^{n-1}\left(1 - \frac{p_B^{(1-\alpha)n}}{p_A^{(1-\alpha)n}}\right) > 0 \qquad (9')$$

La forma de la ecuación (9) puede generalizarse para incorporar la información de que los grupos del *tipo A* y *tipo B* tendrá un *n** diferente cada uno. El argumento de Lazear para emplear un solo *n* es que primero se demuestra que (9) >0 se cumple con el *n** de la clase mixta para todos los grupos por igual. Si se comprueba para este caso, con mayor razón deberá cumplirse cuando el *n* se ajusta para cada tipo de clase segregada. Como el producto disminuye menos para los alumnos *tipo A* segregados de lo que aumenta para los *tipo B* al ajustar el n* (la productividad marginal de *1/n* es mayor para niveles menores de *p*), esto hará que la diferencia entre el estado mixto y el estado segregado se acentúe.

Un alumno tipo A se beneficia más que un alumno tipo B de ingresar a una clase A

Aunque tanto los alumnos *tipo A* como *B* se benefician de ingresar a una clase *A*, los *tipo A* se benefician más: $p_A^n - p_A^{n-1} p_B > 0$. Por lo tanto, la disposición a pagar de un alumno *tipo A* por asistir a una escuela *tipo A* en vez de una escuela mixta, es mayor que la de un alumno *tipo B*. Por el mismo razonamiento, la diferencia entre los que pagará un alumno *tipo A* y un alumno *tipo B* por estar en una escuela *tipo A* en vez de una escuela *tipo B*, $(p_A^n - p_B^{n-1} p_A) - (p_A^{n-1} p_B - p_B^n)$, también es positiva. Un proceso competitivo de subasta segrega por tipo a los estudiantes en las escuelas, sin necesidad de que se emplee ningún criterio de selección para el ingreso.

Incluso si en el equilibrio no hay escuelas mixtas ya que todos los alumnos *tipo A* van a la escuela privada y todos los alumnos *tipo B* van a la escuela pública, sigue siendo cierto que los *tipo A* serán los más propensos a pagar por ingresar a un establecimiento *tipo A* que los *tipo B*, ya que su disposición a pagar es mayor.

Consideraciones sobre los beneficios

Para que los resultados del modelo de Lazear correspondan a un equilibrio competitivo Walrasiano, sin exceso de oferta ni demanda, donde las asignación de cantidades sean las que efectivamente los consumidores y productores quieren consumir y producir, se deben introducir algunos elementos no descritos en el modelo original.

El principal problema es que siempre $\Pi_A > \Pi_B$, es decir, siempre los beneficios con alumnos *tipo A* son mayores que los beneficios con alumnos *tipo B* y todos quieren alumnos *tipo A*. Por lo tanto, para que por el lado de la oferta $n_A \Pi_A = n_B \Pi_B = 0$, y las escuelas estén indiferentes entre los distintos tipos de alumnos:

1. Los alumnos *tipo A* tienen un descuento (*D*):

$$\begin{aligned} & n_A \Pi_A = n_B \Pi_B = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n_A p_A^{n_A} - D = n_B p_B^{n_B} = W \end{aligned} \tag{10}$$

En este caso los alumnos *tipo A* pagan $n_B p_B^{n_B} / n_A$ cada uno en las escuelas (clases) *tipo A* con $n_B < n_A$ que es menos de lo que paga cada uno de los alumnos *tipo B:* $n_B p_B^{n_B} / n_B = p_B^{n_B}$.

2. A los alumnos *tipo B* se les “adjunta” un premio adicional, un *voucher* subvencionado y diferenciado, por sobre los que los *tipo B* están dispuestos a pagar. Pero esto está fuera del sistema privado y requiere financiamiento. Lo mismo que proveer educación para alumnos de muy bajo *p*, cuando su disposición apagar es inferior al costo por alumno: un *voucher* puede “completar” la disposición a pagar de los alumnos *tipo B* para que las escuelas privadas abran con el número óptimo de alumnos de este tipo. Si la educación es obligatoria y gratuita es probable, como anticipa Lazear, que los cursos sean demasiado grandes y poco efectivos en producir educación.

Por el lado de la demanda, para que los alumnos *tipo A* estén indiferentes entre todas las escuelas tendrían que recibir un premio mayor por irse a las establecimientos *tipo B*, y renunciar al producto alto. Es necesario conocer la función de utilidad de los alumnos, y cómo sustituyen ingreso y producto. Los alumnos *tipo B* están dispuestos a pagar por tener un compañero *tipo A* en la sala pero como es menos de los que los *tipo A* pagan por un compañero *tipo A*, no alcanza: $p_B^{n_B - 1} p_A < p_A^{n_A - 1} p_A = p_A^{n_A}$. Por el mismo argumento no están dispuestos a pagar lo que pagaría un alumno *tipo A* por estar en un curso todo *A*: $p_A^{n_A - 1} p_B < p_A^{n_A - 1} p_A = p_A^{n_A}$.

La solución del problema de equilibrio general está fuera del alcance de este trabajo. Por el momento sólo se puede afirmar que los beneficios existen pero no es seguro cómo se reparten. Por lo tanto mirar cómo cambian los beneficios al imponer una restricción es menos ilustrador que observar el producto educativo directamente.

3.2 Optimización con tecnología

En el modelo base el producto agregado es siempre mayor cuando los alumnos se agrupan por tipo que cuando se mezclan. En esta sección se revisa si, al extender el modelo para incorporar una tecnología que mejora la realización de los alumnos en la sala de clases, este resultado prevalece. La conclusión es que, con tecnología especializada disponible, siempre se obtendrá mayor producto agregado agrupando a los alumnos y asignando a lo profesores con tecnología a las clases con alumnos *tipo B*, donde son más productivos. El *matching*[16] más productivo se da

[16] La teoría del *matching*, desarrollada por Jovanovic (1979) y Mortensen y Pessarides (1994) para el mercado laboral señala que existen combinaciones (*matches*) de trabajadores con empresas que son más productivas que otras, las que se van consolidando mediante un proceso de actualización de creencias sobre el valor de la combinación. En el mercado de la educación existen combinaciones de alumno-profesor más productivas que otras, donde el valor está

entre un alumno de tipo bajo y una tecnología que mejora la realización del tipo en la sala de clases. Cuando la tecnología es general el resultado se mantiene, salvo cuando se introduce una restricción en la cantidad de profesores con tecnología. En ese caso, el resultado es ambiguo y depende críticamente del parámetro γ, que se ha denominado varianza y la cantidad de tecnología $\bar{q}$ de que disponen los profesores.

3.2.1 Optimización con tecnología especializada

El problema de la maximización con tecnología especializada se diferencia del problema del modelo base en que hay un precio para la tecnología. Si la clase está formada por dos tipos alumnos, sólo se aplica a los alumnos *tipo B*, donde es más productiva.

$$\max_{\{n,q\}} \Pi = p_A^{\alpha} p_B^{\frac{(1-\alpha)n}{1+q}} - \frac{W_n}{n} - W_q q \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &s.a. \\ &q_t \geq 0 \\ &n > 0 \end{aligned}$$

Una restricción adicional aparece con el precio de la tecnología (W_q), ya que para que una escuela se decida a reeducar empleando q es necesario que el beneficio obtenido con reeducación sea estrictamente mayor al obtenido sin ella, tal que:

$$p_A^{\alpha n} p_B^{\frac{(1-\alpha)n}{1+q}} - \frac{W_n}{n_q} - W_q q > p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n} - \frac{W_n}{n}, \quad \text{con } n_q > n \tag{11'}$$

Para que esto ocurra, el producto educativo, $p_A^{\alpha n} p_B^{\frac{(1-\alpha)n}{1+q}}$, debe aumentar lo suficiente para que la mayor disposición a pagar de los alumnos y el incremento en el número de alumnos óptimos por clase, de n a n_q, más que compense el gasto adicional de incluir tecnología, $W_q q$.

Cuando la tecnología es focalizada el problema se diferencia del modelo base cuando el precio W_q es tal que la escuela escoge $q>0$. Pero, como se verá a continuación, la estructura del problema se mantiene. Si el nivel reeducado con que los alumnos *tipo B* se comportan en las salas

dado por la semejanza entre los estudiantes y el ajuste del profesor a los requerimientos homogéneos de sus alumnos. Cuando la tecnología disponible para los profesores es de reeducación, la combinación (*match*) más productiva se da entre alumnos disruptivos y dicha tecnología.

de clases agrupadas o mezcladas (p'_B) es distinto al que presentan sin reeducación, el problema planteado por Lazear no cambia en absoluto. Es el mismo problema con un nivel distinto para p_B, incluso si p'_B es mayor que p_A:

$$p_B < p_B^{\frac{1}{1+q}} = p'_B \quad (12)$$

El problema queda igual al planteado en la ecuación (13):

$$dif = \alpha p_A^n + (1-\alpha)p'^n_B - p_A^{\alpha n} p'^{(1-\alpha)n}_B > 0 \quad (13)$$

Por lo tanto se obtiene el mismo resultado: el producto es siempre mayor cuando se segrega por tipo

En acuerdo con la teoría *matching*, que señala que hay combinaciones de factores más productivas que otras, una tecnología que mejora el comportamiento en la sala de clases es más valiosa en algunos grupos de estudiantes que en otros. Esta tecnología produce más valor en un grupo que potencialmente tiene un comportamiento disruptivo que en otro donde la probabilidad de interrupción es baja. Luego –como además se comprueba que aplicando esta tecnología sigue siendo cierto que agrupar por tipo es óptimo–, se concluye que un sistema educacional produce el mayor producto agregado cuando los alumnos se agrupan por tipo y los de tipo bajo son tratados por profesores con tecnología especializada.

3.2.2 Optimización con tecnología general

El problema de la maximización con tecnología general no se diferencia mucho del problema del modelo base dado que no hay un precio para la tecnología, y ésta se aplica a todo el curso por igual. Con el precio del producto (*V*) normalizado a 1, el problema de maximización de la función de beneficios queda:

$$\max_n \Pi = P^{\frac{n}{1+\bar{q}}} - \frac{W_n}{n} \quad (14)$$

s.a.

$n > 0$

P puede corresponder a un curso con alumnos de un tipo o dos. Si es el último caso entonces $P = p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)}$. La tecnología general tiene un límite en su efectividad y además está fija $q = \overline{q}$.

Si todos los profesores dispusieran de esta tecnología sería equivalente a trabajar con una población de dos tipos (*A* y *B*), pero en un nivel más alto cada uno. Sólo se produciría un cambio de escala. Un escenario así no modifica los resultados obtenidos anteriormente ni aporta una nueva perspectiva.

Si los profesores con tecnología son escasos, en cambio, se produce una restricción adicional. Cuando se intenta hacer prevalecer el resultado óptimo, agrupando a los alumnos por tipo, no hay suficientes profesores con tecnología para asistir a todos los cursos. Esto genera un nuevo problema de optimización donde se debe comparar el resultado del producto en dos escenarios:

1. Segregando a los alumnos, asignando los profesores con tecnología donde son más productivos, esto es, comenzando con las clases con alumnos *tipo B*

2. Mezclando a todos los alumnos en cursos más grandes, asignando a todos ellos profesores con tecnología.

Lo que se comprueba[17] es que, en presencia de una restricción en la cantidad de profesores con tecnología general, el resultado es ambiguo y se abre la posibilidad de que sea más eficiente asignar estos docentes a grupos de alumnos mezclados. Para que mezclar genere más producto agregado que agrupar han de cumplirse dos requisitos:

1. Los dos niveles de alumnos deben estar suficientemente cerca (γ suficientemente alto)

2. Debe haber suficiente tecnología disponible para que el incremento en el producto de los alumnos mezclados más que compense el resultado dominante de las clases segregadas.

El primer requisito apunta a que, a pesar de que el resultado dominante no se cumple, se sigue respetando el que los alumnos se benefician de estar con similares, aunque ya no iguales. Debido a la poca varianza, el grupo no es lo suficientemente heterogéneo como para que sea óptimo separarlos, y asignar los profesores con tecnología general a uno de los cursos. Por el contrario, si la varianza es grande será preferible separar a los alumnos por tipo y asignar a los profesores con

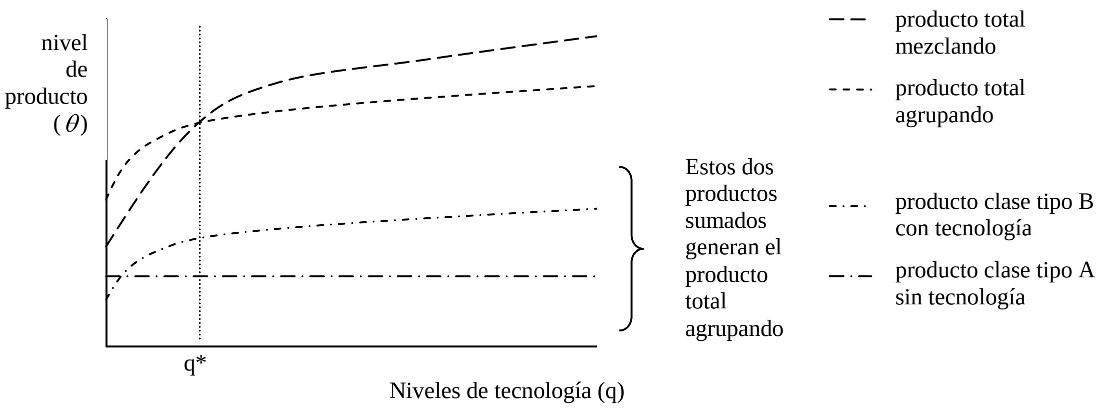
[17] En Apéndice matemático VIII

tecnología donde se sabe que son más productivos y se obtiene el mejor *match* (la mejor combinación profesor-alumno) esto es, con los alumnos de tipo bajo,

Respecto del segundo requisito, existe un nivel crítico de tecnología general q^* a partir del cual mezclar genera más producto agregado que agrupar. Como se señaló anteriormente, una característica de la tecnología general es que está fija en $\overline{q}$ para los profesores que disponen de ella. Por lo tanto, para que se cumpla este requisito, $\overline{q}$ debe ser mayor que q^*.

El Gráfico 2 ilustra este caso particular:

<u>Gráfico 2</u>
Comparación del producto resultante
en el caso de tecnología general y escasez de profesores



Para niveles bajos de tecnología el producto de las clases mezcladas es inferior al de las clases agrupadas por tipo, pero la productividad marginal es mayor, por lo que a partir de un q* el producto de las clases mixtas domina. Para que esto ocurra $\overline{q}$ (no graficado), debe estar a la derecha de q*. Si γ no es suficientemente alto[18], la tecnología q^* necesaria para contrarrestar la heterogeneidad del grupo va a ser mayor que la tecnología $\overline{q}$ disponible y mezclar será, como en los otros casos, menos eficiente que agrupar.

[18] Y por lo tanto la varianza es suficientemente grande

4. Una mirada a políticas recurrentes

A lo largo de este trabajo se comprueba como, para distintos casos (en ausencia de tecnología, en presencia de tecnología especializada y focalizada o de tecnología general insuficiente), la composición óptima de las salas de clases es agrupando a los alumnos por tipo. Pero un alumno de tipo disruptivo sin una tecnología que mejore su realización en la sala de clases, obtiene resultados pobres cuando se educa en un grupo con características similares. Esto genera una distribución no equitativa del producto educacional ya que los alumnos *tipo B* se perjudican en favor de un mayor producto agregado.

En esta sección se discuten dos políticas recurrentes al momento de intentar reparar este efecto sobre el producto educativo de los alumnos *tipo B*:

1. Imponer una composición de alumnos mezclada, que es menos eficiente pero más equitativa. En este caso ¿cómo se ve afectado el producto agregado?

2. Disminuir el número de alumnos en las clases donde hay alumnos *tipo B*. ¿en qué contexto es menos costoso aplicar esta estrategia, en clases agrupadas o mezcladas?¿cómo se compara esta estrategia con otras en términos de una minimiza los costos?

4.1 La regla de composición mixta

En esta sección se comparan los resultados de las escuelas enfrentadas a la restricción de ser mixtas con algún nivel de α y $1-\alpha$. La restricción puede obligar a que la composición de la escuela refleje la distribución poblacional ($\alpha = \overline{\alpha}^{pobl}$), representando a cada tipo de alumno según su presencia en la población, o puede obligar a sub-representar o sobre-representar a los alumnos de tipo más bajo ($\alpha > \overline{\alpha}^{pobl}$ ó $\alpha < \overline{\alpha}^{pobl}$ respectivamente). Todas estas situaciones pueden ocurrir simultáneamente a nivel agregado ya que las distintas localidades afectadas por una única norma no son necesariamente idénticas. Para simplificar el análisis se toma el caso sin tecnología.

Estos resultados tienen dos niveles. El primer nivel es lo que ocurre entre las escuelas si suponemos que cada una tiene un curso. En este caso el producto educativo individual y el agregado se ven afectados. Si el número de profesores no está fijo también se modifican los costos. El segundo nivel de decisión es al interior de la escuela. Si éstas tienen más de un curso por nivel las escuelas pueden distribuir las clases de la manera que más les favorezca para maximizar el producto y/o los beneficios.

Sabemos que el producto agregado es siempre mayor en un sistema donde los alumnos se agrupan por tipo. Si se impone una restricción sobre la composición de la escuela para que ésta sea mixta, las únicas afectadas son las que tienen un curso por nivel. Su producto agregado se deteriora especialmente si la restricción significa incorporar a los alumnos de tipo bajo en igual o mayor porcentaje que el de la población. Las otras escuelas, con dos o más cursos por nivel maximizan el producto distribuyendo a sus alumnos en clases de modo que éstos queden agrupados por tipo.

Cuando se mezclan alumnos de distinto tipo los resultados son equivalentes a los que se obtendría analizando un grupo homogéneo de tipo intermedio. En este modelo el determinante de primer orden del producto educativo individual es la media geométrica ponderada de la clase y la varianza no juega ningún papel. En este sentido el análisis no presenta sorpresas al calcular los resultados finales. A mayor porcentaje de alumnos *tipo B* menor el producto individual, y cada resultado que se desprende es proporcional a ese producto, sin importar si proviene de alumnos iguales o distintos. El único efecto ocurre en el producto agregado ya que si la población es homogénea la decisión de mezclar o segregar es irrelevante, en cambio en presencia de heterogeneidad segregar por tipo eleva el producto. Esto es distinto al comportamiento de un modelo lineal en medias, donde en el agregado separar por tipo o mezclar produce exactamente el mismo producto.

Comparando resultados entre escuelas

Existe un *benchmark* contra el cual comparar los resultados obtenidos al imponer la restricción de mezclar alumnos. Este resultado es el que obtendrían las escuelas agrupadas por tipo con el número óptimo de alumnos por clase (definido según modelo Lazear desarrollado anteriormente). La Tabla 2[19] corresponde a este *benchmark*.

<u>Restricción 1-a (Tabla 3)</u>:
<u>Nadie escoge, ni los alumnos ni las escuelas, y la asignación es por sorteo.</u>
<u>Se puede reducir el número de alumnos por clases y contratar más profesores.</u>

Este caso es el de la escuela mixta donde $\alpha = \overline{\alpha}^{pobl}$. El porcentaje de alumnos *tipo B* en cada sala es $(1-\alpha)$ igual al de la población $(1-\overline{\alpha}^{pobl})$. Hay que recordar que en el óptimo: $n_B^* < n_M^* < n_A^*$ y $p_B^{n_B} < p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} < p_A^{n_A}$, es decir, mientras menor es la media geométrica del curso el número

[19] En Apéndice matemático IX

óptimo de alumnos es menor y el producto individual, a pesar de esta corrección, también es menor. Los resultados están resumidos en la Tabla 3[20].

Restricción 1-b (Tabla 4):
Nadie escoge, ni los alumnos ni las escuelas, y la asignación es por sorteo.
El número de alumnos por clase no se puede ajustar ya que el número de profesores está fijo

$\overline{n}$: número de alumnos por clase mixta que mantiene el mismo número de profesores en sus puestos que habría en el sistema es de clases agrupadas por tipo.
n_M: número de alumnos en la clase mixta (variable a optimizar).

El problema es:

$$\max_{\{n_M\}} \Pi = (p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)})^{n_M} - \tfrac{W}{n_M}$$
$$s.a.: n_M \geq \overline{n}$$

La restricción está dada porque los cursos mixtos no pueden ser de menor tamaño que $\overline{n}$ ya que no hay más profesores disponibles. Se debe resolver:

$$\underset{\{n_M\}}{L} = (p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)})^{n_M} - \tfrac{W}{n} + \lambda(n_M - \overline{n})$$

$$[n_M]: \ln(p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)})(p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)})^{n_M} + \tfrac{W}{n_M^2} + \lambda \leq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial n_M} n_M = 0 \tag{15}$$

$$[\lambda]: n_M - \overline{n} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = 0 \tag{15'}$$

Si en (15') la restricción está activa ($\lambda > 0$), entonces $n_M = \overline{n}$. Al compara este resultado con el que se obtendría pudiendo contratar más profesores, se aprecia que el producto y los beneficios disminuyen, aunque los costos también son menores. Los resultados se resumen en la Tabla 4[21].

En conclusión, el producto agregado siempre disminuye cuando se incorpora una restricción. Disminuye cuando las clases pasan de agrupadas por tipo a mixtas, y disminuye aún más si no es posible optimizar el número de alumnos por sala debido a una rigidez en el número de profesores a contratar. El costo puede que se mantenga, disminuya o aumente, todo dependerá del número de alumnos en las clases mixtas. A pesar de esto, los beneficios agregados disminuyen en todos

[20] En Apéndice matemático X
[21] En Apéndice matemático XI

los casos, primero respecto de los beneficios agregados que se obtienen con clases segregadas y luego aún más si no se pueden contratar más profesores para ajustar el número de alumnos al óptimo dado el tipo medio de la clase mixta.

<u>Restricción 2 (Tabla 5)</u>:
<u>Las escuelas deben incluir un porcentaje de *tipo B* y este porcentaje es mayor (Restricción 2-a) o menor (Restricción 2-b) que el de la población local</u>

Para que las clases contengan un porcentaje mayor de alumnos *tipo B* (Restricción 2-a), deben quedar alumnos *tipo A* solos. Para que la clase contengan un porcentaje menor (Restricción 2-b), deben quedar *tipos B* solos. En el caso 2-a los alumnos *tipo A* no pueden quedar solos por lo que, a menos que se retiren del sistema o rompan la ley, deben incorporarse a las clases mixtas reconstruyendo a la distribución de la población; esta situación es idéntica a la de la Restricción 1-a ó 1-b.

En el caso 2-b hay un escenario híbrido, con clases *tipo B* y clases mixtas de tipo medio que es más alto que en las clases *tipo B* pero inferior a una clase *tipo A*. En cada caso se puede o no optimizar el número de alumnos en sala dependiendo del número de profesores disponibles. Se analiza el caso en que *n* puede ajustarse sabiendo que cuando no es posible reducir el número de alumnos al óptimo por falta de profesores el producto se deteriora.

$\overline{N}$ es el total de alumnos en el sistema, por lo que $\alpha\overline{N} = \overline{N}_A$ es el número total de alumnos *tipo A* y $(1-\alpha)\overline{N} = \overline{N}_B$, el número de alumnos *tipo B*. Si la restricción impone que en las escuelas debe incorporarse un porcentaje δ de alumnos *tipo B* con $\delta < 1$, entonces en el total de escuelas *tipo B* habrá $(1-\delta)\overline{N}_B = (1-\delta)(1-\alpha)\overline{N}$ alumnos, y en el total de las escuelas mixtas habrá $\delta\overline{N}_B + \overline{N}_A = (\delta(1-\alpha)+\alpha)\overline{N}$ alumnos.

Al interior de las escuelas mixtas los porcentajes de alumnos *tipo A* y *tipo B* se definen respectivamente como β y $1-\beta$:

$$\text{porcentaje } \textit{tipo A} \text{ en escuela mixta} = \beta \equiv \frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha} \geq \alpha \tag{16}$$

$$\text{porcentaje } \textit{tipo B} \text{ en escuela mixta} = 1-\beta \equiv \frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha} \leq (1-\alpha) \tag{16'}$$

Cuando $\delta = 1$ entonces $\beta = \alpha$ y es el caso de la Restricción 1. Los resultados para $\delta < 1$ son intermedios entre un sistema segregado y uno mixto (con $\beta = \alpha$) y se resumen en la Tabla 5[22].

Con la Restricción 2 se obtienen nuevos resultados sólo cuando se impone que los alumnos de tipo bajo se incorporen a las escuelas en un porcentaje inferior al de la población. Esto genera un sistema híbrido, con algunas clases mixtas y otras *tipo B*. Los resultados son intermedios entre un sistema segregado y uno mixto. El producto total y los beneficios totales son intermedios, aunque los costos dependen de cuán cerca está la cantidad de alumnos en una clase mixta a la cantidad que hay en una clase *tipo A* o *tipo B.* En términos del producto individual, los alumnos *tipo A* en una clase mixta en sistema híbrido obtienen un producto mayor al que obtendrían en una clase mixta en sistema mixto.

Decisiones al interior de la escuela

Los resultado anteriores se aplican solamente para escuelas con una sola clase por nivel. Cuando es posible tomar decisiones respecto de cómo distribuir a los alumnos al interior de las escuelas, éstas se toman maximizando el producto educativo. Lo óptimo, al igual que en el nivel agregado, es separar a los alumnos por tipo. Si alumnos distintos reciben distinto producto en una misma escuela ¿cuál es el precio que se cobra? es igual para todos? Sin entrar en mayores análisis, si todos los alumnos pagan lo mismo, pero los alumnos *tipo A* reciben más producto educativo porque se les ubica en clases segregadas, la situación es equivalente a que estos últimos reciban un descuento.

Las escuelas con una sola clase son las que asumen la restricción y la pérdida de producto y las escuelas con más de una clase hacen *tracking* separando a los alumnos por tipo. Las escuelas que pretendan maximizar el producto, para protegerse de una (eventual) restricción, pueden decidir tener más de una clase por nivel. En cambio pueden haber escuelas muy pequeñas con pocos alumnos que se especialicen en los de tipo bajo.

4.2 Más profesores[23]

Si se propone disminuir el número de alumnos en las clases donde hay alumnos *tipo B* ¿en qué contexto es menos costoso aplicar esta estrategia, en clases agrupadas o mezcladas? ¿cómo se compara esta estrategia con otra que considera el uso óptimo de tecnología? Para la primera pregunta, se analiza el caso con $q=0$, ya que con tecnología los resultados son ambiguos. En la segunda se considera tecnología especializada, ya que, como se discutió anteriormente, con

[22] En Apéndice matemático XII
[23] Desarrollo en Apéndice matemático XIII

tecnología general el problema no difiere del problema base salvo cuando los profesores con tecnología escasean, lo que es más complejo de costear.

La estrategia de disminuir el número de alumnos por clase
Se propone aumentar el producto de los alumnos *tipo B* a un nivel *p**, por definir, disminuyendo el número de alumnos en las salas donde ellos asisten. Se llamará *Estrategia N*.

En un sistema segregado esto significa sólo disminuir el tamaño en las clases *tipo B*; en un sistema mixto, se debe disminuir el número de alumnos en todas las clases con lo que de paso se mejora el producto educativo de los alumnos *tipo A*. De esta manera, los alumnos que resintieron su producto por estar mezclados, ahora lo pueden recuperar parcial o totalmente.

Esta última situación permite intuir el resultado. Si, por ejemplo, el objetivo es que los alumnos *tipo B* obtengan el producto que alcanzarían en un sistema mixto, evidentemente alcanzarlo sólo implica un costo dentro del sistema segregado. Un sistema mixto permitirá que este propósito se logre en forma "gratuita" a costa del producto de los alumnos *tipo A*. Como se cuantificó en el punto anterior, además hay pérdidas en el producto agregado y en los beneficios totales al imponer la restricción de mezclar a los alumnos. Sin embargo, los costos para lograr el objetivo educacional del ejemplo son menores en el sistema mixto.

En el caso general[24]:

1. Al comparar el costo de aplicar la *Estrategia N* en clases agrupadas y en clases mixtas, lo que define el escenario menos costoso es el nivel de *p** que se pretende alcanzar. Si el objetivo es que los alumnos *tipo B* obtengan el mismo producto educativo que los alumnos *tipo A* cuando estos últimos están segregados –lo que denominaremos el *objetivo ambicioso*–, el costo en ambos sistemas es el mismo. Sin embargo, con el *objetivo realista* de que los alumnos *tipo B* obtengan un producto inferior al de los alumnos *tipo A*, pero de todos modos superior al que obtendrían en clases segregadas *tipo B*, el costo es menor en el sistema mixto.

Cuando el objetivo es ambicioso, al aplicar la estrategia de disminuir el número de alumnos por debajo del óptimo en las salas con alumnos *tipo B*, el beneficio agregado resultante es el mismo

[24] Las demostraciones se encuentran en el Apéndice matemático XIII

en los dos sistemas –mixto o segregado– ya que tanto el producto final agregado como el costo son iguales en los dos casos. [25] En cambio:

2. Al aplicar la *Estrategia N* en el sistema mixto con *objetivo realista*, el beneficio total es inferior al que se obtiene en el sistema segregado, ya que los alumnos *tipo A* logran un producto menor en el sistema mixto y esta caída no es compensada por el menor costo total.

Comparándola con una estrategia de minimización de costos.
En este caso, se propone aumentar el producto de los alumnos *tipo B* a un nivel *p**, por definir, escogiendo *n** y *q** a partir de un problema de minimización de costos. Se llamará *Estrategia C*.

Nuevamente el costo por sistema depende del objetivo:

1. Con el *objetivo ambicioso* de que los alumnos *tipo B* obtengan el mismo producto que los alumnos *tipo A* en clases segregadas, el costo es igual en ambos escenarios. Con el *objetivo realista*, es menos costoso lograrlo en un escenario de clases mixtas.

Cuando el objetivo es ambicioso, al aplicar la estrategia de escoger la cantidad óptima de tecnología y el número óptimo de alumnos en las salas con alumnos *tipo B* a partir de una minimización de costos, el beneficio agregado resultante es el mismo en los dos sistemas –mixto o segregado– ya que tanto el producto final agregado como el costo total son iguales en los dos casos. [26] En cambio:

2. Al aplicar la *Estrategia C* en el sistema mixto con *objetivo realista*, el beneficio total es inferior al que se obtiene en el sistema segregado, ya que los alumnos *tipo A* logran un producto menor en el sistema mixto y esta caída no es compensada por el menor costo total.

3. Si se compara la *Estrategia C* con la *Estrategia N*, es siempre más barato obtener un resultado educativo, ya sea realista o ambicioso, solucionando un problema de minimización de costos que imponiendo una restricción a *n*. Esto está sujeto a que los precios relativos de los factores permitan una solución interior para la tecnología ($q^*>0$) y a que $W_q \neq W_n \ln(p_B)/n_A \ln(p_A)$.

---

[25] El producto total es $\overline{N}p_A^{n_A}$ y el costo total es $\frac{W_n\overline{N}_A}{n_A}+\frac{W_n\overline{N}_B\ln(p_B)}{n_A\ln(p_A)}$ en los dos sistemas.

[26] El producto total es $\overline{N}p_A^{n_A}$ y el costo total es $\frac{W_n\overline{N}_A}{n_A}+2\overline{N}_B\left(\frac{W_nW_q\ln(p_B)}{n_A\ln(p_A)}\right)^{\frac{1}{2}}-W_q\overline{N}_B$ en los dos sistemas.

5. Una mirada a los datos

En esta sección se describe brevemente la evidencia que podría haber a favor del modelo de Lazear (2001) en general. También alguna evidencia a favor de algunas predicciones del modelo extendido con tecnología.

Respecto del número óptimo

Para Chile hay evidencia de que cursos de mayor tamaño obtienen mejores resultados. Se clasifican 2.509 cursos 4º Básico de la Región Metropolitana[27] de los cuales 1.552 corresponden a escuelas Particulares Subvencionadas y 957 a escuelas Municipales. Se obtiene el siguiente patrón de resultados para la prueba SIMCE de Lenguaje:

Tabla 1a y 1b
Resultado prueba SIMCE para categorías de curso
por dependencia

PSUB (puntaje leng)

	cur1	cur2	cur3	cur4	cur5	cur6	cur7	cur8	cur12	cur
n1	250,8	0	0	0	0	0	0	0	0	250,8
n5	245,0	0	0	0	0	0	0	0	0	245,0
n10	239,7	0	0	0	0	0	0	0	0	239,7
n15	241,7	264,9	0	0	0	0	0	0	0	243,1
n20	256,4	253,9	269,8	0	284,6	0	0	0	0	255,9
n25	256,0	260,0	264,3	284,2	266,5	258,5	0	0	0	258,9
n30	250,1	264,6	270,1	267,1	256,8	235,8	262,7	0	253,1	261,3
n35	257,8	261,8	264,1	265,3	257,8	265,0	269,3	277,6	270,8	262,5
n40	260,7	272,7	276,0	270,2	264,2	270,8	272,1	285,7	257,1	270,5
n45	260,6	279,1	284,7	270,3	270,8	274,0	0	0	261,4	276,2
n	252,3	265,6	271,7	268,4	262,2	266,5	267,6	282,6	262,1	262,8

MUN (puntaje leng)

	cur1	cur2	cur3	cur4	cur5	cur6	cur7	cur8	cur12	cur
n1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
n5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
n10	222,3	0	0	0	0	0	0	0	0	222,3
n15	217,4	226,3	0	0	0	0	0	0	0	219,7
n20	227,5	237,0	239,5	223,1	0	0	0	0	0	234,1
n25	232,0	234,8	228,7	225,6	0	0	237,1	0	0	232,5
n30	238,3	242,5	240,1	237,5	0	0	249,0	0	0	241,0
n35	249,4	241,9	249,4	243,6	207,0	0	266,7	0	0	244,9
n40	241,4	243,9	251,7	246,8	229,1	0	267,7	0	0	246,6
n45	246,0	245,8	278,6	269,8	237,9	0	0	0	0	258,9
n	235,7	240,3	244,6	244,2	228,6	-	258,7	-	-	241,2

En la tabla, cada celda corresponde a un curso, no a un establecimiento. En el eje vertical se indica el número de alumnos en ese curso (por ejemplo, **n25** significa entre 21 y 25 niños). En el eje horizontal se indica el número de cursos en el nivel (por ejemplo, **cur5** significa que hay cinco 4º básicos en el establecimiento). Se puede apreciar que en los dos tipos de dependencia los resultados aumentan para cursos con mayor cantidad de alumnos, tal como predice la Proposición 2 del modelo de Lazear.

[27] Más información respecto de los datos en Apéndice matemático XIV-A

Mirando las tablas del Apéndice XIV, si se toma la educación promedio de la madre por curso [28] como variable aproximada del nivel de *p*, se aprecia que se corresponde exactamente, salvo algunas excepciones, con las variaciones en el puntaje promedio. Existe un grupo de escuelas PSUB con menos alumnos y mayor puntaje (categorías **n20-n30** y **cur3-cur5**) que son las que exigen mayor copago.[29] En general los cursos PSUB con más alumnos –que también tienen mayor puntaje– son los que cobran un copago promedio menor, lo que va a favor de la predicción del modelo que señala que los alumnos de mayor nivel de *p* tendrán un descuento. Lo tienen, porque es posible disminuir los costos de enseñanza con ellos ya que el salario de un profesor puede ser financiado con un grupo mayor de alumnos.

Respecto a la práctica de segregar o agrupar en las escuelas

Chile no tiene una política centralizada respecto de agrupar o mezclar alumnos, por lo que las decisiones de las escuelas debieran reflejar un proceso de optimización privado. Larrañaga (2005) calcula la gradiente socioeconómica intraescuela respecto del puntaje SIMCE y descubre que las escuelas Particulares Subvencionadas (PSUB) tienen una gradiente menor que las escuelas Municipalizadas (MUN), es decir, el efecto del nivel socioeconómico sobre el puntaje es menor dentro de las escuelas PSUB. La gradiente no está explicada por el nivel socioeconómico más homogéneo de las escuela sino al parecer porque las escuelas PSUB tienden a segregar menos por tipo al interior. En contraste, la gradiente interescuela es mayor. Esto significa que, bajo ciertas circunstancias, existe la opción de mezclar a los alumnos como práctica óptima de las escuelas. En particular se cumple en las constataciones de Larrañaga (2005) que la varianza al interior de las escuelas PSUB es menor, y hay evidencia indirecta de que el plantel de profesores en las escuelas PSUB es de mejor calidad ya que no está restringida por el Estatuto Docente, como sí lo están los planteles de profesores de las escuelas MUN.

Hoxby y Weingarth (2005) concluyen que la composición de clases óptima para el producto educacional de los alumnos es una de *Boutique*, donde los alumnos no se diferencian demasiado entre ellos en su calidad inicial. No es necesario que sea estrictamente homogénea, pero sí que haya continuidad de tipos. Por el contrario, una bimodalidad en la distribución, con dos focos de alumnos muy distintos entre sí es perjudicial. Al igual que en el caso para Chile, esto es consistente con lo que predice el modelo de este trabajo respecto de que la composición óptima es mezclar alumnos, cuando hay tecnología general, escasez de profesores y poca diferencia de nivel entre los estudiantes.

[28] Tabla en Apéndice matemático XIV-B
[29] Tabla en Apéndice matemático XIV-C

6. Conclusión

En este trabajo se buscó predecir las decisiones que toma una escuela que pretende maximizar el producto educacional, en relación al ratio óptimo profesor-alumno y la composición óptima de alumnos en las clases. El ratio óptimo es un factor de la función de producción propuesta originalmente por Lazear (2001). También es la variable a optimizar en la función de beneficios que propone, aunque expresada como el número óptimo de alumnos por sala (n).

Respecto del número óptimo de alumnos por sala, no se hicieron mayores innovaciones a la propuesta de Lazear, pero se profundizó en el comportamiento de la función de producción definiendo una forma funcional general donde el nivel medio de los alumnos de una clase sintetizó todos los resultados que se pueden encontrar con un tipo de alumno o con dos. Se comprobó que en este modelo la varianza al interior del curso es irrelevante para predecir resultados ya que la distribución de calidad de los alumnos queda perfectamente representada por la media geométrica. Por este motivo, la escuela siempre seguirá la misma regla respecto del número óptimo de alumnos independiente si el curso es de un tipo de alumno o más. Sin embargo, los estudiantes que conforman la clase sí requieren conocer tanto el *nivel medio* de la clase, como el *porcentaje* de tipos altos y bajos y la *distancia* entre los tipos, ya que estos parámetros afectan la decisión que toman respecto al grupo en que se auto seleccionan.

La varianza tomó un papel relevante para la escuela al momento decidir la composición óptima de los cursos, es decir, cómo son asignados los alumnos en las distintas salas una vez que ingresan a la escuela. Ésta debe decidir si agrupar a los alumnos por tipo o mezclarlos, lo que genera resultados agregados distintos cuando hay dos tipos de alumno. Además el resultado se ve afectado por el grado en que estos alumnos son distintos o similares entre sí. Con la forma funcional del modelo base, el resultado que siempre dominó fue que el producto agregado se maximiza cuando los alumnos se agrupan por tipo, por lo que las escuelas privadas escogerán segregar a sus alumnos en cursos según el tipo. Con la extensión que se hizo al modelo, sin embargo, este resultado se volvió ambiguo.

La extensión propuesta incorporó un nuevo factor en la función de producción: una tecnología que modificaba la realización del tipo en la sala de clases. Esta tecnología de reeducación podía aplicarse de manera general o específicamente en los alumnos de tipo bajo donde era más productiva. Como se señaló más arriba, en presencia de tecnología la regla de decisión respecto del número óptimo no cambió, pero se volvió ambigua la dominancia de la segregación como estrategia óptima. Con tecnología especializada, o con tecnología general y varianza entre los alumnos suficientemente alta, el resultado que dominó fue que era óptimo agrupar por tipo y combinar (*match*) la tecnología de reeducación con alumnos de tipo bajo. Sin embargo, cuando la tecnología era general y no especializada, había escasez de profesores que la aplicaban y la varianza entre los alumnos era suficientemente pequeña, se dio la posibilidad de que mezclar fuese preferible a agrupar. Una mirada a los datos disponibles para Chile nos indicaron que esta última descripción podría retratar el caso de las escuelas Particulares Subvencionadas.

Finalmente, se evaluaron dos intervenciones de política pública frecuentemente invocadas para mejorar el producto educativo de algunos sectores: mezclar alumnos de tipo alto y bajo, y disminuir el número de alumnos por sala. Se concluyó que, en ausencia de tecnología, al mezclar alumnos por tipo siempre hay una pérdida en el agregado, tanto del producto educativo como de los beneficios. Aunque estas pérdidas se cuantificaron, queda pendiente identificar cómo se distribuyen los beneficios de modo de evaluar quiénes se ven más afectados por la restricción. Además, se concluyó que es más costoso lograr objetivos educacionales si sólo se disminuye el número de alumnos por clase que si se optimiza tanto el ratio profesor-alumno como el nivel de tecnología. Por último, se comprobó que –con objetivos de política realistas– el costo es menor al aplicar políticas para mejorar el producto en un contexto de clases mixtas que segregadas; pero, también, que esto no compensa la disminución en el producto, por lo que el beneficio total es siempre mayor cuando las estrategias de intervención se aplican en un sistema segregado.

Bibliografía

Aaltonen, Juho, Tanja Kirjavainen y Antti Moisio (2006) “Efficiency and Productivity in Finnish Comprehensive Schooling: 1998-2004”, Government Institute of Economic Research, Helsinki.

Brighouse, Tim (2002) “The Caroline Benn, Brian Simon Memorial Lecture Part 2: Comprehensive Schools Then, Now and in the Future” Chief Education Officer Birmingham

Brunello, Giorgio y Daniele Checchi (2006) “Does School Tracking Affect Equality of Opportunity? New International Evidence” IZA DP No. 2348

Entorf, Horst y Martina Lauk (2006) “Peer Effects, Social Multipliers and Migrants at School: An International Comparison” Darmstadt University of Technology, Institute for the Study of Labor (IZA), Discussion Paper Nº 2182

Gallego, Francisco (2002), “Competencia y resultados educativos: teoría y evidencia para Chile”, Cuadernos de Economía 39(118): 309-352.

Gamoran, Adam y Robert Mare (1989) “Secondary School Tracking and Educational Inequality: Compensation, Reinforcement, or Neutrality?” The American Journal of Sociology, Vol. 94, Nº 5: 1146-1183.

Hanushek, E. (1996) “School Resources and Student Performance” en Does Money Matter, editado por Gary Burtless, Brookings Institution Press

Hanushek, Eric y Ludger Wößmann (2005) “Does Educational Tracking Affect Performance and Inequality? Differences-in-Differences Evidence across Countries” CESifo Working Paper Series Nº 1415; NBER Working Paper Nº 11124

Hidalgo-Hidalgo, Marisa (2006) “Peer Effects in Education: Tracking vs. Mixing” University of Alicante

Hoxby, Caroline M. y Gretchen Weingarth (2005) “Taking Race Out of the Equation: School Reassignment and the Structure of Peer Effects”, Department of Economics, Harvard University, Cambridge, unpublished manuscript

Kang, Changhui (2007) “Classroom Peer Effects and Academic Achievement: Quasi-Randomization Evidence from South Korea” Journal of Urban Economics, Vol 61, Nº 3: 458-495

Larrañaga, Osvaldo (2005) “Socio-economic Differences in the Achievement Gap Between Public and Private Subsidized Education in Chile” Documento de Trabajo

Lazear, Edward P. (2001) “Educational Production” The Quarterly Journal of Economics, Vol CXVI: 777-803

Jovanovic, Boyan (1979) “Job Matching and the Theory of Turnover”, Journal of Political Economy 87: 1246-1260

Mortensen, Dale T. y Christopher A. Pissarides (1994) “Job Creation and Job Destruction in the Theory of Unemployment” The Review of Economic Studies, Vol 61, Nº 3: 397-415

Rivkin, S., E. Hanushek y J. Kain (2005) “Teachers, Schools and Academic Achievement”, Econometrica, Econometric Society, Vol 73(2): 417:458

Rockoff, J. (2004) “The Impact of Individual Teachers on Student Achievement: Evidence from Panel Data”, American Economic Review 94(2): 247-252

Sapelli, Claudio (2003) “The Chilean Voucher System: Some New Results and Research Challenges” Cuadernos de Economía 40(121): 530-538

Tach, Laura Marie y George Farkas (2006) “Learning-related Behaviors, Cognitive Skills, and Ability Grouping when Schooling Begins” Social Science Research 35: 1048–1079

Todd, Petra y Kenneth Wolpin (2003) “On the Specification and Estimation of the Production Function for Cognitive Achievement” The Economic Journal Nº 113: F3-F33

Apéndice matemático

Índice del apéndice matemático

I

Efecto de variar el tamaño del curso sobre el producto[30]

Cuando un grupo varía su tamaño se observa un efecto (*E*) sobre el producto. Este efecto es mayor para las clases con menor nivel ($\partial E / \partial P < 0$) y con mayor número de alumnos ($\partial E / \partial n > 0$). El porcentaje en que aumenta el producto individual al disminuir el número de alumnos de *nk* a *n* con *k >1* es:

$$(p^n - p^{nk}) / p^{nk} = p^{n(1-k)} - 1 \equiv E > 0$$

De donde se obtiene:

$\dfrac{\partial E}{\partial p} = n(1-k)p^{n(1-k)-1} < 0$	mayor efecto para clases con menor *p*
$\dfrac{\partial E}{\partial n} = (1-k)\ln(p)p^{n(1-k)} > 0$	mayor efecto para clases con mayor número de alumnos

[30] Basado en Lazear (2001) p 786

II
Características de la función de producción

La función de producción educativa expresada de manera general tiene la siguiente forma:

$$\theta \equiv P^{\frac{n}{1+q}}$$

donde:

> P = media geométrica de la clase (compuesta de un tipo de alumno o más).
> n = número de alumnos en la clase; es el inverso del ratio profesor– alumno (*1/n*)
> q = cantidad de tecnología

Para simplificar el análisis de la productividad de los factores, se crean dos variables auxiliares:

> $N = 1/n$
> $Q = 1 + q$

de modo que la función de producción se pueda rescribir:

$$\theta \equiv P^{\frac{1}{NQ}}$$

De esta manera <u>más</u> de cualquier insumo significa <u>más</u> producto: si aumenta P, N o Q se produce más θ.

Productividad marginal de N

$$\frac{\partial\theta}{\partial N} = -\frac{\ln(P)\cdot P^{\frac{1}{NQ}}}{N^2 Q} = -\frac{n^2\ln(P)\cdot P^{\frac{n}{1+q}}}{1+q} > 0$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial N^2} = \frac{\ln(P)\cdot P^{\frac{1}{NQ}}}{N^3 Q}\left(2+\frac{\ln(P)}{NQ}\right) = \frac{n^3\ln(P)\cdot P^{\frac{n}{1+q}}}{1+q}\left(2+\frac{n\ln(P)}{1+q}\right) \gtrless 0$$

La función de producción es cóncava o convexa en N (tiene rendimientos decrecientes o crecientes a escala en el factor N) dependiendo del signo de $2(1+q)+n\ln(P)$:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial N^2}\begin{cases} > 0 \text{ si } 2(1+q)+n\ln(P) < 0 & \text{rend. crecientes} \\ < 0 \text{ si } 2(1+q)+n\ln(P) > 0 & \text{rend. decrecientes}\end{cases}$$

Productividad marginal de Q

$$\frac{\partial\theta}{\partial Q} = -\frac{\ln(P)\cdot P^{\frac{1}{NQ}}}{NQ^2} = -\frac{n\ln(P)\cdot P^{\frac{n}{1+q}}}{(1+q)^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Q^2} = \frac{\ln(P)\cdot P^{\frac{1}{NQ}}}{NQ^3}\left(2+\frac{\ln(P)}{NQ}\right) = \frac{n\ln(P)\cdot P^{\frac{n}{1+q}}}{(1+q)^3}\left(2+\frac{n\ln(P)}{1+q}\right) \gtrless 0$$

Al igual que en el caso con *N*, la función de producción es cóncava o convexa en *Q* (tiene rendimientos decrecientes o crecientes a escala en el factor *Q*) dependiendo del signo de $2(1+q)+n\ln(P)$:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Q^2}\begin{cases} >0 \text{ si } 2(1+q)+n\ln(P)<0 & \text{rend. crecientes} \\ <0 \text{ si } 2(1+q)+n\ln(P)>0 & \text{rend. decrecientes} \end{cases}$$

Relación entre los factores

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial N\partial Q}=\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{N^2Q^2}\left(1+\frac{\ln(P)}{NQ}\right)=\frac{n^2\ln(P)P^{\frac{n}{1+q}}}{(1+q)^2}\left(1+\frac{n\ln(P)}{1+q}\right)\gtrless 0$$

N y *Q* son complementarios o sustitutos en la producción (q-complementarios o q-anticomplementarios) dependiendo del signo de $1+q+n\ln(P)$:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial N\partial Q}\begin{cases} >0 \text{ si } 1+q+n\ln(P)<0 & \text{q}-\text{complementarios} \\ <0 \text{ si } 1+q+n\ln(P)>0 & \text{q}-\text{anticomplementarios} \end{cases}$$

<u>Relación de los factores con *P*</u>
El nivel medio de los alumnos de la clase (*P*) se toma como dado. Sin embargo, aunque no es una variable de decisión dentro del problema de maximización de la escuela, también es un insumo de la función de producción. Se describe para qué niveles de *P* son más productivos los factores *N* y *Q*:

Respecto de N

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial N\partial P}=\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{N^2Q^2}\left(1+\frac{\ln(P)}{NQ}\right)=\frac{n^2\ln(P)P^{\frac{n}{1+q}}}{(1+q)^2}\left(1+\frac{n\ln(P)}{1+q}\right)\gtrless 0$$

Respecto de Q

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Q\partial P}=-\frac{P^{\frac{1}{NQ}-1}}{NQ^2}\left(1+\frac{\ln(P)}{NQ}\right)=-\frac{nP^{\frac{n}{1+q}-1}}{(1+q)^2}\left(1+\frac{n\ln(P)}{1+q}\right)\gtrless 0$$

Tanto respecto de *N*, como respecto de *Q*, se repite la condición que define si la productividad marginal del factor es mayor para niveles altos o bajos de P: el signo de $1+q+n\ln(P)$. Esta condición es la misma que determina si los factores son complementos o sustitutos en la producción. Si *F* representa a *Q* o *N*:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial F\partial P}\begin{cases} >0 \text{ si } 1+q+n\ln(P)<0 & \text{factor más productivo para niveles altos de P} \\ <0 \text{ si } 1+q+n\ln(P)>0 & \text{factor más productivo para niveles bajos de P} \end{cases}$$

Clasificación de los segmentos de la función de producción

Lo anterior permite distinguir tres segmentos en la función de producción, dependiendo del signo (negativo o positivo) del resultado de distintas combinaciones de *P*, *N* y *Q* en $2(1+q)+n\ln(P)$ y $1+q+n\ln(P)$:

Segmento	I	II	III
$2(1+q)+n\ln(P)$	<0	>0	>0
$1+q+n\ln(P)$	<0	<0	>0
retornos a escala de N y Q	crecientes	decrecientes	decrecientes
relación entre N y Q en la producción	complementos	complementos	sustitutos
N y Q son más productivos para niveles de P …	altos	altos	bajos
clasificación en Tabla 1	*(min)*	*(–)*	*(+)*

En presencia de heterogeneidad

Todos los resultados se mantienen cuando existen dos tipos de alumnos ya que *P* representa la media geométrica del curso, independiente de la varianza. Cuando hay dos tipos de alumnos, p_A y p_B se deben hacer los siguientes reemplazos en el desarrollo previo:

$$P \equiv p_A^{\alpha} p_B^{1-\alpha}$$

$$\ln(P) = \alpha \ln(p_A) + (1-\alpha)\ln(p_B)$$

$$P^{\frac{1}{NQ}} \equiv (p_A^{\alpha} p_B^{1-\alpha})^{\frac{1}{NQ}} \equiv (p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n})^{\frac{1}{1+q}}$$

III
Cuasiconcavidad de la función de producción

Se comprueba que la función de producción propuesta es cuasicóncava. Empleando las mismas variables auxiliares del Apéndice I se reemplazan los resultados en la siguiente condición:

$$f_{NN}(f_Q)^2 - 2f_{NQ}f_N f_Q + f_{QQ}(f_N)^2 < 0$$

Para obtener:

$$\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{N^3Q}\left(2+\frac{\ln(P)}{NQ}\right)\left(-\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{NQ^2}\right)^2 - 2\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{N^2Q^2}\left(1+\frac{\ln(P)}{NQ}\right)\left(-\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{N^2Q}\right)\left(-\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{NQ^2}\right)$$
$$+\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{NQ^3}\left(2+\frac{\ln(P)}{NQ}\right)\left(-\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{N^2Q}\right)^2 < 0$$

Agrupando términos:

$$\frac{2(\ln(P))^3\left(P^{\frac{1}{NQ}}\right)^3(2QN+\ln(P))-(QN+\ln(P))}{Q^6N^6} = \frac{2(\ln(P))^3\left(P^{\frac{1}{NQ}}\right)^3}{Q^5N^5} < 0$$

La función de producción es cuasicóncava para cualquier nivel de los parámetros *N, Q* y *P*

IV

Maximización de beneficios

El signo de $2(1+q)+n\ln(P)$ determina si en la CPO se ha obtenido un máximo o un mínimo de la función objetivo. Empleando las mismas variables auxiliares del Apéndice I se rescribe la función de beneficios:

$$\max_{\{N,Q\}} \Pi = P^{\frac{1}{NQ}} - W_n N + W_q Q$$

$$\text{s.a. } Q \geq 1 \qquad N > 1$$

donde W_n y W_q son los precios de N y Q respectivamente. Se obtienen las CPO:

$$[N] : -\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{N^2 Q} - W_n = 0$$

$$[Q] : -\frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{NQ^2} - W_q = 0$$

De estas ecuaciones se obtiene la condición estándar:

$$\overset{TMST}{\frac{Q}{N}} = \overset{TMSM}{\frac{W_n}{W_q}}$$

CSO:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial N^2} = \frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{N^3 Q}\left(2 + \frac{\ln(P)}{NQ}\right) = \frac{n^3 \ln(P)P^{\frac{n}{1+q}}}{1+q}\left(2 + \frac{n\ln(P)}{1+q}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q^2} = \frac{\ln(P)P^{\frac{1}{NQ}}}{NQ^3}\left(2 + \frac{\ln(P)}{NQ}\right) = \frac{n\ln(P)P^{\frac{n}{1+q}}}{(1+q)^3}\left(2 + \frac{n\ln(P)}{1+q}\right)$$

En ambos casos, para que $N*$ y $Q*$ sean máximos debe cumplirse que $2(1+q)+n\ln(P)$

V

No es simétrico trasladar algunos alumnos *tipo A* a cursos *tipo B*, que incorporar alumnos *tipo B* en cursos *tipo A*. Esto se ilustra en el Gráfico 1. Hay mayor pérdida de producto agregado en el primer caso (traslado alumnos *tipo A* a cursos *tipo B*)

$$\underset{\textit{tipo B en clase A}}{\textit{Producto}} > \underset{\textit{tipo A en clase B}}{\textit{Producto}}$$

$$p_A^n p_B + p_B^{n-1} > p_A p_B^n + p_A^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow p_A^n p_B - \frac{p_A^n}{p_A} > p_A p_B^n - \frac{p_B^n}{p_B}$$

$$\Leftrightarrow p_A^n \left(p_B - \frac{1}{p_A} \right) > p_B^n \left(p_A - \frac{1}{p_B} \right)$$

$$\Leftrightarrow p_A^n \left(\frac{p_B p_A - 1}{p_A} \right) > p_B^n \left(\frac{p_A p_B - 1}{p_B} \right)$$

$$\Leftrightarrow p_A^{n-1} > p_B^{n-1}$$

VI

1. Las diferencias observadas en el producto de cursos de distinta varianza (distinto γ) son mayores cuando se comparan cursos con más alumnos y/o menor porcentaje de alumnos *tipo A*.

Sea $E(\gamma)$ el incremento porcentual en el producto cuando γ aumenta a $k\gamma$:

$$\frac{(P_A(k\gamma)^{(1-\alpha)})^{\frac{n}{1+q}} - (P_A\gamma^{(1-\alpha)})^{\frac{n}{1+q}}}{(P_A\gamma^{(1-\alpha)})^{\frac{n}{1+q}}} = k^{\frac{n(1-\alpha)}{1+q}} - 1 \equiv E(\gamma) > 0$$

Este incremento es mayor para clases con mayor número de alumnos ($\partial E(\gamma)/\partial n > 0$) y menor porcentaje de alumnos *tipo A* ($\partial E(\gamma)/\partial\alpha < 0$):

$$\frac{\partial E(\gamma)}{\partial n} = \frac{(1-\alpha)\ln(k)k^{\frac{n(1-\alpha)}{1+q}}}{1+q} > 0$$ mayor efecto para clases con mayor *n*

$$\frac{\partial E(\gamma)}{\partial\alpha} = -\frac{n\ln(k)k^{\frac{n(1-\alpha)}{1+q}}}{1+q} < 0$$ mayor efecto para clases con menor α

2. Las diferencias observadas en el producto de cursos con distinto porcentaje de alumnos *tipo A* (distinto α) son mayores si se comparan cursos con más alumnos y/o varianza mayor.

Sea $E(\alpha)$ el incremento porcentual en el producto cuando α aumenta a $k\alpha$:

$$\frac{(P_A\gamma^{(1-k\alpha)})^{\frac{n}{1+q}} - (P_A\gamma^{(1-\alpha)})^{\frac{n}{1+q}}}{(P_A\gamma^{(1-\alpha)})^{\frac{n}{1+q}}} = \gamma^{\frac{\alpha n(1-k)}{1+q}} - 1 \equiv E(\gamma) > 0$$

Este incremento es mayor para clases con mayor número de alumnos ($\partial E(\alpha)/\partial n > 0$) y mayor varianza, es decir, menor γ ($\partial E(\alpha)/\partial\gamma < 0$):

$$\frac{\partial E(\alpha)}{\partial n} = \frac{\alpha(1-k)\ln(\gamma)\gamma^{\frac{\alpha n(1-k)}{1+q}}}{1+q} > 0$$ mayor efecto para clases con mayor *n*

$$\frac{\partial E(\alpha)}{\partial\gamma} = \frac{\alpha n(1-k)\gamma^{\frac{\alpha n(1-k)}{1+q}-1}}{1+q} < 0$$ mayor efecto para clases con menor γ

VII

Condiciones de Primer Orden

Derivación con la variable en el exponente

Para obtener $\frac{\partial p^{\frac{Z}{m}}}{\partial m}$, se describen las siguientes equivalencias

$$y = p^{\frac{Z}{m}} \tag{i}$$

$$\ln y = \ln p^{\frac{Z}{m}} = \tfrac{Z}{m}\ln(p) \tag{ii}$$

$$\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{1}{y} y' \tag{iii}$$

De modo que

$$\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{1}{y} y' = -\tfrac{Z}{m^2}\ln(p) \tag{iv}$$

$$\Leftrightarrow y' = -\tfrac{Z}{m^2}\ln(p)\cdot y \tag{v}$$

reemplazando (i) en (v) se obtiene

$$\Leftrightarrow y' = \frac{\partial p^{\frac{Z}{m}}}{\partial m} = -\tfrac{Z}{m^2}\ln(p)\cdot p^{\frac{Z}{m}} \tag{vi}$$

De la misma manera se obtiene

$$\frac{\partial p^{n}}{\partial n} = \ln(p)\cdot p^{n} \tag{vii}$$

$$\frac{\partial p^{\alpha n}}{\partial n} = \alpha\ln(p)\cdot p^{n} \tag{viii}$$

$$\frac{\partial p^{\alpha n}}{\partial \alpha} = n\ln(p)\cdot p^{n} \tag{ix}$$

2. CPO ecuación (6), aplicando ecuación (vi):

$$\Pi = ZVp^{\frac{Z}{m}} - Wm \tag{x}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial m} = -ZV\tfrac{Z}{m^2}\ln(p)p^{\frac{Z}{m}} = 0 \tag{xi}$$

$$= -V\frac{Z^2}{m^2}p^{\frac{Z}{m}}\ln(p) - W = 0 \tag{xii}$$

CPO ecuación (6'), aplicando ecuación (vii):

$$\Pi_s = Vp^{n} - \tfrac{W}{n} \tag{xiii}$$

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial n} = Vp^{n}\ln(p) + \tfrac{W}{n^2} = 0 \tag{xiv}$$

VIII

Efecto del parámetro γ en la decisión de agrupar o mezclar

Se debe escoger entre:

- Agrupar a los alumnos por tipo, con la restricción de que los q-profesores alcanzan sólo para ser asignados a las clases *tipo B*, o
- Mezclar a todos los alumnos, con la restricción de emplear sólo q-profesores

Expresión formal:

N corresponde al número total de alumnos; $N_A = \alpha N$ es el número de alumnos *tipo A*; $N_B = (1-\alpha)N$, el número de alumnos *tipo B*; n_A, n_B y n_M corresponde al número de alumnos en clases *tipo A, B* y mixtas respectivamente. Los valores n_A y n_B se obtienen optimizando la función de beneficios (sección 3) por lo que $n_A = kn_B$. Cuando se escoge el número óptimo de alumnos por clase, entonces debe cumplirse que $k > 1$. Si $p_A > p_B$ y $k = 1$, entonces el número de alumnos no se ha escogido optimizando la función de beneficios.

Se debe igualar la cantidad de profesores que atiende clases *tipo B* (N_B / n_B), a la cantidad de profesores que atiende clases mixtas (N / n_M), de modo que:

$$\frac{N_B}{n_B} = \frac{N}{n_M} \Leftrightarrow \frac{(1-\alpha)N}{n_B} = \frac{N}{n_M}$$

$$\Leftrightarrow n_M = \frac{n_B}{(1-\alpha)}$$

- Producto con clases segregadas empleando la restricción:

$$\theta^{seg} = \alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_B^{\frac{n_B}{1+q}}$$

- Producto con clases mixtas: $\theta^{mix} = \left(p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)}\right)^{\frac{n_M}{1+q}}$. La restricción es $n^M = n_B / 1-\alpha$, por lo que el producto queda:

$$\theta^{mix} = \left(p_A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} p_B \right)^{\frac{n_B}{1+q}}$$

Para que mezclar sea preferible a agrupar, debe darse que:

$$\theta^{mix} = \left(p_A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} p_B \right)^{\frac{n_B}{1+q}} > \alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_B^{\frac{n_B}{1+q}} = \theta^{seg}$$

Reemplazando p_B por γp_A con $0 < \gamma < 1$, y n_A por kn_B con $k > 1$, y reordenando los término, se obtiene:

$$\left(p_A^{\frac{1}{1-\alpha}} \gamma \right)^{\frac{n_B}{1+q}} - \alpha p_A^{kn_A} + (1-\alpha)(\gamma p_A)^{\frac{n_B}{1+q}} > 0$$

Se debe demostrar, entonces, que la expresión anterior es positiva. Primero, se agrupan términos:

$$\gamma^{\frac{n_B}{1+q}} p_A^{\frac{n_B}{(1-\alpha)(1+q)}} - \alpha p_A^{kn_B} + (1-\alpha)\gamma^{\frac{n_B}{1+q}} p_A^{\frac{n_B}{1+q}} > 0$$

$$(\gamma p_A)^{\frac{n_B}{1+q}} \left(p_A^{\frac{\alpha n_B}{(1-\alpha)(1+q)}} - (1-\alpha) - \alpha p_A^{\frac{n_B[k(1+q)-1]}{1+q}} \gamma^{-\frac{n_B}{1+q}} \right) > 0$$

$$p_A^{\frac{\alpha n_B}{(1-\alpha)(1+q)}} - (1-\alpha) - \alpha \frac{p_A^{n_B k}}{(\gamma p_A)^{\frac{n_B}{1+q}}} > 0$$

Para que mezclar sea preferible a agrupar debe darse que:

$$p_A^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{n_B}{1+q}} > (1-\alpha) + \frac{\alpha p_A^{kn_B}}{(\gamma p_A)^{\frac{n_B}{1+q}}}$$

Esta expresión es ambigua para p_A y α. Sin embargo, es inambigua para *q*, γ y *k*. A mayor *q*, mayor es la probabilidad de que se cumpla la inecuación. Mientras más alto γ, es decir, cuanto más cerca estén los niveles de p_A y p_B, menor es la expresión de la izquierda, lo que llevaría a cumplir la inecuación con menores niveles de *q*. Por último, el parámetro $k = n_A / n_B$ indica la relación entre el número óptimo de alumnos para las clases *tipo A* y el número óptimo para las clases *tipo B*. Cuanto más se asemejen los niveles de los dos tipos, menor es el valor de *k*, lo que es concordante con el efecto de γ.

En el caso específico en que $\alpha = 1-\alpha$, para que mezclar sea preferible a agrupar, se aprecia claramente que la inecuación se cumplirá con niveles de *q* y γ suficientemente altos :

$$p_A^{\frac{n_B}{1+q}} > \tfrac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{p_A^{kn_B}}{(p_A\gamma)^{\frac{n_B}{1+q}}}\right)\right]$$

IX

Tabla 2

Benchmark: Resultados con escuelas agrupadas por tipo y número óptimo de alumnos por clase

$p_A > p_B$	Resultado escuelas *tipo A*	Resultados escuelas *tipo B*	Total del sistema
Nivel de *p*	p_A	p_B	
Total de cursos = total de profesores	$\frac{\overline{N}_A}{n_A}$	$\frac{\overline{N}_B}{n_B}$	$\frac{\overline{N}_A}{n_A}+\frac{\overline{N}_B}{n_B}=\overline{N}\,\frac{(\alpha n_B+(1-\alpha)n_A)}{n_A n_B}$
Cantidad de alumnos	$\alpha\overline{N}=\overline{N}_A$	$(1-\alpha)\overline{N}=\overline{N}_B$	$\overline{N}$
Alumnos por sala	n_A	n_B	
Producto por alumno (θ_A o θ_B) y/o producto medio ($\overline{\theta}$)	$\theta_A = p_A^{n_A}$	$\theta_B = p_B^{n_B}$	$\overline{\theta}=\frac{\overline{N}_A p_A^{n_A}+\overline{N}_B p_B^{n_B}}{\overline{N}}$ $=\alpha p_A^{n_A}+(1-\alpha)p_B^{n_B}$
Costo por alumno (C_A o C_B) y Costo medio por alumno	$C_A=\frac{W}{n_A}$	$C_B=\frac{W}{n_B}$	$C_{medio}=\frac{\frac{W\overline{N}_A}{n_A}+\frac{W\overline{N}_B}{n_B}}{\overline{N}}$ $=W\,\frac{\alpha n_B+(1-\alpha)n_A}{n_A n_B}$
Beneficio por alumno	$\Pi_A = p_A^{n_A}-\frac{W}{n_A}$	$\Pi_B = p_B^{n_B}-\frac{W}{n_B}$	
Producto por curso	$n_A p_A^{n_A}$	$n_B p_B^{n_B}$	
Costo por curso	W	W	
Beneficio por curso	$n_A\Pi_A = n_A p_A^{n_A}-W$	$n_B\Pi_B = n_B p_B^{n_B}-W$	
Producto total	$\overline{N}_A\theta_A=\overline{N}_A p_A^{n_A}$	$\overline{N}_B\theta_B=\overline{N}_B p_B^{n_B}$	$\overline{N}\overline{\theta}=\overline{N}\left(\alpha p_A^{n_A}+(1-\alpha)p_B^{n_B}\right)$
Costo total	$\frac{\overline{N}_A W}{n_A}$	$\frac{\overline{N}_B W}{n_B}$	$\frac{\overline{N}_A W}{n_A}+\frac{\overline{N}_B W}{n_B}=\overline{N}W\,\frac{\alpha n_B+(1-\alpha)n_A}{n_A n_B}$
Beneficio total	$\overline{\Pi}_A\equiv\alpha\overline{N}\Pi_A$ $=\overline{N}_A\left(p_A^{n_A}-\frac{W}{n_A}\right)$	$\overline{\Pi}_B\equiv(1-\alpha)\overline{N}\Pi_B$ $=\overline{N}_B\left(p_B^{n_B}-\frac{W}{n_B}\right)$	$\overline{N}\left(\alpha p_A^{n_A}+(1-\alpha)p_B^{n_B}\right.$ $\left.-W\,\frac{\alpha n_B+(1-\alpha)n_A}{n_A n_B}\right)$

X

Tabla 3
Restricción 1-a
Nadie escoge, ni los alumnos ni las escuelas, y la asignación es por sorteo.
Se puede reducir el número de alumnos por clases y contratar más profesores
Comparación con *benchmark*

	Resultado sistema segregado	Resultado sistema mixto	Comparación entre sistemas
Producto por alumno (θ) y/o producto medio $(\overline{\theta})$	$\overline{\theta} = \frac{\overline{N}_A p_A^{n_A} + \overline{N}_B p_B^{n_B}}{\overline{N}}$ $= \alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_B^{n_B}$ $= \alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_A^{n_B} \gamma^{n_B}$	$\overline{\theta} = \theta$ $= p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M}$ $= p_A^{n_M} \gamma^{(1-\alpha)n_M}$	1. Por modelo Lazear: pérdida alumnos *tipo A* $\frac{p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} - p_A^{n_A}}{p_A^{n_A}} < 0$ ganancia alumnos *tipo B* $\frac{p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} - p_B^{n_A}}{p_B^{n_A}} > 0$
Costo por alumno	$C_{medio} = \frac{\frac{\overline{N}_A W}{n_A} + \frac{\overline{N}_B W}{n_B}}{\overline{N}}$ $= W \frac{\alpha n_B + (1-\alpha) n_A}{n_A n_B}$	$\frac{W}{n_M} = \frac{\frac{\overline{N}_A W}{n_M} + \frac{\overline{N}_B W}{n_M}}{\overline{N}}$	2. menor en sistema mixto si: $n_M \to n_A$ mayor en sistema mixto si: $n_M \to n_B$
Producto total	$\overline{N}\left(\alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_B^{n_B}\right)$ $= \overline{N}\left(\alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_A^{n_B} \gamma^{n_B}\right)$	$\overline{N} p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M}$ $= \overline{N} p_A^{n_M} \gamma^{(1-\alpha)n_M}$ $= \overline{N}\left(\frac{p_B}{\gamma^{\alpha}}\right)^{n_M}$	3. Por Proposición 3: menor en sistema mixto
Costo total	$\frac{\overline{N}_A W}{n_A} + \frac{\overline{N}_B W}{n_B} = \overline{N} W \frac{\alpha n_B + (1-\alpha) n_A}{n_A n_B}$	$\frac{\overline{N} W}{n_M}$	4. menor en sistema mixto si: $n_M \to n_A$ mayor en sistema mixto si: $n_M \to n_B$
Beneficio total	$\overline{N}\left(\alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_A^{n_B} - W \frac{\alpha n_B + (1-\alpha) n_A}{n_A n_B}\right)$	$\overline{N}\left(p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} - \frac{W}{n_M}\right)$ $= \overline{N}\left(p_A^{n_M} \gamma^{(1-\alpha)n_M} - \frac{W}{n_M}\right)$	5. Inambiguamente menor en sistema mixto si $n_M \to n_B$ Por Proposición 2, menor en sistema mixto si $n_M \to n_A$
Total de cursos = total de profesores	$\frac{\overline{N}_A}{n_A} + \frac{\overline{N}_B}{n_B} = \overline{N} \frac{(\alpha n_B + (1-\alpha) n_A)}{n_A n_B}$	$\frac{\overline{N}}{n_M}$	6. menor en sistema mixto si: $n_M \to n_A$ mayor en sistema mixto si: $n_M \to n_B$

Desarrollo Tabla 3
1. Producto por alumno
Por Proposición 2 del modelo:

$$p_A^{n_A} > p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} > p_B^{n_B}$$

Esto ocurre porque aun al ajustar las cantidades en el óptimo, de modo que los tipos bajos estén en una clase óptima con menor número de alumnos, el producto es creciente en *p* y esta sustitución nunca es completa. Una clase mixta es equivalente a una clase de un *p* intermedio ya que $p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)}$ es la media geométrica del curso. Su producto es, por lo tanto, intermedio.

Los alumnos *tipo A* pierden porcentualmente:

$$\frac{p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} - p_A^{n_A}}{p_A^{n_A}} = \frac{p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M}}{p_A^{n_A}} - 1 < 0$$
$$= \gamma^{(1-\alpha)n_M} \frac{p_A^{n_M}}{p_A^{n_A}} - 1 < 0$$

Los alumnos *tipo B* ganan porcentualmente:

$$\frac{p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} - p_B^{n_B}}{p_B^{n_B}} = \frac{p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M}}{p_B^{n_B}} - 1 > 0$$
$$= \frac{\gamma^{(1-\alpha)n_M}}{\gamma^{n_B}} \frac{p_A^{n_M}}{p_A^{n_B}} - 1 > 1$$

2. El costo por alumno depende del número de alumnos en clases mixtas: cómo se ubica este número entre el n^* de las clases *tipo A* y *B*. Si es cercano al óptimo de la clase *tipo A*, el costo será menor en el sistema mixto. Si es cercano al óptimo de la clase *tipo B*, el costo será mayor. El primer caso se dará si el nivel del *tipo B* es alto, cercano al *tipo A* y/o la proporción de *tipo A* en la población es alto.

$$C_{medio} = \frac{W}{n_M} = \frac{\frac{\bar{N}_A W}{n_M} + \frac{\bar{N}_B W}{n_M}}{\bar{N}} \begin{cases} < \dfrac{\frac{\bar{N}_A W}{n_A} + \frac{\bar{N}_B W}{n_B}}{\bar{N}} \Leftrightarrow n_M \to n_A \\ > \dfrac{\frac{\bar{N}_A W}{n_A} + \frac{\bar{N}_B W}{n_B}}{\bar{N}} \Leftrightarrow n_M \to n_B \end{cases}$$

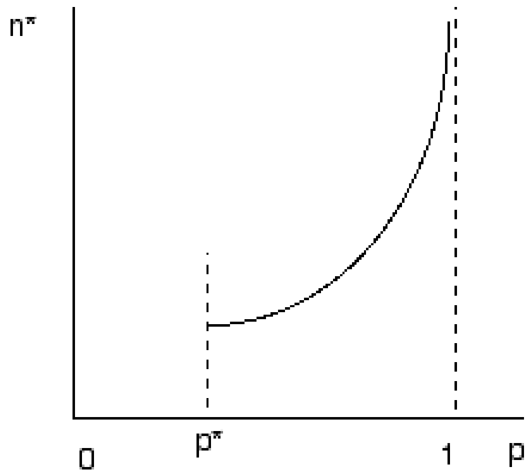
3. El producto total disminuye por Proposición 3

4. El costo total depende de del costo por alumno (punto 2), disminuye si $n_M \to n_A$ y aumenta si $n_M \to n_B$. Al respecto podemos agregar que para niveles altos de p se cumple que $n_M \to n_B$ y para niveles bajos, $n_M \to n_A$. Esto se aprecia en la Figura 2.

El Gráfico 3[31] muestra la relación entre el nivel de *p* y n^* donde p* representa el nivel bajo el cual los beneficios de proveer educación privada son negativos. Se puede ver que para niveles altos de *p*, el n* cae relativamente más. Los niveles de *p* intermedios tienen un n* cercano al que le corresponde al *p* bajo.

[31] pag 786 Lazear (2001)

Gráfico 3
Relación entre *p* y *n**



5. El beneficio total
Disminuye de manera inambigua si $n_M \rightarrow n_B$.

Para $n_M \rightarrow n_A$ la explicación de porqué el beneficio también disminuye es intuitiva: como la relación entre el producto y el número óptimo de alumnos no es lineal, sino creciente y convexa, sabemos que el *n* óptimo cae para un menor *p* y cae más cuanto más alto el *p* (Gráfico 3). De modo que al bajar el producto total segregado al de una clase mixta, n_M^* caerá aún más y probablemente se distancie de n_A. Si la disminución del producto no es compensada por una disminución igual o mayor en los costos, el beneficio total no puede ser mayor en la clase mixta.

6. El número de profesores define los costos, disminuye si $n_M \rightarrow n_A$, y aumenta si $n_M \rightarrow n_B$.

XI

Tabla 4
Restricción 1-b
Nadie escoge, ni los alumnos ni las escuelas, y la asignación es por sorteo.
No se puede reducir el número de alumnos por clases y contratar más profesores
Comparación con restricción 1-a

	Resultado sistema mixto sin restricción ($n_M = n^*$)	Resultado sistema mixto con restricción ($n_M = \bar{n}$)	Comparación entre sistemas
Producto por alumno (θ_M)	$\theta_M = p_A^{\alpha n^*} p_B^{(1-\alpha)n^*} = p_A^{n^*} \gamma^{(1-\alpha)n^*}$	$\theta_M = p_A^{\alpha \bar{n}} p_B^{(1-\alpha)\bar{n}} = p_A^{\bar{n}} \gamma^{(1-\alpha)\bar{n}}$	1. Mayor producto por alumno en sistema mixto sin restricción. Los alumnos *tipo A* pierden más y los alumnos *tipo B* ganan menos, al pasar de un sistema segregado a uno mixto con restricción de profesores.
Costo por alumno	$\frac{W}{n^*}$	$\frac{W}{\bar{n}}$	2. Menor costo en sistema mixto con restricción
Producto total	$\bar{N} p_A^{\alpha n^*} p_B^{(1-\alpha)n^*} = \bar{N} p_A^{n^*} \gamma^{(1-\alpha)n^*} = \bar{N}\left(\frac{p_B}{\gamma^\alpha}\right)^{n^*}$	$\bar{N} p_A^{\alpha \bar{n}} p_B^{(1-\alpha)\bar{n}} = \bar{N} p_A^{\bar{n}} \gamma^{(1-\alpha)\bar{n}} = \bar{N}\left(\frac{p_B}{\gamma^\alpha}\right)^{\bar{n}}$	3. Mayor producto en sistema mixto sin restricción
Costo total	$\frac{\bar{N}W}{n^*}$	$\frac{\bar{N}W}{\bar{n}}$	4. Menor costo en sistema mixto con restricción
Beneficio total	$\bar{N}\left(p_A^{\alpha n^*} p_B^{(1-\alpha)n^*} - \frac{W}{n^*}\right) = \bar{N}\left(p_A^{n^*} \gamma^{(1-\alpha)n^*} - \frac{W}{n^*}\right) = \bar{N}\left(\left(\frac{p_B}{\gamma^\alpha}\right)^{n^*} - \frac{W}{n^*}\right)$	$\bar{N}\left(p_A^{\alpha \bar{n}} p_B^{(1-\alpha)\bar{n}} - \frac{W}{\bar{n}}\right) = \bar{N}\left(p_A^{\bar{n}} \gamma^{(1-\alpha)\bar{n}} - \frac{W}{\bar{n}}\right) = \bar{N}\left(\left(\frac{p_B}{\gamma^\alpha}\right)^{\bar{n}} - \frac{W}{\bar{n}}\right)$	5. Menor beneficio total en sistema mixto con restricción $\left(\frac{p_B}{\gamma^\alpha}\right)^{n^*} - \frac{W}{n^*} > \left(\frac{p_B}{\gamma^\alpha}\right)^{\bar{n}} - \frac{W}{\bar{n}} \Leftrightarrow n^* < \bar{n}$
Total de cursos = total de profesores	$\frac{\bar{N}}{n^*}$	$\frac{\bar{N}}{\bar{n}}$	6. En general se espera que n^* sea menor que $\bar{n}$, ya que el óptimo en sistema mixto no es una combinación lineal de los óptimos en el sistema segregado

Desarrollo Tabla 4

1. **Producto por alumno**
Disminuye respecto al caso anterior sin restricción de profesores. El incremento del producto para los *tipo B* se reduce y el decremento al producto para los *tipo A* se agranda:

$$p_B^{n_B} < p_A^{\alpha\bar{n}} p_B^{(1-\alpha)\bar{n}} < p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} < p_A^{n_A}$$

2. **Costo por alumno**
El costo disminuye respecto al caso sin restricción de profesores, y, por definición, es idéntico al costo en el caso segregado.

3. **Producto total**
Cae aún más respecto al caso sin restricción de profesores, que ya era inferior al producto en caso segregado.

4. **Costo total**
El costo es menor respecto al caso sin restricción de profesores y, por definición, es idéntico al costo en el caso segregado. Hay que recordar que la restricción se refiere justamente a que no es posible aumentar el número de profesores ya disponibles en el sistema segregado.

5. **Beneficio total**
Menor que en el caso sin restricción. Por definición en el óptimo los beneficios son máximos. Aún cuando los costos sean menores, el producto habrá disminuido lo suficiente como para contrarrestar esta disminución en los costos.

6. **Total de cursos = total de profesores**
El número óptimo de cursos en sistema mixto no es una combinación lineal del número de cursos en el sistema segregado. Por el Gráfico 3, se observa que un valor intermedio entre un *p* alto y uno bajo –que es el resultado de la media geométrica de un curso mixto– tiene un n* más próximo al *p* bajo, lo que conlleva cursos mixtos más pequeños que los que se obtendrían si la relación entre *p* y *n** fuera lineal. Por este motivo, en general, cuando *n* no está restringido el total de cursos –y por lo tanto de profesores– debiera ser mayor.

XII

Tabla 5
Restricción 2-b
Las escuelas deben incluir un porcentaje de alumnos *tipo B*
y este porcentaje es menor que el de la población local
Comparación con *benchmark* y Restricción 1-a

	Resultado sistema segregado	Resultado sistema mixto sin restricción ($n_M = n^*$)	Resultado sistema híbrido
Producto producto medio por alumno ($\overline{\theta}$)	$\overline{\theta} = \dfrac{\overline{N}_A p_A^{n_A} + \overline{N}_B p_B^{n_B}}{\overline{N}}$ $= \alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_B^{n_B}$ $= \alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_A^{n_B} \gamma^{n_B}$	$\overline{\theta} = \theta$ $= p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha) n_M}$ $= p_A^{n_M} \gamma^{(1-\alpha) n_M}$	$\overline{\theta} = (\delta(1-\alpha) + \alpha) p_A^{\beta n} p_B^{(1-\beta) n}$ $+ (1-\delta)(1-\alpha) p_B^{n_B}$
Costo por alumno	$C_{medio} = \dfrac{\frac{W\overline{N}_A}{n_A} + \frac{W\overline{N}_B}{n_B}}{\overline{N}}$ $= W \dfrac{\alpha n_B + (1-\alpha) n_A}{n_A n_B}$	$C_{medio} = \dfrac{W}{n_M}$	$C_{medio} = (\delta(1-\alpha) + \alpha) \dfrac{W}{n_M}$ $+ (1-\delta)(1-\alpha) \dfrac{W}{n_B}$ Si $n_M \to n_A$, entonces $C^{seg} > C^{hib} > C^{mix}$ Si $n_M \to n_B$, entonces $C^{seg} < C^{hib} = C^{mix}$
Producto total	$\overline{N}\theta^{seg} = \overline{N}\left(\alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_B^{n_B}\right)$ $= \overline{N}\left(\alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha) p_A^{n_B} \gamma^{n_B}\right)$	$\overline{N}\theta^{mix} = \overline{N} p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha) n_M}$ $= \overline{N} p_A^{n_M} \gamma^{(1-\alpha) n_M}$ $= \overline{N}\left(\dfrac{p_B}{\gamma^{\alpha}}\right)^{n_M}$	$\overline{N}\theta^{híb} = \overline{N}\left(\left(\delta(1-\alpha) + \alpha\right) p_A^{\beta n_M} p_B^{(1-\beta) n_M}\right.$ $\left.+ (1-\delta)(1-\alpha) p_B^{n_B}\right)$ $\overline{N}\left(\theta^{mix} < \theta^{híb} < \theta^{seg}\right)$
Costo total	$C^{seg} = \dfrac{\overline{N}_A W}{n_A} + \dfrac{\overline{N}_B W}{n_B}$ $= \overline{N} W \dfrac{\alpha n_B + (1-\alpha) n_A}{n_A n_B}$	$C^{mix} = \dfrac{\overline{N} W}{n_M}$	Si $n_M \to n_A$, entonces $C^{seg} > C^{hib} > C^{mix}$ Si $n_M \to n_B$, entonces $C^{seg} < C^{hib} = C^{mix}$

Tabla 5 (cont.)
Restricción 2-b
Las escuelas deben incluir un porcentaje de *tipo B* y este porcentaje es menor que el de la población local
Comparación con *benchmark* y Restricción 1-a

	Resultado sistema segregado	Resultado sistema mixto sin restricción ($n_M = n^*$)	Resultado sistema híbrido
Beneficio total	$\overline{N}\Big(\alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha)\, p_A^{n_B}$ $-W\,\frac{\alpha n_B + (1-\alpha)n_A}{n_A n_B}\Big)$	$\overline{N}\left(p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M} - \frac{W}{n_M}\right)$ $= \overline{N}\left(p_A^{n_M} \gamma^{(1-\alpha)n_M} - \frac{W}{n_M}\right)$ $= \overline{N}\left(\left(\frac{p_B}{\gamma^{\alpha}}\right)^{n_M} - \frac{W}{n_M}\right)$	$\overline{N}\Big(\big(\delta(1-\alpha)+\alpha\big)p_A^{\beta n_M} p_B^{(1-\beta)n_M}$ $+(1-\delta)(1-\alpha)\, p_B^{n_B}$ $-\big(\delta(1-\alpha)+\alpha\big)\frac{W}{n_M}$ $-(1-\delta)(1-\alpha)\frac{W}{n_B}\Big)$ Inambiguamente: $\Pi^{seg} > \Pi^{híb} > \Pi^{mix}$ si $n_M \to n_B$ Por Proposición 2: $\Pi^{seg} > \Pi^{híb} > \Pi^{mix}$ si $n_M \to n_A$
Total de cursos = total de profesores	$\frac{\overline{N}_A}{n_A} + \frac{\overline{N}_B}{n_B} = \overline{N}\,\frac{\alpha n_B + (1-\alpha)n_A}{n_A n_B}$	$\frac{\overline{N}}{n_M}$	$\frac{\delta \overline{N}_B + \overline{N}_A}{n_M} + \frac{(1-\delta)\overline{N}_B}{n_B}$ Si $n_M \to n_A$, entonces el sistema híbrido tiene un número de profesores intermedio entre el sistema segregado y el mixto. Si $n_M \to n_B$ entonces el número de profesores en sistema híbrido es igual al que hay en sistema mixto y mayor que en el sistema segregado.

Desarrollo Tabla 5

1. **Producto por alumno**

Para los $\big(\delta(1-\alpha)+\alpha\big)\overline{N}$ alumnos de las escuelas mixtas será:

$$\theta^{mix} = p_A^{\beta n} p_B^{(1-\beta)n} = p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n}\, p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n}$$

Para los $(1-\delta)(1-\alpha)\overline{N}$ alumnos de las escuelas *tipo B* será, como antes:

$$\theta^{seg} = p_B^{n_B}$$

donde:

$$p_A^{n_A} \geq p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} \geq p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n} \geq p_B^{n_B}$$

El producto por alumno en escuelas mixtas es inferior al obtenido por los alumnos *tipo A* en escuelas *tipo A* pero superior al obtenido si $\beta = \alpha$ (Restricción 1)

2. Costo por alumno

El costo por alumno en las clases mixtas es W / n_M y el costo por alumno en las clases *tipo B* es W / n_B. El costo medio por alumno es:

$$C_{medio}^{híb} = \frac{(\delta(1-\alpha)+\alpha)\overline{N}\frac{W}{n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)\overline{N}\frac{W}{n_B}}{\overline{N}} = (\delta(1-\alpha)+\alpha)\frac{W}{n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)\frac{W}{n_B}$$

Igual que para el análisis de la Restricción 1 el costo medio por alumno en el sistema híbrido en comparación con el costo medio en las clases mixtas o agrupadas por tipo depende de la cantidad de alumnos en las clases mixtas. Si $n_M \to n_A$ el costo por alumno en sistema segregado es mayor al costo por alumno en sistema híbrido.[32] El costo en sistema mixto es el menor de todos (resultado Restricción 1-a) bajo la misma condición:

$$C^{seg} > C^{hib} > C^{mix}$$

Si $n_M \to n_B$ el costo por alumno en sistema segregado es menor al costo por alumno en sistema híbrido, el que a su vez es igual al costo por alumno en sistema mixto bajo la misma condición[33]:

$$C^{seg} < C^{hib} = C^{mix}$$

3. Producto total

El producto total depende de los parámetros poblacionales y de la decisión respecto del porcentaje de alumnos *tipo B* que irán a sistema mixto (δ):

$$\overline{N}\theta = \overline{N}\left((\delta(1-\alpha)+\alpha) p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n_M} p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n_M} + (1-\delta)(1-\alpha) p_B^{n_B} \right)$$
$$= (\delta\overline{N}_B + \overline{N}_A) p_A^{\beta n_M} p_B^{(1-\beta)n_M} + (1-\delta)\overline{N}_B p_B^{n_B}$$

Como era predecible, el producto total en un sistema híbrido es mayor que en un sistema mixto pero menor que en un sistema segregado.[34]

[32] Desarrollo en Apéndice matemático XII-A
[33] Desarrollo en Apéndice matemático XII-B
[34] Comprobación en Apéndice matemático XII-C

4. Costo total

Se desprende del costo medio por alumno:

$$C^{híb} = \overline{N}\left((\delta(1-\alpha)+\alpha)\frac{W}{n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)\frac{W}{n_B} \right) = \left(\delta\overline{N}_B + \overline{N}_A\right)\frac{W}{n_M} + (1-\delta)\overline{N}_B\frac{W}{n_B}$$

El costo total, al igual que el costo medio es el mayor en el sistema segregado y el menor en el sistema mixto, y el sistema híbrido tiene un costo intermedio, si el tamaño de las clases mixtas se acerca al de las clases *tipo A*. Si el tamaño es similar al de las clases *tipo B*, entonces el sistema híbrido y el sistema mixto tienen el mismo costo total, y el sistema segregado tiene el menor costo.

5. Beneficio total

$$\overline{N}\left((\delta(1-\alpha)+\alpha) p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha} n_M} p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha} n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)p_B^{n_B} - (\delta(1-\alpha)+\alpha)\frac{W}{n_M} - (1-\delta)(1-\alpha)\frac{W}{n_B} \right)$$

$$= \left(\delta\overline{N}_B + \overline{N}_A\right)p_A^{\beta n_M} p_B^{(1-\beta)n_M} + (1-\delta)\overline{N}_B p_B^{n_B} - \left(\delta\overline{N}_B + \overline{N}_A\right)\frac{W}{n_M} - (1-\delta)\overline{N}_B\frac{W}{n_B}$$

Si $n_M \to n_B$ entonces de manera inambigua el beneficio total es mayor en el sistema segregado, menor en el sistema híbrido, y el mínimo el obtenido en el sistema mixto. Si $n_M \to n_A$: En la misma línea de argumentación que en los casos anteriores, por Proposición 2, debe cumplirse que, a pesar de que el costo es mayor en el sistema segregado, no es suficientemente alto para contrarrestar el efecto de un mayor producto. El beneficio en el sistema segregado sigue siendo el mayor y el mínimo en el sistema mixto.

6. Total de cursos = total de profesores

El total de profesores para el caso híbrido está dado por:

$$\frac{\delta\overline{N}_B + \overline{N}_A}{n_M} + \frac{(1-\delta)\overline{N}_B}{n_B} = \frac{\delta(1-\alpha)\overline{N} + \alpha}{n_M} + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)\overline{N}}{n_B}$$

$$= \overline{N}\,\frac{(\delta(1-\alpha)+\alpha)n_B + (1-\delta)(1-\alpha)n_M}{n_M n_B}$$

La misma demostración que se emplea para los costos es válida para afirmar que si el número de alumnos en las clases mixtas es similar al número de alumnos en las clases *tipo A* ($n_M \to n_A$), entonces hay menos profesores empleados en el sistema mixto, luego en el sistema híbrido y finalmente, los más, en el sistema segregado. Si el número de alumnos en las clases mixtas es similar al que habría en una clase *tipo B*, entonces el número de profesores en los sistemas mixto e híbrido es el mismo, y mayor que en el segregado.

XII-A

P.D.: $C^{seg} > C^{híb} > C^{mix}$ si $n_M \to n_A$

Primero se demuestra: $C^{seg} > C^{híb}$ si $n_M \to n_A$

E.E.:

$$C^{seg} > C^{híb}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\overline{N}\frac{W}{n_A} + (1-\alpha)\overline{N}\frac{W}{n_B} > \left(\delta(1-\alpha)+\alpha\right)\overline{N}\frac{W}{n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)\overline{N}\frac{W}{n_B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{n_A} + \frac{1-\alpha}{n_B} > \frac{\delta(1-\alpha)+\alpha}{n_M} + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{n_A} + \frac{1-\alpha}{n_B} > \frac{\delta(1-\alpha)+\alpha}{n_A} + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B} \qquad / \; n_M \to n_A$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\alpha)-(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B} > \frac{\delta(1-\alpha)}{n_A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta(1-\alpha)}{n_B} > \frac{\delta(1-\alpha)}{n_A}$$

La primera parte está demostrada. A continuación, se demuestra: $C^{híb} > C^{mix}$ si $n_M \to n_A$

E.E.:

$$C^{hib} > C^{mix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\delta(1-\alpha)+\alpha\right)\overline{N}\frac{W}{n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)\overline{N}\frac{W}{n_B} > \overline{N}\frac{W}{n_M}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta(1-\alpha)}{n_M} + \frac{\alpha}{n_M} + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B} > \frac{\alpha}{n_M} + \frac{1-\alpha}{n_M}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta(1-\alpha)}{n_M} + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B} > \frac{1-\alpha}{n_M}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta(1-\alpha)}{n_A} + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B} > \frac{1-\alpha}{n_A} \qquad /n_M \to n_A$$

$$\Leftrightarrow \delta(1-\alpha)\left(\frac{1}{n_A} - \frac{1}{n_B}\right) > (1-\alpha)\left(\frac{1}{n_A} - \frac{1}{n_B}\right)$$

esto último se cumple dado que la expresión en paréntesis es negativa

Por lo tanto: $C^{seg} > C^{híb} > C^{mix}$ si $n_M \to n_A$

QED

XII-B

P.D.: $C^{seg} < C^{híb} = C^{mix}$ si $n_M \to n_B$

Primero se demuestra $C^{seg} < C^{híb}$ si $n_M \to n_B$

E.E.:

$$C^{seg} < C^{hib}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\overline{N}\frac{W}{n_A} + (1-\alpha)\overline{N}\frac{W}{n_B} < \left(\delta(1-\alpha)+\alpha\right)\overline{N}\frac{W}{n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)\overline{N}\frac{W}{n_B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{n_A} + \frac{1-\alpha}{n_B} < \frac{\delta(1-\alpha)+\alpha}{n_B} + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B} \qquad /n_M \to n_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{n_A} < \frac{\delta(1-\alpha)+\alpha+(1-\delta)(1-\alpha)-1+\alpha}{n_B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{n_A} < \frac{\alpha}{n_B}$$

QED

A continuación, se demuestra: $C^{híb} = C^{mix}$ si $n_M \to n_B$

E.E.:

$$C^{híb} = C^{mix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\delta(1-\alpha)+\alpha\right)\overline{N}\frac{W}{n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)\overline{N}\frac{W}{n_B} = \overline{N}\frac{W}{n_M}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta(1-\alpha)+\alpha}{n_B} + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B} = \frac{1}{n_B} \qquad /n_M \to n_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta(1-\alpha)+\alpha+(1-\delta)(1-\alpha)}{n_B} - \frac{1-\alpha}{n_B} = \frac{1}{n_B} - \frac{1-\alpha}{n_B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta-\delta\alpha+\alpha+1-\alpha-\delta+\delta\alpha-1+\alpha}{n_B} = \frac{\alpha}{n_B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{n_B} = \frac{\alpha}{n_B}$$

Por lo tanto: $C^{seg} < C^{híb} = C^{mix}$ si $n_M \to n_B$

QED

XII-C

P.D.: $\theta^{seg} > \theta^{híb} > \theta^{mix}$

E.E.:

$$\overline{N}\theta^{híb} = \overline{N}\left((\delta(1-\alpha)+\alpha)p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n_M} p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n_M} + (1-\delta)(1-\alpha)p_B^{n_B} \right)$$

$$\overline{N}\theta^{mix} = \overline{N}p_A^{\alpha n_M} p_B^{(1-\alpha)n_M}$$

$$\overline{N}\theta^{seg} = \overline{N}\left(\alpha p_A^{n_A} + (1-\alpha)p_B^{n_B}\right)$$

Primero se demuestra: $\theta^{híb} > \theta^{mix}$

E.E.:

$$\theta^{híb} > \theta^{mix}$$

$$\Leftrightarrow (\delta(1-\alpha)+\alpha)p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} + (1-\delta)(1-\alpha)p_B^{n} > p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n}$$

$$\Leftrightarrow diff = (\delta(1-\alpha)+\alpha)p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} + (1-\delta)(1-\alpha)p_B^{n} - p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial diff}{\partial p_A} = \alpha n p_A^{\beta n} p_B^{(1-\beta)n} - \alpha n p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n} > 0 \qquad \beta = \frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha} > \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial diff}{\partial p_A} = \alpha n\left(p_A^{\beta n} p_B^{(1-\beta)n} - p_A^{\alpha n} p_B^{(1-\alpha)n}\right) > 0$$

Lo que se cumple, ya que $\beta > \alpha$. Finalmente se demuestra: $\theta^{seg} > \theta^{híb}$

E.E.:

$$\theta^{seg} > \theta^{híb}$$

$$\Leftrightarrow \alpha p_A^{n} + (1-\alpha)p_B^{n} > (\delta(1-\alpha)+\alpha)p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} + (1-\delta)(1-\alpha)p_B^{n}$$

$$\Leftrightarrow diff = \alpha p_A^{n} + (1-\alpha)p_B^{n} - (\delta(1-\alpha)+\alpha)p_A^{\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} p_B^{\frac{\delta(1-\alpha)}{\delta(1-\alpha)+\alpha}n} + (1-\delta)(1-\alpha)p_B^{n} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial diff}{\partial p_A} = \alpha n p_A^{n} - \alpha n p_A^{\beta n} p_B^{(1-\beta)n} > 0 \qquad \beta = \frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)+\alpha} > \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial diff}{\partial p_A} = \alpha n p_A^{n}\left(1 - \frac{p_B^{(1-\beta)n}}{p_A^{(1-\beta)n}}\right) > 0$$

Lo que se cumple para $p_A > p_B$

Por lo tanto: $\theta^{seg} > \theta^{híb} > \theta^{mix}$

QED

XIII

1. Estrategia N

Se propone aumentar el producto de los alumnos *tipo B* a un nivel *p**, por definir, disminuyendo el número de alumnos en las salas donde ellos asisten. No se emplea tecnología, por lo que *q=0*. Hay dos objetivos posibles:

Objetivo ambicioso: Se desea que los alumnos *tipo B* obtengan el mismo producto que el que logran los alumnos *tipo A* en clases segregadas. Esto significa que en clases segregadas los alumnos *tipo B* deben obtener $p^* = p_B^{n_B^a} = p_A^{n_A}$; y en clases mixtas, $p^* = (p_A^{\alpha} p_B^{1-\alpha})^{n_M^a} = p_A^{n_A}$.

Objetivo realista: Se desea que los alumnos *tipo B* obtengan un producto inferior al que obtienen los alumnos *tipo A* en clases segregadas pero mayor al que obtienen los alumnos *tipo B* en clases separadas por tipo. Es decir, $p_B^{n_B} < p^* = p_B^{n_B^r} < p_A^{n_A}$ en clases segregadas y $p^* = (p_A^{\alpha} p_B^{1-\alpha})^{n_M^r} < p_A^{n_A}$ en clases mixtas. Este resultado, inferior a $p_A^{n_A}$, en adelante se cuantificará como $p_A^{n_A^+}$, con $n_A^+ > n_A$.

1.1 Estrategia N en clases segregadas

Con objetivo ambicioso. El número de alumnos por clase segregada *tipo B* que permite lograr este objetivo (n_B^a) debe disminuir a:

$$n_B^a = \frac{n_A \ln(p_A)}{\ln(p_B)} \qquad \text{(i)}$$

El costo de la *Estrategia N* en clases segregadas (C_n^{seg}) con *objetivo ambicioso* se obtiene empleando (i):

$$C_n^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^a} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \qquad \text{(ii)}$$

Con objetivo realista. El número de alumnos por clase segregada *tipo B* que permite lograr este objetivo (n_B^r) debe ser mayor a n_B^a:

$$n_B > n_B^r = \frac{n_A^+ \ln(p_A)}{\ln(p_B)} > \frac{n_A \ln(p_A)}{\ln(p_B)} = n_B^a \qquad \text{(iii)}$$

El costo de la *Estrategia N* en clases segregadas (C_n^{seg}) con un *objetivo realista* son menores que con un *objetivo ambicioso* y se obtienen empleando el valor de n_B^r en (iii):

$$C_n^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \qquad \text{(iv)}$$

1.2 Estrategia N en clases mixtas

Con objetivo ambicioso: El número de alumnos por clase segregada *tipo B* que permite lograr este objetivo (n_M^a) debe disminuir a:

$$n_M^a = \frac{n_A \ln(p_A)}{\alpha \ln(p_A) + (1-\alpha)\ln(p_B)} \qquad \text{(v)}$$

El costo de la *Estrategia N* en clases mixtas (C_n^{mix}), con o*bjetivo ambicioso* se obtiene con (v):

$$\begin{aligned} C_n^{mix} &= \frac{W_n \overline{N}}{n_B^a} = \frac{W_n \overline{N}\left(\alpha \ln(p_A) + (1-\alpha)\ln(p_B)\right)}{n_A \ln(p_A)} \\ &= \frac{W_n}{n_A}\left(\alpha\overline{N} + (1-\alpha)\overline{N}\frac{\ln(p_B)}{\ln(p_A)}\right) \\ &= \frac{W_n}{n_A}\left(\overline{N}_A + \overline{N}_B \frac{\ln(p_B)}{\ln(p_A)}\right) \end{aligned}$$

Por lo que luego de una última simplificación:

$$C_n^{mix} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \qquad \text{(vi)}$$

Con objetivo realista: El número de alumnos por clase segregada *tipo B* que permite lograr este objetivo (n_M^r) debe ser mayor a n_M^a :

$$n_M > n_M^r = \frac{n_A^+ \ln(p_A)}{\alpha \ln(p_A) + (1-\alpha)\ln(p_B)} > \frac{n_A \ln(p_A)}{\alpha \ln(p_A) + (1-\alpha)\ln(p_B)} = n_M^a \qquad \text{(vii)}$$

El costo de la *Estrategia N* en clases mixtas (C_n^{mix}), con o*bjetivo realista* se obtiene con el valor de n_M^r en (vii):

$$C_n^{mix} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \qquad \text{(viii)}$$

1.3 Comparación entre sistemas empleando la Estrategia N

1. Al comparar el costo de aplicar la *Estrategia N* en clases agrupadas y en clases mixtas, lo que define el escenario menos costoso es el nivel de *p** que se pretende alcanzar. Si el objetivo es que los alumnos *tipo B* obtengan el mismo producto educativo que los alumnos *tipo A* cuando estos últimos están segregados –lo que denominaremos el *objetivo ambicioso*–, el costo en ambos sistemas es el mismo. Sin embargo, con el *objetivo realista* de que los alumnos *tipo B* obtengan un producto inferior al de los alumnos *tipo A*, pero de todos modos superior al que obtendrían en clases segregadas *tipo B*, el costo es menor en el sistema mixto.

Demostración

P.D.: $C_n^{seg} = C_n^{mix}$ con *objetivo ambicioso*. Esto es evidente a partir de las ecuaciones (ii) y (iv). No hay diferencias entre el costo total con sistema segregado y el costo total con sistema mixto si sólo se disminuye el número de alumnos en la sala de clases relevante (*Estrategia N*) y se persigue un objetivo ambicioso:

$$C_n^{seg} = C_n^{mix} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \qquad \text{(ix)}$$

P.D.: $C_n^{seg} > C_n^{mix}$ con *objetivo realista*. Con un objetivo realista, el costo es menor si se disminuye el número de alumnos en el sistema mixto que si se lleva a cabo esta estrategia en el sistema segregado. Esto es evidente a partir de las ecuaciones (vi) y (viii). Con $n_A^+ > n_A$:

$$C_n^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} > \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} = C_n^{mix} \qquad \text{(x)}$$

2. Al aplicar la *Estrategia N* en el sistema mixto con *objetivo realista*, el beneficio total es inferior al que se obtiene en el sistema segregado, ya que los alumnos *tipo A* logran un producto menor en el sistema mixto y esta caída no es compensada por el menor costo total.

Demostración

P.D.: $\Pi_n^{seg} > \Pi_n^{mix}$ con *objetivo realista*.

Reemplazando los costos por los de las ecuaciones (vi) y (viii) y sumando el producto agregado en cada caso se obtiene que se debe demostrar :

$$\Pi_n^{seg} = \overline{N}_A p_A^{n_A} + \overline{N}_B p_A^{n_A^+} - \left(\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right) > \overline{N} p_A^{n_A^+} - \left(\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right) = \Pi_n^{mix}$$

E.E.:

$$\overline{N}_A p_A^{n_A} + \overline{N}_B p_A^{n_A^+} - \left(\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right) = \alpha \overline{N} p_A^{n_A} + (1-\alpha) \overline{N} p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \alpha \overline{N}}{n_A}$$

$$= \alpha p_A^{n_A} + p_A^{n_A^+} - \alpha p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \alpha}{n_A}$$

y

$$\overline{N} p_A^{n_A^+} - \left(\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right) = \overline{N} p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \alpha \overline{N}}{n_A^+}$$

$$= p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \alpha}{n_A^+}$$

Por lo que $\Pi_n^{seg} > \Pi_n^{mix}$, si:

$$\alpha p_A^{n_A} + p_A^{n_A^+} - \alpha p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \alpha}{n_A} > p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \alpha}{n_A^+} \qquad \text{(xi)}$$

Esto es evidente al simplificar (x):

$$\alpha p_A^{n_A} - \alpha p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \alpha}{n_A} > -\frac{W_n \alpha}{n_A^+}$$

$$\alpha p_A^{n_A} - \frac{W_n \alpha}{n_A} > \alpha p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \alpha}{n_A^+}$$

Desigualdad que en definitiva se puede escribir:

$$p_A^{n_A} - \frac{W_n}{n_A} > p_A^{n_A^+} - \frac{W_n}{n_A^+} \qquad \text{(xii)}$$

La expresión de la izquierda en (xii) corresponde al beneficio óptimo por alumno *tipo A* en una escuela de su tipo con el número óptimo de alumnos (n_A). La expresión de la derecha expresa el beneficio por alumno *tipo A* en una escuela de su tipo con un número de alumnos mayor que el óptimo por clase (n_A^+). Este resultado es siempre subóptimo, por definición, ya que –fuera del óptimo– la disminución en los costos no compensa la caída en el producto. QED

2. Estrategia C
Se propone aumentar el producto de los alumnos *tipo B* a un nivel *p**, por definir, escogiendo *n** y *q** a partir de un problema de minimización de costos.

Objetivo ambicioso: Se desea que los alumnos *tipo B* obtengan el mismo producto que el que logran los alumnos *tipo A* en clases segregadas. Esto significa que en clases segregadas los alumnos *tipo B* deben obtener $p^* = p_B^{n_B^{*a}/(1+q_B^{*a})} = p_A^{n_A}$; y en clases mixtas, $p^* = (p_A^{\alpha} p_B^{(1-\alpha)/(1+q_M^{*a})})^{n_M^{*a}} = p_A^{n_A}$.

Objetivo realista: Se desea que los alumnos *tipo B* obtengan un producto inferior al que obtienen los alumnos *tipo A* en clases segregadas pero mayor al que obtienen los alumnos *tipo B* en clases separadas por tipo. Es decir, $p_B^{n_B} < p^* = p_B^{n_B^{*a}/(1+q_B^{*a})} < p_A^{n_A}$ en clases segregadas y $p^* = p_B^{n_B^{*a}/(1+q_B^{*a})} < p_A^{n_A}$ en clases mixtas. Este resultado, inferior a $p_A^{n_A}$, al igual que en la *Estrategia N*, se cuantificará como $p_A^{n_A^+}$, con $n_A^+ > n_A$.

2.1 Estrategia C en clases segregadas
Con objetivo ambicioso. La cantidad de tecnología por clase segregada *tipo B* en términos del número óptimo de alumnos ($q_B^{*a}(n_B^{*a})$) que permite lograr este objetivo corresponde a:

$$q_B^{*a}(n_B^{*a}) = \frac{n_B^{*a} \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} - 1 \qquad \text{(xiii)}$$

El problema de minimización de costos empleando la *Estrategia C* en clases segregadas ($C_{n,q}^{seg}$) con un *objetivo ambicioso* es el siguiente:

$$\min_{\{n_B^a, q_B^a\}} C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^a} + W_q \overline{N}_B q_B^a \qquad s.a.\; q_B^a(n_B^{*a}) = \frac{n_B^{*a} \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} - 1$$

Al reemplazar (xiii) en la función de costos se obtiene:

$$\min_{\{n_B^a\}} C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^a} + W_q \overline{N}_B \left(\frac{n_B^a \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} - 1 \right)$$

$$[n_B^a]: -\frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^{a\,2}} + \frac{W_q \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} = 0 \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial n_B^{a\,2}} > 0$$

Lo que permite tener una expresión para el número y la tecnología óptimos:

$$n_B^{*a} = \left(\frac{W_n n_A \ln(p_A)}{W_q \ln(p_B)} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(xiv)}$$

$$q_B^{*a} = \left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \qquad \text{(xv)}$$

Con estos valores se obtiene el costo total en el óptimo, con clases segregadas y *objetivo ambicioso*:

$$\begin{aligned} C_{n,q}^{seg} &= \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^{*a}} + W_q \overline{N}_B q_B^{*a} \\ &= \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + W_n \overline{N}_B \left(\frac{W_q \ln(p_B)}{W_n n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B \qquad \text{(xvi)} \end{aligned}$$

Si $q_B^{*a} < 0$, la solución óptima no es interior, entonces no se aplica tecnología y sólo se corrige el número de alumnos, lo que corresponde a la *Estrategia N*.

Con objetivo realista. La cantidad de tecnología por clase segregada *tipo B* en términos del número óptimo de alumnos ($q_B^{*r}(n_B^{*r})$) que permite lograr este objetivo corresponde a:

$$q_B^{*r}(n_B^{*r}) = \frac{n_B^{*a} \ln(p_B)}{n_A^{+} \ln(p_A)} - 1 < q_B^{*a}(n_B^{*a}) \qquad \text{(xvii)}$$

El problema de minimización de costos empleando la *Estrategia C* en clases segregadas ($C_{n,q}^{seg}$) con un *objetivo realista* es el siguiente:

$$\min_{\{n_B^r, q_B^r\}} C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^r} + W_q \overline{N}_B q_B^r \qquad s.a.\ q_B^r(n_B^{*r}) = \frac{n_B^{*r} \ln(p_B)}{n_A^{+} \ln(p_A)} - 1$$

Al reemplazar (xvii) en la función de costos se obtiene:

$$\min_{\{n_B^r\}} C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^r} + W_q \overline{N}_B \left(\frac{n_B^a \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} - 1 \right)$$

$$[n_B^r]: -\frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^{r\,2}} + \frac{W_q \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 C}{\partial n_B^{r\,2}} > 0$$

Lo que permite tener una expresión para el número y la tecnología óptimos:

$$n_B^{*r} = \left(\frac{W_n n_A^+ \ln(p_A)}{W_q \ln(p_B)} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(xviii)}$$

$$q_B^{*r} = \left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \qquad \text{(xix)}$$

Con estos valores se obtiene el costo total en el óptimo, con clases segregadas y *objetivo realista*:

$$\begin{aligned} C_{n,q}^{seg} &= \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B}{n_B^{*r}} + W_q \overline{N}_B q_B^{*r} \\ &= \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B \qquad \text{(xx)} \end{aligned}$$

Si $q_B^{*r} < 0$, la solución óptima no es interior, entonces no se aplica tecnología y sólo se corrige el número de alumnos, lo que corresponde a la *Estrategia N*.

2.2 Estrategia C en clases mixtas

Con objetivo ambicioso: La cantidad de tecnología por clase segregada *tipo B* en términos del número óptimo de alumnos ($q_M^{*a}(n_M^{*a})$) que permite lograr este objetivo corresponde a:

$$q_M^{*a}(n_M^{*a}) = \frac{(1-\alpha) n_M^{*a} \ln(p_B)}{(n_A - \alpha n_M^{*a}) \ln(p_A)} - 1 \qquad \text{(xxi)}$$

El problema de minimización de costos empleando la *Estrategia C* en clases mixtas ($C_{n,q}^{mix}$) con un *objetivo ambicioso* es el siguiente:

$$\min_{\{n_M^a, q_M^a\}} C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}}{n_M^a} + W_q \overline{N}_B q_M^a \qquad s.a.\ q_M^a(n_M^{*a}) = \frac{(1-\alpha) n_M^{*a} \ln(p_B)}{(n_A - \alpha n_M^{*a}) \ln(p_A)} - 1$$

Al reemplazar (xxi) en la función de costos se obtiene:

$$\min_{\{n_M^a\}} C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}}{n_M^a} + W_q \overline{N}_B \left(\frac{(1-\alpha) n_M^a \ln(p_B)}{(n_A - \alpha n_M^a) \ln(p_A)} - 1 \right)$$

Con $\alpha = 0$, reemplazando $\overline{N}$ por $\overline{N}_B$, se logra una expresión idéntica a la del caso segregado. Las condiciones de primer y segundo orden son:

$$\left[n_M^a \right]: -\frac{W_n \overline{N}}{n_M^{a\ 2}} + W_q \overline{N}_B \left(\frac{n_A (1-\alpha) \ln(p_B)}{(n_A - \alpha n_M^a)^2 \ln(p_A)} \right) = 0 \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial n_M^{a\ 2}} > 0$$

De las que se obtiene una expresión para el número y la tecnología óptimos[35]:

$$n_M^{*a} = \frac{\left(W_n n_A \left| \ln(p_A) \right| \right)^{\frac{1}{2}}}{\alpha \left(\frac{W_n \left| \ln(p_A) \right|}{n_A} \right)^{\frac{1}{2}} + (1-\alpha) \left(W_q \left| \ln(p_B) \right| \right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(xxii)}$$

$$q_M^{*a} = \left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \qquad \text{(xxiii)}$$

Con estos valores se obtiene el costo total en el óptimo, con clases mixtas y *objetivo ambicioso*, reemplazando los valores óptimos, y con un poco de álgebra:

$$C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}}{n_M^{*a}} + W_q \overline{N}_B q_M^{*a}$$

$$= \frac{W_n \overline{N} \left(\alpha \left(\frac{W_n \left| \ln(p_A) \right|}{n_A} \right)^{\frac{1}{2}} + (1-\alpha) \left(W_q \left| \ln(p_B) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\left(W_n n_A \left| \ln(p_A) \right| \right)^{\frac{1}{2}}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

$$= \frac{W_n \overline{N}_A \left(\frac{W_n \left| \ln(p_A) \right|}{n_A} \right)^{\frac{1}{2}} + \overline{N}_B \left(W_q \left| \ln(p_B) \right| \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(W_n n_A \left| \ln(p_A) \right| \right)^{\frac{1}{2}}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

Finalmente:

$$C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \qquad \text{(xxiv)}$$

Si $q_B^{*a} < 0$, la solución óptima no es interior, entonces no se aplica tecnología y sólo se corrige el número de alumnos, lo que corresponde a la *Estrategia N*.

[35] Desarrollo en Apéndice matemático XIII-A

Con objetivo realista: La cantidad de tecnología por clase segregada *tipo B* en términos del número óptimo de alumnos ($q_M^{*r}(n_M^{*r})$) que permite lograr este objetivo corresponde a:

$$q_M^{*r}(n_M^{*r}) = \frac{(1-\alpha)n_M^{*r}\ln(p_B)}{(n_A^{+} - \alpha n_M^{*r})\ln(p_A)} - 1 < q_M^{*a}(n_M^{*a}) \qquad \text{(xxv)}$$

El problema de minimización de costos empleando la *Estrategia C* en clases mixtas ($C_{n,q}^{mix}$) con un *objetivo realista* es el siguiente:

$$\min_{\{n_M^r, q_M^r\}} C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}}{n_M^r} + W_q \overline{N}_B q_M^r \qquad s.a.\ q_M^r(n_M^{*r}) = \frac{(1-\alpha)n_M^{*r}\ln(p_B)}{(n_A^{+} - \alpha n_M^{*r})\ln(p_A)} - 1$$

Al reemplazar (xxv) en la función de costos se obtiene:

$$\min_{\{n_M^r\}} C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}}{n_M^r} + W_q \overline{N}_B \left(\frac{(1-\alpha)n_M^{r}\ln(p_B)}{(n_A^{+} - \alpha n_M^{r})\ln(p_A)} - 1 \right)$$

Con $\alpha = 0$, reemplazando $\overline{N}$ por $\overline{N}_B$, se obtiene una expresión idéntica a la del caso segregado. Las condiciones de primer y segundo orden son:

$$\left[n_M^r\right]: -\frac{W_n \overline{N}}{n_M^{r\,2}} + W_q \overline{N}_B \left(\frac{n_A^{+}(1-\alpha)\ln(p_B)}{(n_A^{+} - \alpha n_M^{r})^2 \ln(p_A)} \right) = 0 \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial n_M^{r\,2}} > 0$$

De las que se obtiene una expresión para el número y la tecnología óptimos[36]:

$$n_M^{*r} = \frac{\left(W_n n_A^{+}\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}}{\alpha\left(\frac{W_n\left|\ln(p_A)\right|}{n_A^{+}}\right)^{\frac{1}{2}} + (1-\alpha)\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(xxvi)}$$

$$q_M^{*r} = \left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A^{+}\ln(p_A)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \qquad \text{(xxvii)}$$

Con estos valores se obtiene el costo total en el óptimo, con clases mixtas y *objetivo realista*:

$$\begin{aligned} C_{n,q}^{mix} &= \frac{W_n \overline{N}}{n_M^r} + W_q \overline{N}_B q_M^r = W_n \overline{N} \alpha \frac{\left(\frac{W_n\left|\ln(p_A)\right|}{n_A^{+}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(W_n n_A^{+}\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}} + W_n \overline{N}(1-\alpha)\frac{\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(W_n n_A^{+}\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}} + W_q \overline{N}_B q_M^r \\ &= \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^{+}} + \overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^{+}\ln(p_A)}\right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A^{+}\ln(p_A)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \end{aligned} \qquad \text{(xxviii)}$$

Si $q_M^{*r} < 0$, la solución óptima no es interior, entonces no se aplica tecnología y sólo se corrige el número de alumnos, lo que corresponde a la *Estrategia N*.

[36] Desarrollo en Apéndice matemático XIII-A

1. Con el *objetivo ambicioso* de que los alumnos *tipo B* obtengan el mismo producto que los alumnos *tipo A* en clases segregadas, el costo es igual en ambos escenarios. Con un *objetivo realista*, es menos costoso lograrlo en un escenario de clases mixtas.

Demostración

P.D.: $C_{n,q}^{seg} = C_{n,q}^{mix}$ con *objetivo ambicioso*

E.E.: Empleando ecuaciones (xvi) y (xxiv) tenemos que:

$$C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B$$

y

$$C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

Por lo que se demuestra que $C_{n,q}^{seg} = C_{n,q}^{mix}$ si:

$$\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \quad \text{(xxix)}$$

Esto es evidente al simplificar (xxix)

$$2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} = \overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} = \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} = 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

QED

P.D.: $C_{n,q}^{seg} > C_{n,q}^{mix}$ con *objetivo realista*

E.E.: Empleando ecuaciones (xx) y (xxviii) tenemos que:

$$C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B$$

y

$$C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + \overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

Por lo que se demuestra que $C_{n,q}^{seg} > C_{n,q}^{mix}$ si:

$$\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B > \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + \overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \quad \text{(xxx)}$$

Esto es evidente al simplificar (xxx)

$$\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} > \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} \quad \text{(xxxi)}$$

QED

2. Al aplicar la *Estrategia C* en el sistema mixto con *objetivo realista*, el beneficio total es inferior al que se obtiene en el sistema segregado, ya que los alumnos *tipo A* logran un producto menor en el sistema mixto y esta caída no es compensada por el menor costo total.

Demostración

P.D.: $\Pi_n^{seg} > \Pi_n^{mix}$ con *objetivo realista*.

Reemplazando los costos por los de las ecuaciones (xx) y (xxviii) y sumando el producto agregado en cada caso se obtiene que se debe demostrar :

$$\Pi_n^{seg} = \overline{N}_A p_A^{n_A} + \overline{N}_B p_A^{n_A^+} - \left(\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B \right)$$

$$> \overline{N} p_A^{n_A^+} - \left(\frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + \overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} + W_q \overline{N}_B \left(\left(\frac{W_n \ln(p_B)}{W_q n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right) = \Pi_n^{mix}$$

E.E.: Por (xxxi) sabemos que los costos pueden ser simplificados a ambos lados de la inecuación, y por (xi) sabemos que los productos agregados pueden ser simplificados de la misma manera:

$$\alpha \overline{N} p_A^{n_A} + (1-\alpha) \overline{N} p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} > \overline{N} p_A^{n_A^+} - \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} \quad \text{(xxxii)}$$

Por lo que $\Pi_n^{seg} > \Pi_n^{mix}$, si:

$$\alpha\overline{N}p_A^{n_A} + \alpha\overline{N}p_A^{n_A^+} - \frac{W_n\overline{N}_A}{n_A} > -\frac{W_n\overline{N}_A}{n_A^+} \qquad \text{(xxxiii)}$$

Esto es evidente al simplificar (xxxiii) y reordenar términos:

$$p_A^{n_A} - \frac{W_n}{n_A} > p_A^{n_A^+} - \frac{W_n}{n_A^+} \qquad \text{(xxxiv)}$$

La inecuación (xxxiv) es idéntica a la (xii), que demostraba lo mismo para la *Estrategia N*. El análisis que sigue es, por lo tanto, el mismo que el empleado en ese caso. La expresión de la izquierda en (xxxiv) corresponde al beneficio óptimo por alumno *tipo A* en una escuela de su tipo con el número óptimo de alumnos (n_A). La expresión de la derecha expresa el beneficio por alumno *tipo A* en una escuela de su tipo con un número de alumnos mayor que el óptimo por clase (n_A^+). Este resultado es siempre subóptimo, por definición, ya que –fuera del óptimo– la disminución en los costos no compensa la caída en el producto. QED

3. Si se compara la *Estrategia C* con la *Estrategia N*, es siempre más barato obtener un resultado educativo, ya sea realista o ambicioso, solucionando un problema de minimización de costos que imponiendo una restricción a *n*. Esto está sujeto a que los precios relativos de los factores permitan una solución interior para la tecnología (*q*>0*) y a que $W_q \neq W_n \ln(p_B)/n_A \ln(p_A)$.

<u>Demostración</u>
Se desarrolla para el caso segregado con objetivo ambicioso pero es directo deducir la validez de la demostración para el caso de escuelas mixtas con objetivo ambicioso, y para ambos casos con objetivo realista. Si $W_q \neq W_n \ln(p_B)/n_A \ln(p_A)$, entonces:

P.D.: $C_{n,q}^{seg} < C_n^{seg}$ con objetivo realista o ambicioso
$C_{n,q}^{mix} < C_n^{mix}$ con objetivo realista o ambicioso

E.E.
Como se puede apreciar en las Tablas 6 y 7, entre los dos sistemas los costos difieren sólo para el objetivo realista y en el término de la izquierda ($W_n\overline{N}_A/n_A$ o $W_n\overline{N}_A/n_A^+$). Como este término se cancela al comparar estrategias, basta con comprobar la primera proposición para que se cumpla la segunda.

<u>Tabla 6</u>

Costo total de aplicar estrategias en sistema segregado

Costo total	Estrategia C	Estrategia N
Objetivo ambicioso	$C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B$	$C_n^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)}$
Objetivo realista	$C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B$	$C_n^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)}$

<u>Tabla 7</u>

Costo total de aplicar estrategias en sistema mixto

Costo total	Estrategia C	Estrategia N
Objetivo ambicioso	$C_{n,q}^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B$	$C_n^{seg} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)}$
Objetivo realista	$C_{n,q}^{mix} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B$	$C_n^{mix} = \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A^+} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A^+ \ln(p_A)}$

$$C_{n,q}^{seg} \le C_n^{seg}$$

$$\Leftrightarrow \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + 2\overline{N}_B \left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \overline{N}_B \le \frac{W_n \overline{N}_A}{n_A} + \frac{W_n \overline{N}_B \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{W_n W_q \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} - W_q \le \frac{W_n \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \qquad A \equiv \left(\frac{W_n \ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad B \equiv W_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2AB - B^2 \le A^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \le A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$

Cualquier diferencia entre A y B genera desigualdad y el costo es mayor con la *Estrategia N*.
Sólo si A=B ambos costos son iguales:

$$A = B \Leftrightarrow \left(W_n \frac{\ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} \right)^{\frac{1}{2}} = W_q^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow W_n \frac{\ln(p_B)}{n_A \ln(p_A)} = W_q$$

QED

XIII-A
Cálculo n^* **clases mixtas (** n_M^{*a} **ó** n_M^{*r} **) :**

$$\left[n_M^a\right]: -\frac{W_n\overline{N}}{n_M^{a\,2}} + W_q\overline{N}_B\left(\frac{n_A(1-\alpha)\ln(p_B)}{(n_A-\alpha n_M^a)^2\ln(p_A)}\right)=0$$

$$\left[n_M^r\right]: -\frac{W_n\overline{N}}{n_M^{r\,2}} + W_q\overline{N}_B\left(\frac{n_A^+(1-\alpha)\ln(p_B)}{(n_A^+-\alpha n_M^i)^2\ln(p_A)}\right)=0$$

Para simplificar la notación se reemplazará n_M^i (con i=a,r) por n:

$$[n]: -\frac{W_n\overline{N}}{n_M^{a\,2}} + W_q\overline{N}_B\left(\frac{n_A(1-\alpha)\ln(p_B)}{(n_A-\alpha n_M^a)^2\ln(p_A)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (n_A^2-2n_A\alpha n+\alpha^2n^2)W_n\overline{N}\ln(p_A)=n^2W_q\overline{N}_Bn_A(1-\alpha)\ln(p_B)$$

$$\Leftrightarrow n^2\left(W_n\overline{N}\alpha^2\ln(p_A)-W_q\overline{N}_Bn_A(1-\alpha)\ln(p_B)\right)-nW_n\overline{N}2n_A\alpha\ln(p_A)+W_n\overline{N}n_A^2\ln(p_A)=0$$

$$\Leftrightarrow n^2-n\frac{W_n\overline{N}\,2n_A\alpha\ln(p_A)}{W_q\overline{N}_Bn_A(1-\alpha)\ln(p_B)-W_n\overline{N}\alpha^2\ln(p_A)}+\frac{W_n\overline{N}n_A^2\ln(p_A)}{W_q\overline{N}_Bn_A(1-\alpha)\ln(p_B)-W_n\overline{N}\alpha^2\ln(p_A)}=0$$

$$\Leftrightarrow n^2-\frac{1}{\frac{W_q\overline{N}_Bn_A(1-\alpha)\ln(p_B)}{W_n\overline{N}\,2n_A\alpha\ln(p_A)}-\frac{W_n\overline{N}\alpha^2\ln(p_A)}{W_n\overline{N}\,2n_A\alpha\ln(p_A)}}+\frac{1}{\frac{W_q\overline{N}_Bn_A(1-\alpha)\ln(p_B)}{W_n\overline{N}n_A^2\ln(p_A)}-\frac{W_n\overline{N}\alpha^2\ln(p_A)}{W_n\overline{N}n_A^2\ln(p_A)}}=0$$

$$\Leftrightarrow n^2-n\frac{1}{\frac{W_q\overline{N}_B\ln(p_B)(1-\alpha)}{W_n\overline{N}\ln(p_A)2\alpha}-\frac{\alpha}{2n_A}}+\frac{1}{\frac{W_q\overline{N}_B\ln(p_B)(1-\alpha)}{W_n\overline{N}n_A\ln(p_A)}-\frac{\alpha^2}{n_A^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow n^2-n\frac{1}{\frac{B}{2\alpha}-\frac{\alpha}{2n_A}}+\frac{1}{\frac{B}{n_A}-\frac{\alpha^2}{n_A^2}}=0 \qquad B=\frac{W_q\overline{N}_B\ln(p_B)(1-\alpha)}{W_n\overline{N}\ln(p_A)}$$

$$\Leftrightarrow n^2-n\frac{1}{\frac{Bn_A-\alpha^2}{2\alpha n_A}}+\frac{1}{\frac{Bn_A-\alpha^2}{n_A^2}}=n^2-n\frac{2\alpha}{B'}+\frac{n_A}{B'}=0 \qquad B'=\frac{Bn_A-\alpha^2}{n_A}$$

$$\Leftrightarrow n^*=\frac{\frac{2\alpha}{B'}\pm\sqrt{\left(\frac{2\alpha}{B'}\right)^2-4\frac{n_A}{B'}}}{2}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-B'n_A}}{B'}$$

$$\Leftrightarrow n^*=\frac{n_A\left(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\left(Bn_A-\alpha^2\right)}\right)}{Bn_A-\alpha^2}=\frac{n_A\left(\alpha\pm\sqrt{Bn_A}\right)}{Bn_A-\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow n_1^*=\frac{n_A\left(\alpha-\sqrt{Bn_A}\right)}{Bn_A-\alpha^2}=\frac{n_A\left(\alpha-\sqrt{Bn_A}\right)}{\left(\alpha+\sqrt{Bn_A}\right)\left(\alpha-\sqrt{Bn_A}\right)}=\frac{n_A}{\alpha+\sqrt{Bn_A}}$$

$$\wedge\ n_2^*=\frac{n_A\left(\alpha+\sqrt{Bn_A}\right)}{Bn_A-\alpha^2}=\frac{n_A\left(\alpha+\sqrt{Bn_A}\right)}{\left(\alpha+\sqrt{Bn_A}\right)\left(\alpha-\sqrt{Bn_A}\right)}=\frac{n_A}{\alpha-\sqrt{Bn_A}}$$

Se emplea n_1^*, porque n_2^* produce tecnología negativa. Se anota la norma de las raíces de logaritmos de número menores que 1, lo que es equivalente a cancelar los $\sqrt{i}$ que se producen en el numerador y denominador al obtener raíces imaginarias:

$$n_1{*}=\frac{\left(W_n\overline{N}\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}n_A}{\alpha\left(W_n\overline{N}\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}+\left(W_q\overline{N}_B\left|\ln(p_B)\right|(1-\alpha)n_A\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(W_n\overline{N}\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}n_A}{\alpha\left(W_n\overline{N}\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}+\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\overline{N}(1-\alpha)^2n_A\right)^{\frac{1}{2}}}\qquad \overline{N}_B=\overline{N}(1-\alpha)$$

$$=\frac{\left(W_n\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}n_A}{\alpha\left(W_n\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}+(1-\alpha)\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|n_A\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(W_nn_A\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}}{\alpha\left(\frac{W_n\left|\ln(p_A)\right|}{n_A}\right)^{\frac{1}{2}}+(1-\alpha)\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Cálculo de q caso mixto:

$$q{*}=\frac{(1-\alpha)n\ln(p_B)}{\ln(p_A)(n_A-\alpha n)}-1$$

$$=\frac{\dfrac{(1-\alpha)\left(W_nn_A\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\ln(p_B)}{\alpha\left(\frac{W_n\left|\ln(p_A)\right|}{n_A}\right)^{\frac{1}{2}}\pm(1-\alpha)\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(n_A\ln(p_A)-\dfrac{\alpha\left(W_nn_A\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\ln(p_A)}{\alpha\left(\frac{W_n\left|\ln(p_A)\right|}{n_A}\right)^{\frac{1}{2}}\pm(1-\alpha)\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}}\right)}-1$$

$$=\frac{(1-\alpha)\left(W_nn_A\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\ln(p_B)}{\alpha\left(\frac{W_n\left|\ln(p_A)\right|}{n_A}\right)^{\frac{1}{2}}n_A\ln(p_A)\pm(1-\alpha)\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}n_A\ln(p_A)-\alpha\left(W_nn_A\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\ln(p_A)}-1$$

$$=\frac{(1-\alpha)\left(W_nn_A\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\ln(p_B)}{\pm(1-\alpha)\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}n_A\ln(p_A)}-1\ \text{ se descarta } n_2^*$$

$$=\frac{\left(W_nn_A\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\ln(p_B)}{\left(W_q\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}n_A\ln(p_A)}-1$$

$$=\frac{\left(W_n\left|\ln(p_B)\right|\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(W_qn_A\left|\ln(p_A)\right|\right)^{\frac{1}{2}}}-1$$

Los desarrollos están para el objetivo ambicioso, la extensión al objetivo realista es trivial:

XIV-A

Se construyen categorías a partir de la siguiente clasificación de 2.509 cursos en 1372 escuelas de la Región Metropolitana. Las categoría se refieren a la cantidad de alumnos en la clase (n_) y a la cantidad de cursos en el nivel (cur_)

n1: clases con 1-4 alumnos
n5: clases con 5-9 alumnos
n10: clases con 10-14 alumnos
n15: clases con 15-19 alumnos
n20: clases con 20-24 alumnos
n25: clases con 25-29 alumnos
n30: clases con 30-34 alumnos
n35: clases con 35-39 alumnos
n40: clases con 40-44 alumnos
n45: clases con 45-48 alumnos

cur1: 1 curso en el nivel
cur2: 2 cursos en el nivel
cur3: 3 cursos en el nivel
cur4: 4 cursos en el nivel
cur5: 5 cursos en el nivel
cur6: 6 cursos en el nivel
cur7: 7 cursos en el nivel
cur8: 8 cursos en el nivel
cur12: 12 cursos en el nivel

Cantidad de cursos en cada categoría por dependencia

PSUB (cantidad de cursos)

	cur1	cur2	cur3	cur4	cur5	cur6	cur7	cur8	cur12	suma	%
n1	7	0	0	0	0	0	0	0	0	*7*	*0,00*
n5	19	0	0	0	0	0	0	0	0	*19*	*0,01*
n10	34	0	0	0	0	0	0	0	0	*34*	*0,02*
n15	62	4	0	0	0	0	0	0	0	*66*	*0,04*
n20	61	36	1	0	1	0	0	0	0	*99*	*0,06*
n25	73	73	13	1	3	1	0	0	0	*164*	*0,11*
n30	72	134	45	16	11	2	4	0	5	*289*	*0,19*
n35	67	157	69	34	9	10	9	3	18	*376*	*0,24*
n40	49	151	96	55	24	14	1	5	22	*417*	*0,27*
n45	12	33	22	6	2	3	0	0	3	*81*	*0,05*
suma	*456*	*588*	*246*	*112*	*50*	*30*	*14*	*8*	*48*	*1552*	
%	*0,29*	*0,38*	*0,16*	*0,07*	*0,03*	*0,02*	*0,01*	*0,01*	*0,03*		

MUN (cantidad de cursos)

	cur1	cur2	cur3	cur4	cur5	cur6	cur7	cur8	cur12	suma	%
n1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*0*	*0,00*
n5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*0*	*0,00*
n10	4	0	0	0	0	0	0	0	0	*4*	*0,00*
n15	11	4	0	0	0	0	0	0	0	*15*	*0,02*
n20	20	37	6	1	0	0	0	0	0	*64*	*0,07*
n25	41	100	35	11	0	0	1	0	0	*188*	*0,20*
n30	29	106	52	21	0	0	5	0	0	*213*	*0,22*
n35	25	108	62	42	1	0	2	0	0	*240*	*0,25*
n40	18	74	57	42	7	0	6	0	0	*204*	*0,21*
n45	5	7	4	11	2	0	0	0	0	*29*	*0,03*
suma	*153*	*436*	*216*	*128*	*10*	*0*	*14*	*0*	*0*	*957*	
%	*0,16*	*0,46*	*0,23*	*0,13*	*0,01*	*0,00*	*0,01*	*0,00*	*0,00*		

XIV-B

Educación de la madre promedio por categoría (años) por dependencia

PSUB (promedio educaci—n madre por curso)

	cur1	cur2	cur3	cur4	cur5	cur6	cur7	cur8	cur12	*cur*
n1	11,9	0	0	0	0	0	0	0	0	*11,9*
n5	11,8	0	0	0	0	0	0	0	0	*11,8*
n10	10,7	0	0	0	0	0	0	0	0	*10,7*
n15	11,3	10,7	0	0	0	0	0	0	0	*11,2*
n20	12,0	11,4	13,8	0	13,2	0	0	0	0	*11,8*
n25	11,6	11,9	12,0	13,2	12,8	9,1	0	0	0	*11,8*
n30	11,4	11,9	12,5	10,9	11,2	10,0	12,0	0	11,7	*11,8*
n35	11,5	11,8	11,6	11,6	11,5	10,8	11,6	14,3	12,3	*11,7*
n40	11,8	12,5	12,2	11,6	11,7	11,4	12,3	14,7	12,0	*12,1*
n45	11,5	12,6	12,2	12,1	10,2	11,4	0	0	12,1	*12,2*
n	*11,5*	*12,0*	*12,1*	*11,5*	*11,6*	*11,0*	*11,8*	*14,5*	*12,1*	*11,8*

MUN (promedio educaci—n madre por curso)

	cur1	cur2	cur3	cur4	cur5	cur6	cur7	cur8	cur12	*cur*
n1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
n5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
n10	9,4	0	0	0	0	0	0	0	0	*9,4*
n15	8,9	9,3	0	0	0	0	0	0	0	*9,0*
n20	8,9	8,9	8,5	8,5	0	0	0	0	0	*8,9*
n25	9,3	9,3	9,1	9,1	0	0	12,0	0	0	*9,3*
n30	9,6	9,8	9,7	9,4	0	0	12,3	0	0	*9,8*
n35	9,8	10,1	10,2	9,8	8,6	0	10,6	0	0	*10,0*
n40	9,7	10,1	10,4	10,6	8,9	0	11,5	0	0	*10,3*
n45	10,4	10,8	12,4	11,7	9,7	0	0	0	0	*11,2*
n	*9,4*	*9,7*	*10,0*	*10,1*	*9,0*	-	*11,7*	-	-	*9,8*

XIV-C

Copago promedio por categoría (miles de pesos) por dependencia

PSUB (copago promedio por curso, en miles de pesos)

	cur1	cur2	cur3	cur4	cur5	cur6	cur7	cur8	cur12	cur
n1	17,2	0	0	0	0	0	0	0	0	*17,2*
n5	14,8	0	0	0	0	0	0	0	0	*14,8*
n10	12,1	0	0	0	0	0	0	0	0	*12,1*
n15	11,7	13,8	0	0	0	0	0	0	0	*11,9*
n20	18,8	15,9	16,9	0	25,0	0	0	0	0	*17,8*
n25	12,9	15,8	23,2	29,5	23,5	0,7	0	0	0	*15,2*
n30	12,8	14,9	26,3	9,6	17,1	0,6	20,2	0	20,1	*16,1*
n35	11,4	13,0	13,8	12,7	13,3	5,9	15,7	41,0	14,7	*13,0*
n40	11,1	15,1	14,5	9,9	15,6	9,5	18,8	10,85	10,9	*13,7*
n45	9,8	14,5	10,3	9,1	6,8	9,3	0	0	13,4	*11,8*
n	*13,1*	*14,6*	*16,6*	*10,8*	*15,8*	*7,4*	*17,2*	*40,8*	*13,4*	*14,2*

MUN (copago promedio por curso, en miles de pesos)

	cur1	cur2	cur3	cur4	cur5	cur6	cur7	cur8	cur12	cur
n1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
n5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
n10	1,2	0	0	0	0	0	0	0	0	*1,2*
n15	1,0	2,0	0	0	0	0	0	0	0	*1,2*
n20	1,5	1,2	1,4	0,4	0	0	0	0	0	*1,3*
n25	1,2	1,3	1,2	1,0	0	0	0,4	0	0	*1,2*
n30	1,3	1,4	1,2	1,5	0	0	2,0	0	0	*1,4*
n35	1,1	1,4	1,3	1,3	1,8	0	1,2	0	0	*1,3*
n40	1,3	1,1	1,2	1,4	1,1	0	1,0	0	0	*1,2*
n45	1,2	1,7	1,0	1,3	2,0	0	0	0	0	*1,4*
n	*1,2*	*1,3*	*1,2*	*1,3*	*1,3*	-	*1,4*	-	-	*1,3*