

I N S T I T U T O D E E C O N O M Í A

TESIS de MAGÍSTER



The seal of the Pontificia Universidad Católica de Chile is circular and divided into four quadrants. The top-left quadrant contains a cross and a chalice. The top-right quadrant contains a building with a dome and a cross. The bottom-left quadrant contains a sun, a caduceus, and a book. The bottom-right quadrant contains a scale of justice. The text 'PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA' is written around the top inner edge, and 'DE CHILE' is written around the bottom inner edge. The seal is topped with a decorative crest.

2015

Trayectoria de Precios Colusivos con Incertidumbre

Elisa Greene M.



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA**

**TESIS DE GRADO
MAGISTER EN ECONOMIA**

Greene Morales, Elisa

Diciembre, 2015



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA**

Trayectoria de precios colusivos con incertidumbre

Elisa Greene Morales

Comisión

Eugenio Bibenrieth
Juan Pablo Montero

Santiago, Diciembre de 2015

Trayectoria de precios colusivos con incertidumbre

Elisa Greene M.*

17 de Diciembre, 2015

Abstract

Un fenómeno en el estudio ex-post de carteles es encontrar que las trayectorias de precios son ascendentes. En este trabajo se busca una forma de explicar estas trayectorias a través de modelar acuerdos colusivos con información privada entre las firmas. Así, los precios resultan en una herramienta, además de aumentar los beneficios, de aprendizaje sobre esta información privada. Por esto, lo interesante de estudiar es el hecho de que los precios tienen tres efectos positivos en factores que afectan la dinámica de un cartel: los beneficios, los incentivos al desvío y la magnitud del aprendizaje entre las firmas coludidas. Los principales resultados del modelo son que los precios son crecientes, la probabilidad de desvío también aumentan en el tiempo pero después de un punto, su estabilidad interna se fortalece.

*Estudiante Magister de Economía con mención en Organización Industrial, Pontificia Universidad Católica de Chile.

1 Introducción

Entender cómo se comportan los carteles es especialmente importante para la protección de la libre competencia, tanto para detectar acuerdos ilícitos como también para legislar de forma correcta para evitar que estos se creen o se mantengan. Esta importancia ha dado pie al desarrollo de una extensa literatura al respecto, abordándose a partir de distintas perspectivas y supuestos, tanto en forma teórica como también en forma empírica.

En muchos trabajos sobre colusión se asume como punto de partida que existen dos o más firmas que están compitiendo, y que al comenzar un acuerdo colusivo pasan instantáneamente desde un precio competitivo a aquel que maximice sus utilidades conjuntas por el tiempo que dure el cartel. Sin embargo, un modelo de este tipo puede en muchos casos parecer poco realista, ya que si un cartel aumenta su precio en forma brusca, su probabilidad de detección posiblemente será alta. Además, como se puede ver en la Figura 1 y 2, hay evidencia empírica que muestra que esto no se ha cumplido en algunos carteles, como es el caso de la lisina o el del ácido cítrico, ambos en la década de los 90 en Estados Unidos. En los mencionados casos los precios tienen una trayectoria en ascenso al inicio del cartel, y no un cambio brusco en el precio hacia un estado estacionario estable.

Figura 1. Precios Ácido Cítrico:
Febrero 1990 - Marzo 1997

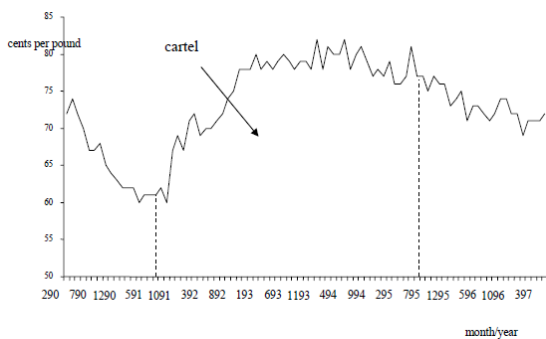
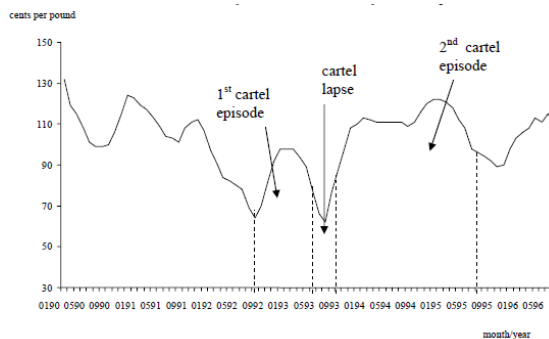


Figura 2. Precios Lisina:
Enero 1990 - Abril 1996



Fuente: Apéndice "*The impact of collusion on price behavior: Empirical results from two recent cases*",
Bolotova Y, Connor J y Miller D (2007)

Harrington (2005) intenta explicar esta gradualidad de los aumentos de precios planteando un modelo de colusión que considera la probabilidad de detección del cartel, la que de ocurrir produce el fin de este y el pago de multas proporcionales a los daños producidos. En su modelo, la probabilidad de detección depende de la magnitud con la cual varían los precios, por lo que si estos pasan bruscamente desde un precio competitivo a uno monopolístico, es altamente probable que el cartel sea detectado por las autoridades. De esta forma, las firmas internalizan lo anterior y acuerdan un aumento de precios que minimiza la probabilidad de detección, lo que resulta en una trayectoria de precios creciente hasta alcanzar un estado estacionario. Así, este modelo

logra explicar trayectorias ascendentes de precios en un cartel, como una estrategia que utilizan las firmas para evitar la detección por parte de las autoridades fiscalizadoras.

El objetivo de este trabajo es mostrar una forma alternativa de explicar trayectorias ascendentes de precios en acuerdos colusivos, no a través de la relación del cartel con agentes externos como en el modelo de Harrington, sino que como parte de una interacción dinámica interna del cartel cuando existe información privada entre las firmas. En particular, el modelo intenta capturar el efecto del desconocimiento de ciertos factores que determinan la probabilidad de cumplimiento del acuerdo que tienen cada una de las firmas participantes del cartel. De esta forma, se plantea un modelo donde los jugadores querrán obtener más información sobre su compañero de acuerdo para así disminuir el riesgo de desvío.

Específicamente, en este trabajo la fuente de incertidumbre será sobre el factor de descuento intertemporal que tienen los jugadores, esto es, la valoración relativa entre los beneficios presentes y futuros. Este factor, que también puede ser entendido como una tasa de impaciencia, definirá entonces el sobreprecio máximo que puede sostener un cartel sin que el participante más impaciente se desvíe con tal de maximizar sus beneficios de corto plazo, rompiendo de esta forma el acuerdo. Es por ello que el elemento clave del modelo que aquí se plantea es la definición de este factor de descuento como información privada de cada una de las firmas participantes, lo cual, como se verá, genera una interesante dinámica dentro del cartel.

Aun cuando el factor de descuento tradicionalmente se ha definido en función de la tasa de interés (información pública), existen diversas razones para considerar que este factor puede constituir finalmente información privada, como por ejemplo diferencias en el ciclo de vida de los productos, la posible presión que tengan gerentes por obtener resultados de corto plazo o también diferencias en su relación con el mercado de capitales. Es por eso que es razonable y realista considerar que el factor de descuento pueda ser desconocido y también diferente entre firmas, aunque sean parte de la misma industria.

Existen en la literatura distintos enfoques sobre incertidumbre en el factor de descuento. Por ejemplo, el trabajo de Baye y Jansen (1996) estudia juegos repetidos en mercados oligopólicos cuando la tasa de interés varía estocásticamente en cada periodo. En este encuentran que si la tasa de interés no es observable al momento de tomar decisiones y las realizaciones son independientemente distribuidas en el mismo soporte, se puede mantener el teorema de folk con estrategias gatillo¹ si la media de la distribución es cercana a 1, equilibrio que no puede mantenerse cuando la tasa de interés es observable al momento de tomar decisiones. Así, concluyen que se pueden sostener estrategias de gatillo sin necesidad de asimetrías de información o incertidumbre sobre demanda o costos. Por otra parte, el trabajo de Dal Bó(2007) estudia la colusión tácita cuando existen fluctuaciones aleatorias de tasa de interés. En este caso, los

¹Esta estrategia establece que en el primer periodo el jugador comience cooperando, y que continúe haciéndolo mientras también lo haga el otro jugador.

jugadores sí ven la realización de la tasa de interés antes de tomar las decisiones y el principal resultado del modelo es que los precios y utilidades del acuerdo no solo dependen del nivel del factor de descuento, sino que también de la volatilidad. Específicamente, las ganancias dependen negativamente de la volatilidad de la tasa de interés, razón por la cual remarcan la importancia de tomarla en cuenta en estudios empíricos.

En una línea diferente, Harrington y Zhao (2012) estudian la dinámica de una colusión tácita cuando hay incertidumbre sobre el factor de descuento de las firmas. Establecen colusión tácita como la comunicación a través de señales, que en este caso serían los precios. Las firmas pueden ser de tipo paciente o impaciente y el equilibrio tendrá dos fases, una de aprendizaje a través de las señales (precios), y luego una fase colusiva donde los tipos ya han sido revelados. De esta forma buscan entender la dinámica del equilibrio donde hay dos fuentes de incertidumbre, ya que por un lado se desconoce si el otro se va a coludir en algún momento, y por otro, si es que se va a coludir, quién liderará el acuerdo enviando las primeras señales. Concluyen que si la probabilidad de que los jugadores sean de tipo paciente es suficientemente alta, la probabilidad de colusión será positiva pero siempre menor a uno, ya que la fase de aprendizaje se puede hacer muy larga.

En el presente trabajo se utilizarán algunos elementos de la literatura mencionada. Habrá dos firmas intentando coludirse de manera explícita, de las cuales una podrá tener distintos tipos de acuerdo a su factor de descuento, no contando la otra firma con esta información, sino solo con creencias sobre su distribución de probabilidad. Así, como Harrington y Zhao (2012) el modelo incorporará el uso de los precios como herramienta de aprendizaje sobre el factor de descuento desconocido, ya que la respuesta de las firmas ante acuerdos a distintos niveles de precios, revelará parcialmente la información privada de los agentes.

El principal objetivo es encontrar la trayectoria óptima de precios en este tipo de interacciones, lo cual parece interesante dada la existencia de distintas fuerzas que afectan el equilibrio, ya que, además de existir el clásico trade-off entre aumentar los beneficios conjuntos y aumentar la probabilidad de desvío, en este modelo se agrega el que la magnitud del aprendizaje sobre la información privada depende también del precio acordado por el cartel en cada período. Esto se mostrará inicialmente con un modelo simple, basado en tiempo finito y tipos de jugadores discretos.

Un segundo objetivo es poder entender la dinámica de estas interacciones, para poder analizar la estabilidad interna de los acuerdos a lo largo del tiempo, es decir, que tan probable es que sea sostenible un cartel cuando existe información privada entre firmas coludidas. Para ello se exponen dos extensiones al modelo simple en que se eliminan la mayoría de sus restricciones, se incorpora tiempo infinito y se consideran tipos de jugadores continuos para comprender el comportamiento de los jugadores.

El trabajo se organiza de la siguiente forma: En la sección 2 se presenta el modelo simple junto con algunos ejemplos; en la sección 3 se presentan dos modelos más generales con tipos continuos; finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones y posibles trabajos futuros en base a lo encontrado.

2 Un modelo simple

Comenzamos con un modelo simple donde las firmas o jugadores, indexados por $i \in (1, 2)$, deciden coludirse. Cada jugador tiene un tipo $\theta_i \in (A, B, C)$, que representa el factor de descuento que tiene, β_θ , donde $\beta_A < \beta_B < 0.5 < \beta_C$ y $\beta_C \geq 0.5$. Es conocimiento común que la firma 1 es de tipo C , mientras que el tipo de la firma 2 es información privada, de la cual la firma 1 solo tiene creencias sobre su distribución. El factor de descuento asociado a cada tipo (β_A , β_B y β_C) es información pública. Con probabilidad c la firma 2 es de tipo C , con probabilidad b es de tipo B y con probabilidad $1 - b - c$ es de tipo A . Al comienzo del juego la firma 1 elige un precio, el cual podrá servir, luego de observar la acción de la firma 2, para aprender sobre el tipo de esta lo que se refleja en la actualización de creencias sobre el tipo de la firma 2.

Al inicio de la interacción la firma 1 decidirá si aprender sobre el tipo de la firma 2 a través del precio o directamente cobrar el precio máximo. Este aprendizaje se realiza a través de poner precios tales que uno o más tipos se desviarían en el primer periodo. Luego, si elige aprender, si la firma 2 mantiene el acuerdo, se elige el precio que maximice las utilidades del cartel y se compromete a esto en el primer periodo. La masa de consumidores se normaliza a 1, cada uno tiene una valoración v por el objeto perecible y los costos de producción se normalizan a cero. En caso de no existir acuerdo, las firmas compiten en precios.

Así, la firma 1 puede elegir entre estrategias $E \in (I, II)$:

- I. Probar "suave": Elegir un precio tal que se pueda aprender sobre el tipo de la firma 2 haciendo que el tipo de menor factor de descuento se desvíe y así actualizar las creencias.
- II. Probar "fuerte": Elegir precio monopólico igual a v , con lo que solo se mantendría el acuerdo si la firma 2 es de tipo C y así aprendería el tipo de la firma 2 en el primer periodo.

Ahora desarrollamos cada alternativa, donde definimos los precios para el periodo t para la estrategia E como $P_{t,E}$. Si se sigue la estrategia I, en el primer periodo elige un precio tal que el tipo A se desvíe y para maximizar utilidades deja indiferente al tipo B entre cumplir el acuerdo

el primer periodo y luego llevarse todo el mercado, ya que en el segundo periodo se pondrá el precio máximo, y desviarse en el primer periodo. Así, el precio $P_{1,I}$ debe cumplir:

$$P_{1,I} * 1 \leq \frac{P_{t,I}}{2} + \beta_B v$$

Donde reemplazamos la desigualdad por igualdad asumiendo que ante indiferencia elige mantener el acuerdo, despejamos el precio y obtenemos:

$$P_{1,I} = 2\beta_B v$$

En caso de no haber desvío, se deben actualizar las creencias sobre la firma 2, ya que en este caso no habría posibilidad que fuera de tipo A . Así, esta sería de tipo B con probabilidad $\frac{b}{b+c}$ y de tipo C con probabilidad $\frac{c}{b+c}$. Así en el segundo periodo, dado que si es de tipo B y se desviará en la segunda etapa, conviene cobrar precio monopólico, $P_{2,I} = v$ y seguir haciendolo se ese periodo en adelante.

Para la estrategia II, se eligen precios $P_{1,II} = P_{2,II} = v$ que corresponde al precio máximo. En este caso la actualización en caso de desvío es $c = 0$. Si la firma 2 es A o B , nunca mantendrá el acuerdo y en caso contrario lo mantendrá siempre.

Los beneficios de ambas firmas en cada caso se pueden ver en la Tabla 1:

Tabla 1: Beneficios según estrategia para firma 1

	Utilidad Firma 1
Estrategia I	$v \left((b+c)\beta_B + \frac{\beta_C c}{2(1-\beta_C)} \right)$
Estrategia II	$\frac{cv}{2(1-\beta_1)}$

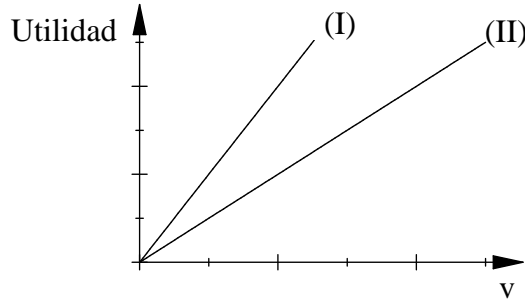
Para ver como se comparan las estrategias para distintos valores de los parámetros desde el punto de vista de la firma 1, comparamos los efectos tanto de la disposición a pagar como de las creencias sobre la paciencia de la firma 2. Primero, derivamos tanto la utilidad de la estrategia I como la II:

$$\frac{\partial \pi_I}{\partial v} = (b+c)\beta_B + \frac{\beta_C c}{2(1-\beta_C)} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \pi_{II}}{\partial v} = \frac{c}{2(1-\beta_1)} \quad (2)$$

Ambas utilidades en función de v serían una recta desde el origen, por lo que la derivada define cuál es óptima. Así, se puede ver que (1) será mayor que (2) si $\frac{c}{2(b+c)} \leq \beta_B$. Esto se ilustra en el Gráfico 1: la estrategia I es superior a la II mientras se cumpla el supuesto mencionado, para cualquier valor de v .

Gráfico 1: Utilidad de cada estrategia según la valoración de los consumidores



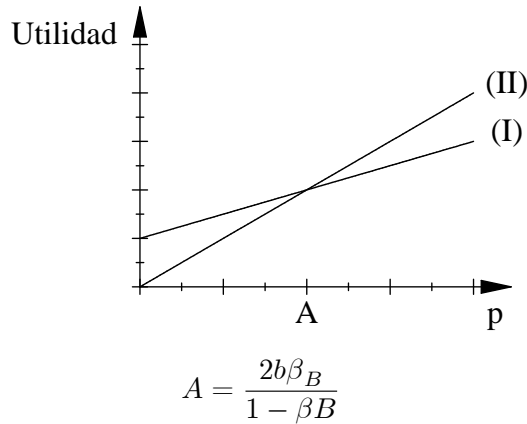
Realizamos el mismo análisis pero ahora viendo que pasa ante aumentos de la probabilidad de que sea tipo C con todo lo demás constante. Si derivamos las utilidades con respecto a c :

$$\frac{\partial \pi_I}{\partial c} = \beta_B v + \frac{\beta_C v}{2(1 - \beta_C)} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \pi_{II}}{\partial c} = \frac{v}{2(1 - \beta_1)} \quad (4)$$

Se puede ver que (3) será menor que (4), si $\beta_B < 0.5$, lo que se cumple por definición. Pero en este caso, las utilidades en función de c no parten ambas en el origen, sino que la estrategia I tiene una constante positiva y la II parte del origen. Así, a pesar de que la pendiente de π_{II} sea mayor, habrá valores de ρ para los cuales la estrategia I será la óptima. Esto se ilustra en el gráfico 2 y consistente con el supuesto realizado anteriormente, el corte se produce en $c = \frac{2b\beta_B}{1 - \beta_B}$. Para valores bajo este valor, se preferirá la estrategia I y a medida que ρ aumenta, la estrategia II supera a la I. La intuición de esto es que para valores muy altos de ρ , lo óptimo es arriesgarse con el precio máximo, ya que es muy probable que la firma 2 mantenga el acuerdo.

Gráfico 2: Utilidad de cada estrategia según la probabilidad de tipo H .



Así, podemos establecer las condiciones bajo las cuales la estrategia óptima consiste en precios crecientes:

Supuesto 1(S1) El factor de descuento del tipo intermedio (B) debe ser mayor a un límite, específicamente, $\beta_B \geq \frac{c}{2(b+c)}$.

Así podemos establecer un primer resultado:

Proposición 1 Si se cumple el supuesto S1, la estrategia óptima para la firma 1 es probar "suave", es decir, subir gradualmente los precios antes de llegar al precio máximo.

Demostración Como se mostró, cuando se cumple el supuesto S1, la estrategia I trae mayores beneficios para la firma 1 para cualquier valor de v .

Con este simple modelo podemos ver los incentivos de la firma 1 a utilizar los precios como una herramienta para aprender del tipo de la firma 2 y así maximizar ganancias del acuerdo colusivo en el largo plazo. Cuando se tienen valores intermedios de creencia sobre el tipo H convendría aprender de a poco, ya que a medida que c se acerca a 1 valdría la pena simplemente poner el precio máximo lo que derivaría en un aprendizaje instantáneo del tipo de la firma 2. Así este modelo sirve como motivación para el modelo general que se presenta más adelante, donde se permite que el tipo de la firma 2 sea continuo y que los precios de acuerdo sean una trayectoria de equilibrio.

A continuación se muestran ejemplos con más tipos y distintas probabilidades. El objetivo es ver qué estrategia conviene para distintos valores de los parámetros.

2.1 Ejemplos numéricos

A continuación se muestran dos ejemplos numéricos para ver cómo cambian las decisiones tanto de precios como estrategias para distintos valores de los parámetros cuando existen más de tres tipos posibles.

Supongamos $\beta_H = 0.5$ y el factor de descuento de la firma 2 puede tomar los siguientes valores:

β_θ	Probabilidad
$\beta_A = 0.2$	1/4
$\beta_B = 0.3$	1/4
$\beta_C = 0.4$	1/4
$\beta_D = 0.5$	1/4

Llamamos $t = 1..T$ al periodo y a $P_{I,t}$ a los precios en cada periodo para la estrategia I y estos se definen de la siguiente forma. En el segundo periodo se quiere dejar indiferente al segundo tipo, por lo que el precio sería

$$P_{I,2} = 2\beta_2v$$

Y en el primer periodo, se deja indiferente al primer tipo entre desviarse en este periodo o mantener y desviarse ante el precio $P_{I,2}$, por lo que el precio sería:

$$P_{I,1} = 4\beta_1\beta_2v$$

Así, las utilidades de cada estrategia son las siguientes:

Estrategia	Utilidad Firma 1
I	$0.3v$
II	$0.25v$

Como se puede ver, estrategia óptima es la primera y además probar aprender de a poco, es decir, probar a todos los posibles tipos de la firma 2 subiendo los precios de a poco.

Luego, probamos con una distribución distinta de probabilidad y hacemos el mismo análisis que en el ejemplo anterior.

β_θ	Probabilidad	Estrategia	Utilidad Firma 1
$\beta_A = 0.2$	$1/5$	I	$0.35v$
$\beta_B = 0.3$	$1/5$	II	$0.4v$
$\beta_C = 0.4$	$1/5$		
$\beta_D = 0.5$	$2/5$		

Con estos ejemplos podemos ver las distintas fuerzas que actúan en el modelo y que factores incentivan o no el aumentar gradualmente los precios para poder conocer mejor a la otra firma. Así, al igual que en la sección anterior, podemos concluir que esta gradualidad es más conveniente cuando la probabilidad de que la otra firma sea paciente no es lo suficientemente alta, es decir, que haya un nivel suficiente de incertidumbre sobre la sostenibilidad del precio máximo.

Es importante destacar, que en este modelo simple es clave el compromiso de la firma 1 a cobrar el precio máximo en el último periodo, ya que de no ser así, en el segundo periodo le convendría poner un menor precio y con esto, la firma 1 se desviaría en el primer periodo y colapsaría el equilibrio. Por esto, es importante extender el modelo al tiempo infinito permitiendo que las trayectorias de precios sean elegidos tomando en cuenta todos los efectos dinámicos del equilibrio.

Para estudiar estos efectos en profundidad, en la siguiente sección se muestran dos modelos más generales, en que el tipo de la firma es continuo. Con este modelo ya se demostró que para algunos valores de creencias es óptimo subir el precio colusivo en forma escalonada, por lo que los siguientes modelos que se plantean buscan explicar la dinámica de estas trayectorias, tanto en términos de duración del acuerdo como también en términos de estabilidad interna del cartel a lo largo del tiempo.

3 Extensión: Modelos generales

En esta sección se muestran dos extensiones hacia versiones más generales del modelo anterior, de tal forma de encontrar explicaciones más precisas de las interacciones entre firmas cuando existe información privada. Ya se mostró que lo óptimo puede ser aumentar gradualmente los precios, pero estos modelos buscan ver el detalle de las trayectorias de precios en equilibrio y además entender la dinámica de este. Específicamente, comprender la estabilidad interna de estos acuerdos, es decir, que tan probable es que duren en el tiempo y analizar cuándo son más débiles. Con todo lo anterior también se busca entender cómo es el aprendizaje óptimo entre firmas, así como también la forma en que este aprendizaje permite al cartel acercarse al precio monopólico minimizando al mismo tiempo la probabilidad de desvío de alguno de sus participantes con tal de maximizar el valor esperado del cartel.

Primero veremos una generalización en que el tipo de la firma 2 pasa a ser continuo y el problema pasa a ser de programación dinámica, en el cual la variable estado es el soporte de la distribución de probabilidad del factor de descuento. Luego, se presenta un modelo siguiendo la literatura de reputación, con lo cual la fuente de incertidumbre entre firmas deja de estar restringida al factor de descuento.

3.1 Modelo 1: Incertidumbre en el factor de descuento con tipos continuos

Como ya se adelantó, a continuación se presenta un modelo más general en que el tipo de la firma 2 es continuo y que tiene como objetivo encontrar una trayectoria de precios de equilibrio. La firma 1 tendrá un factor de descuento $\beta_1 = \bar{\beta}$ conocido por todos los participantes. Por otro lado, existirá incertidumbre sobre el factor de descuento de la firma 2, donde solo se conocerá la distribución de este. Específicamente, $\beta_2 \sim U[\beta_t, \bar{\beta}]^2$. A continuación se analizan las estrategias de ambos jugadores, comenzando por la firma 2.

3.1.1 Problema de la Firma 2

Consideremos las decisiones de la firma 2. Esta jugará en cada periodo t en estrategias puras, tal que

$$V(\beta_t) = \max \{m(\beta_t) + \beta_2 V(\beta_{t+1}); 2m(\beta_t)\} \quad (5)$$

Donde la expresión de la izquierda es la utilidad esperada de mantener el acuerdo y la de la derecha es la utilidad de desviarse en ese periodo. Se define $m(\beta_t)$ como los beneficios del acuerdo en cada periodo para cada firma, por lo que en caso de desvío la firma obtiene los

²Se podría realizar el mismo análisis con otra distribución, pero por simplicidad se elige la uniforme.

beneficios de ambos ya que se lleva todo el mercado. Este beneficio $m \in (0, \bar{m})$, lo elige la firma 1 maximizando su utilidad y la elección óptima queda en función de β_t y la firma 2 conoce esta maximización. La elección de beneficios será tal que la firma 2 elegirá una de las dos acciones.

La firma 1 elegirá utilidades tales que definan "threshold" para el factor de descuento, por lo que firmas con factor de descuento bajo ese límite se desviarán y se actualizará el límite inferior del soporte de la distribución. Por lo tanto, en cada periodo este soporte se actualizará de la siguiente forma:

$$\beta_{t+1} = \frac{m(\beta_t)}{V(\beta_{t+1})} \quad (6)$$

Ya que depende de la función valor del próximo periodo, debemos caracterizarla para poder encontrar la transición de la cota inferior de la distribución para poder encontrar el equilibrio. Para que esto sea posible, se deben testear las condiciones de Blackwell, para demostrar que el operador T es una contracción y así tenga un único punto fijo. Sea $C(B)$ el espacio de funciones acotadas, continuas y crecientes $V : B \rightarrow \mathbb{R}$ con la norma del supremo. El operador $T : C(B) \rightarrow C(B)$ es tal que:

$$(TV)(\beta_t) = \max \{m(\beta_t) + \beta_2 V(\beta_{t+1}); 2m(\beta_t)\}$$

Como se muestra en el apéndice, las condiciones de Blackwell se cumplen, por lo que el operador T es una contracción por lo que tiene un único punto fijo.

3.1.2 Problema de la firma 1

La firma 1 solo conoce la distribución de probabilidad del factor de descuento de la firma 2, con lo que puede conocer la probabilidad de desvío en función de la utilidad de acuerdo en el periodo. Así, en cada periodo elige esta utilidad y así en caso de no haber desvío puede "descartar" algunos factores de descuento para los cuales a la firma 2 no le habría convenido mantener el acuerdo, por lo que se actualiza el soporte inferior de la distribución y con esto, la probabilidad de desvío en el siguiente periodo, tal como se estableció en la sección anterior.

Definimos η_t como la probabilidad de desvío en el periodo t , y está será la probabilidad acumulada de los factores de descuento estén por debajo del límite que depende de la utilidad elegida por el coordinador. Así, dado que distribuye uniforme:

$$\eta_t(m, \beta_t) = \Pr \left(\beta_2 \leq \frac{m}{V(\beta_{t+1})} \right) = \frac{\frac{m}{V(\beta_{t+1})} - \beta_t}{\bar{\beta} - \beta_t} = \frac{\beta_{t+1} - \beta_t}{\bar{\beta} - \beta_t} \quad (7)$$

Donde vemos que esta probabilidad es creciente en m , lo que tiene sentido ya que a mayor utilidad de desvío se limitan los valores que puede tomar el factor de descuento que permita que

la firma 2 no se desvíe.

Por lo que el problema de la firma 1 sería

$$V^1(\beta_t) = \max_m (1 - \eta_t(m, \beta_t)) [m + \beta_1 V^1(\beta_{t+1})] \quad (8)$$

Donde se obtendrá $m^*(\beta_t)$. Se puede ver que aparece un trade off entre el aumento de precios para aumentar ganancias de periodo versus el aumento en la probabilidad de desvío. Esto porque un aumento de precios disminuye la probabilidad de mantención del acuerdo, además de aumentar los beneficios de este. Igual que para la firma 2, debemos testear las condiciones de Blackwell, que también está en el apéndice. Así, el operador T es una contracción por lo que tiene un único punto fijo.

Proposición 2 T es una contracción, V^1 es estrictamente cóncava y continuamente diferenciable.

Demostración ver apéndice

Con esta proposición podemos garantizar que el operador T tiene un unico punto fijo, que la función V tiene un máximo y que lo podemos encontrar derivando, por lo que se garantiza que el problema tiene solución.

El objetivo de la generalización del modelo inicial es poder entender la dinámica del equilibrio. Con el simple ya se pudo ver que es óptimo que las firmas suban gradualmente el precio, pero es interesante ver cómo se comporta a lo largo del equilibrio la probabilidad de desvío de la firma 2, ya que así se podría analizar la estabilidad interna de los carteles según las características del escenario en que se desenvuelven.

En la siguiente sección se muestra otra extensión que tiene el mismo objetivo pero se levanta la restricción de incertidumbre al factor de descuento y se permite una visión más general de la información privada entre firmas.

3.2 Modelo 2: Construyendo reputación en un acuerdo colusivo

Para el desarrollo del modelo reputación en acuerdos colusivos se sigue el trabajo de Kreps y Wilson (1982), donde se explica cómo construir reputación cuando hay incertidumbre sobre al menos uno de los participantes del juego. Este trabajo se basa en la "*chain store paradox*" de Selten (1978), en el cual se modela una serie finita de potenciales entrantes a un mercado donde existe un monopolista y donde éste prefiere que los entrantes se queden afuera y, en caso de que entren, el costo de pelear la entrada sea mayor al de ceder. De esta forma, pelearía las primeras etapas hasta convencer a los entrantes de que va a continuar peleando, y en las últimas etapas

cedería. Sin embargo, Selten muestra que por inducción hacia atrás, el único equilibrio posible es que ocurra entrada y que el monopolista ceda desde un comienzo.

Kreps y Wilson, entre otros autores, enfrentan la *chain store paradox* con información incompleta sobre el monopolista. El modelo plantea que con alguna probabilidad, que puede ser muy pequeña, el monopolista es de tipo "fuerte" y le conviene pelear cada vez que la entrada ocurra. Así, si el monopolista es de tipo "normal", querrá imitar al tipo fuerte y pelear hasta que la entrada no ocurra, es decir, que los entrantes estén convencidos de que el monopolista es del tipo fuerte. Este modelo también se extiende estableciendo información incompleta sobre los tipos de ambos jugadores. La idea principal de este trabajo es desarrollar la construcción de reputación en juegos repetidos, donde conviene jugar estrategias que en el modelo estático no serían de equilibrio, para alcanzar un mejor resultado en el largo plazo y por ende, romper la *chain store paradox* de Selten.

En esta línea, se modela un acuerdo colusivo entre dos firmas en tiempo finito. Las firmas o jugadores indexados por $i \in (1, 2)$, deciden coludirse. Cada jugador tiene un tipo $\theta_i \in (C, N)$, donde N representa al tipo Normal y C al tipo Colusivo. Cada jugador puede elegir en un espacio de dos acciones (M, D) , donde M representa mantener el acuerdo y D desviarse. El tipo C siempre elige M y el tipo normal realiza lo que maximiza su utilidad esperada. La estrategia del jugador 1 es de tipo C con probabilidad 1 y el prior de que el jugador 2 sea C es ϕ . Este prior se actualiza con regla de Bayes en cada periodo después de que se observe la acción elegida. Tienen factor de descuento β_θ , y se asume que β_C es cercano a uno y β_N es menor a 0.5. Esto implica que si ambos son tipo C , podrían mantener un acuerdo con utilidades monopólicas, las cuales pueden no ser compatibles con condiciones de no desvío en escenarios en que ambos sean N .

Ya que el modelo es de tiempo infinito, siguiendo el trabajo de Phelan (2006), es necesario incorporar reemplazo del tipo incierto, ya que en modelos de reputación no se puede llegar a un punto en que se sepa con "certeza" el tipo del jugador, lo que ocurriría si no existiera reemplazo. Así, con probabilidad ε un tipo Normal es reemplazado por un tipo Colusivo y con probabilidad δ , un tipo Colusivo es reemplazado por un tipo Normal.

Las firmas, en caso de no existir acuerdo, compiten en precios y venden un bien perecible. Se asumirá que en acuerdo, los precios podrán estar entre el competitivo y el monopólico y que además los costos de producción son cero. Por lo tanto, en caso que decidan competir, las utilidades son cero para cada firma.

3.2.1 Problema del tipo Normal

Los precios que elegirá el coordinador serán tales que el tipo Normal esté indiferente entre mantener el acuerdo y desviarse, así tras cada realización se pueda aprender sobre su tipo según lo que este juegue. Así, si la firma 2 es de tipo N , jugará estrategias mixtas, donde con probabilidad μ no se desviará, y con $(1 - \mu)$ si lo hará, tal que:

$$\frac{\pi^C(P_t(\phi_t))}{2} + \beta(1 - \varepsilon)V^N(\phi_{t+1}(\phi_t, \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))) = \pi^D(P_t(\phi_t)) + \beta(1 - \varepsilon)V^N(\varepsilon) \quad (9)$$

donde V^N es el pago esperado para el tipo normal. $V^N(\phi_{t+1})$ corresponde a los pagos para el tipo normal si mantiene el acuerdo y $V^N(\varepsilon)$ si se desvía. Esto porque cuando existe desvío en el periodo, el juego no se acaba, si no que en el siguiente periodo $\phi_{t+1} = \varepsilon$. Así, el coordinador enfrentará el trade off descrito en el modelo en horizonte finito, donde se busca aumentar precios para aumentar ganancias en ese periodo, pero al mismo tiempo estos aumentos de precios aumentaran la probabilidad de que el tipo Normal rompa el acuerdo³.

3.2.2 Problema de la firma 1

La firma 1 no conoce el tipo de la firma 2, pero tiene un prior el cual se actualiza periodo a periodo según las acciones de la firma 2 frente a los precios elegidos. En caso de no haber desvío, las creencias sobre si la firma 2 es de tipo colusivo se actualizarán por regla de Bayes, considerando las probabilidades de reemplazo:

$$\phi_{t+1}(\phi_t, \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))) = (1 - \delta) \left[\frac{\phi_t}{\phi_t + (1 - \phi_t)\mu(\phi_t, P_t(\phi_t))} \right] + \varepsilon \left[1 - \frac{\phi_t}{\phi_t + (1 - \phi_t)\mu(\phi_t, P_t(\phi_t))} \right]$$

Reordenando:

$$\phi_{t+1}(\phi_t, \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))) = (1 - \delta - \varepsilon) \left[\frac{\phi_t}{\phi_t + (1 - \phi_t)\mu(\phi_t, P_t(\phi_t))} \right] + \varepsilon \quad (10)$$

Esta será la ecuación de transición de la variable estado ϕ y es estrictamente decreciente en μ . El efecto del prior no es claro aún, ya que no se conoce el efecto de ϕ en μ , y lo más probable es que no sea constante. La intuición es que si a mayor probabilidad de desvío, este no ocurre, mayor es la actualización de la creencia hacia el tipo colusivo.

En caso de haber desvío, $\phi_{t+1} = \varepsilon$, ya que en ese caso se confirma que la firma 2 es de tipo Normal y la única forma que sea Colusivo es que este sea reemplazado por uno de este tipo, lo que ocurre con probabilidad ε .

³Esto se demuestra formalmente en la siguiente sección

Así, el problema de la firma 1 sería el siguiente:

$$V(\phi_t) = \max_{P_t} \phi_t [\pi^C(P_t(\phi_t)) + \beta V(\phi_{t+1}(\phi_t, \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))] + \\ (1 - \phi_t) [\mu(\phi_t, P_t(\phi_t))\{\pi^C(P_t(\phi_t)) + \beta V(\phi_{t+1}(\phi_t, \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))\} + ((1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))\beta V(\varepsilon))]$$

donde $V(\phi_t)$ y $V(\varepsilon)$ son los pagos esperados para el coordinador en cada caso, es decir, la suma de las utilidades de aquellos jugadores que estén cumpliendo con el acuerdo establecido.

Reordenando:

$$V(\phi_t) = \max_{P_t} (\phi_t + (1 - \phi_t)\mu(\phi_t, P_t(\phi_t))) [\pi^C(P_t(\phi_t)) + \beta V(\phi_{t+1}(\phi_t, \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))] \\ + (1 - \phi_t)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))\beta V(\varepsilon) \quad (11)$$

s.a (10), (9)

Podemos obtener la condición de primer orden de (11) :

$$(\phi_t + (1 - \phi_t)\mu(\phi_t, P_t(\phi_t))) \left[\frac{\partial \pi^C}{\partial P_t} + \beta \frac{\partial V}{\partial \phi_{t+1}} \frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial P_t} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial P_t} (1 - \phi_t) [\pi^C + \beta V(\phi_{t+1})] - \frac{\partial \mu}{\partial P_t} (1 - \phi_t) \beta V(\varepsilon) \quad (12)$$

luego, para demostrar que los precios óptimos son crecientes en ϕ_t , derivamos (12) con respecto a esta variable con $P_t = P_t^*$ siendo el precio óptimo:

$$\left[(1 - \mu) + (1 - \phi_t) \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial \phi_t} + \frac{\partial \mu}{\partial P_t^*} \frac{\partial P_t^*}{\partial \phi_t} \right\} \right] [\pi^C + \beta V(\phi_{t+1})] \\ + [\phi_t + (1 - \phi_t)\mu] \left[\beta \frac{\partial V}{\partial \phi_{t+1}} \left\{ \frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \phi_t} + \frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \phi_t} \right\} \right] - \beta V(\varepsilon) \left[\frac{\partial \mu}{\partial \phi_t} (1 - \phi_t) + (1 - \mu) \right] \quad (13)$$

Con todo lo anterior, en (18), se despeja $\frac{\partial P_t}{\partial \phi_t}$ y se obtiene la expresión (ya que se elige el precio óptimo):

$$\frac{\partial P_t^*}{\partial \phi_t} = \frac{A}{2(1 - \phi)\mu_{P_t} \left[\pi_{P_t}^C + \beta V_{\phi_{t+1}} \phi_{t+1} \mu_{P_t} \right]} \quad (14)$$

donde⁴

⁴Los sub índices indican la variable con respecto a la cual se está derivando.

$$\begin{aligned}
A = & \left[\pi^C + \beta(V(\phi_{t+1}) - V(\varepsilon)) \right] \left[\mu_{P_t} - (1 - \phi_t)\mu_{P_t\phi_t} \right] - (1 - \phi_t)\mu_{P_t}\beta V_{\phi_{t+1}}(\phi_{t+1} + \phi_{t+1}\mu_{P_t\phi_t}) \\
& - \left[1 - \mu + (1 - \phi_t)\mu_{\phi_t} \right] \left[\pi_{P_t}^C + \beta V_{\phi_{t+1}}\phi_{t+1}\mu_{P_t} \right] \\
& - [\phi_t + (1 - \phi_t)\mu] \left[\pi_{P_t\phi_t}^C + V_{\phi_{t+1}\phi_t}\phi_{t+1}\mu_{P_t} + V_{\phi_{t+1}}(\phi_{t+1}\mu_{\phi_t}\mu_{P_t} + \phi_{t+1}\mu_{P_t\phi_t}) \right]
\end{aligned}$$

Dado a que A está compuesto por diversas derivadas parciales, es difícil por el momento determinar si es mayor o menor a cero, por lo que se hace el siguiente supuesto:

Supuesto 3 (S3) El numerador de (14) definido en (15) es menor a cero.

Con lo que podemos tener un resultado preliminar para este modelo:

Proposición 3 Si se cumple el supuesto 3, los precios son crecientes en las creencias

Demostración Ver apéndice

Para terminar de caracterizar el equilibrio, se analiza también la dinámica de la trayectoria del acuerdo. Por un lado, interesa ver hasta qué punto, si es de tipo Normal, la firma 2 va a mantener el desvío. Esta enfrenta el trade off entre desviarse y obtener las utilidades de llevarse el mercado completo o esperar y así obtener mayor utilidad en el futuro, dado que los precios serán crecientes. La segunda opción puede ser atractiva en la trayectoria de los precios mientras las creencias estén creciendo, dada la Proposición 3, pero llegará un punto en que las creencias no pueden seguir creciendo, por lo que los precios tampoco. Así habrá un punto en que habrá desvío seguro, lo que se muestra a continuación:

Lema 1 Si el jugador 2 es de tipo N , se desviará un poco antes de llegar al precio monopolístico.

Demostración Por ahora supondremos, sin pérdida de generalidad, que δ es arbitrariamente cercano a cero y que además, estamos en un punto en el equilibrio cercano al precio monopolístico, que es el máximo posible. Se busca demostrar que μ llega a cero antes de los precios monopolísticos, es decir:

$$\frac{\pi^C(P_t(\phi_t))}{2} + \beta(1 - \varepsilon)V^N(\phi_{t+1}(\phi_t, \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))) < \pi^D(P_t(\phi_t)) + \beta(1 - \varepsilon)V^N(\varepsilon) \quad (16)$$

Sabemos que $\pi^C(P_t(\phi_t)) = \pi^D(P_t(\phi_t)) = \pi(P_t(\phi_t))$, ya que al existir competencia en precios en ausencia de acuerdo, el jugador que se desvía cobra un precio un infinitesimalmente menor al precio de acuerdo y se lleva todo el mercado, por lo que las utilidades agregadas del acuerdo son iguales para efectos prácticos. Además, si estamos cerca del precio máximo, las creencias estarían cercanas a uno, por lo que la actualización $\phi_{t+1} = 1$ (ya que asumimos que δ es cercano a cero). Esto porque para llegar a cobrar el máximo precio el coordinador debe estar medianamente

seguro de que el jugador es del tipo colusivo, para minimizar el riesgo de desvío. Además, $V^N(1) = \pi(P_t^M) + \beta(1 - \varepsilon)V^N(\varepsilon)$, donde P_t^M es el precio monopolístico. Esto es así porque si $\phi_{t+1} = 1$, se acordará precio monopolístico y dado que el tipo normal tiene un factor de descuento menor a 0,5, este se desviará seguro, si es que no lo hace antes. Así, (16) queda:

$$\beta(1 - \varepsilon) [\pi(P_t^M) + V^N(\varepsilon) \{\beta(1 - \varepsilon) - 1\}] < \frac{\pi(P_t(\phi_t))}{2} \quad (17)$$

Ya que el precio en la utilidad a la derecha de la desigualdad es cercano al precio monopolístico y el factor de descuento menor a 0.5, por lo que claramente se cumple. Así, queda demostrado que en caso de ser de tipo normal, la firma se desviará cerca del precio monopolístico. En caso contrario, se llegará a precio monopolístico y se mantendrá así en caso de no ser reemplazado, ya que en ese caso, habría desvío instantáneo y se vuelve al caso en que $\phi_t = \varepsilon$. ■

Esto significa que si no hay desvío se puede saber con relativa certeza que el jugador 2 es de tipo C , por lo que se puede cobrar precio monopolístico y así obtener las mayores utilidades posibles en acuerdo. Así el jugador 1 estaría probando al 2, subiendo los precios de a poco a medida que vaya conociéndolo más, hasta el punto en que se llega a una "prueba límite" que define el fin del juego. Ahora quedaría encontrar en qué momento ocurriría esto, es decir, cuanto antes del precio monopolístico el tipo Normal se desviaría con probabilidad 1.

Finalmente, el segundo factor de interés en cuanto a la dinámica del acuerdo es analizar su estabilidad interna a lo largo de la trayectoria. Esto se realiza a través del hazard rate, que sería:

$$h(\phi_t, P_t(\phi_t)) = (1 - \phi_t)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))$$

Proposición 4 El hazard rate $h(\phi_t, P_t(\phi_t))$ es creciente y cóncavo.

Demostración Ya que es la probabilidad de que exista desvío de parte de la firma 2, condicional en que no ha ocurrido aún. Por esto, es la probabilidad de que la firma sea tipo normal por la probabilidad de desvío derivada de la estrategia mixta. Primero, analizamos la primera derivada:⁵

$$h'(\phi_t, P_t(\phi_t)) = \underbrace{-\phi_t'}_{<0} \underbrace{(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))}_{\text{Creciente}} + \underbrace{-\mu'(\phi_t, P_t(\phi_t))}_{>0} \underbrace{(1 - \phi_t)}_{\text{Decreciente}} \quad (18)$$

Donde se pueden ver los dos efectos que actúan a través de los precios: el aumento en las creencias y la disminución de incentivos a mantener el acuerdo. Sin pérdida de generalidad, para

⁵ $h'(\phi_t, P_t(\phi_t)) = \frac{\partial h(\phi_t, P_t(\phi_t))}{\partial P_t}$

la demostración supondremos que ε y δ son cercanos a cero, por lo que no se considerarán en las derivadas de (6). Dado que $\phi'_t = \frac{\partial \phi_t}{\partial \mu} \mu'$, desarrollamos (18) y reordenando obtenemos:

$$h'(\phi_t, P_t(\phi_t)) = \frac{\phi(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))}{(\phi + (1 - \phi)\mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))^2} - 1$$

Donde para que sea creciente, el primer término debe ser mayor a 1. Podemos ver que este tiene por numerador una multiplicación de términos crecientes y el denominador consiste de la multiplicación de dos términos decrecientes $((1 - \phi)\mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))$ más uno creciente (ϕ) al cuadrado, por lo que es razonable hacer el siguiente supuesto:

Supuesto 4 (S4) $\frac{\phi(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))}{(\phi + (1 - \phi)\mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))^2} \geq 1$

Si este se cumple, $h(\phi_t)$ sería creciente, lo que es consistente con el supuesto ya que podemos notar que el denominador también se puede escribir como : $(1 - (1 - \phi)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))^2 = 1 - h(\phi_t, P_t(\phi_t))$, el que sería decreciente.

Ahora para la concavidad, analizamos la segunda derivada:

$$h''(\phi_t) = \frac{\left[-\frac{\partial \mu}{\partial P} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial P} (1 - \mu) \right] + 2(1 - (1 - \phi)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))^3 \left[(1 - \phi) \frac{\partial \mu}{\partial P} + (1 - \mu) \frac{\partial \phi}{\partial P} \right]}{(1 - (1 - \phi)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))^4}$$

Usando la misma lógica anterior, reordenando obtenemos:

$$h''(\phi_t) = \frac{\overbrace{\left[-\phi + \frac{\partial \phi}{\partial \mu} (1 - \mu) \right]}^a + 2(1 - (1 - \phi)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))^3 \overbrace{\left[(1 - \phi) + (1 - \mu) \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right]}^b}{(1 - (1 - \phi)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))^4}$$

Podemos ver que el término a es menos a cero, ya que $\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \leq 0$. En cuando al término b , si lo desarrollamos:

$$(1 - \phi) + \frac{-\phi(1 - \phi)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))}{(1 - (1 - \phi)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))^2} = (1 - \phi) \left[1 - \frac{\phi(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t)))}{(1 - (1 - \phi)(1 - \mu(\phi_t, P_t(\phi_t))))^2} \right]$$

El cual si se cumple S4, es negativo. Con todo esto, se demuestra que $h(\phi_t)$ es cóncavo. ■

Con esta proposición podemos ver que la estabilidad interna del cartel va disminuyendo con aumentos en el precio, ya que la probabilidad condicional de que este termine es creciente en estos. En la realidad esto se puede presentar en que existen pocos acuerdos que se terminen después de poco tiempo, si no que más bien salen a la luz carteles de mayor duración. Además,

con la concavidad, este crecimiento va disminuyendo lo que coincide con el aumento en las creencias. Junto con el Lema 1 podemos concluir que se verá que carteles que pasen un cierto tiempo sin terminar, es porque se trata de dos firmas de tipo colusivas, y todo lo demás constante no habría razón de que llegue a su fin.

Con todo lo anterior podemos ver que generalizando la fuente de incertidumbre hacia un modelo en que las firmas buscan construir reputación no solo podemos encontrar que los precios son crecientes, también podemos entender la dinámica de un cartel con estas características. Esta vez no se restringe la información privada al factor de descuento, sino que esta puede consistir cualquier característica que afecte los incentivos de alguna de las firmas a no mantener el acuerdo de precios. Además, se logran encontrar más resultados que en el modelo preliminar. Sin embargo, en trabajo futuro se espera poder resolver ambos modelos y comparar sus resultados.

4 Conclusiones

En la práctica, las creencias sobre características de las firmas en la misma industria es clave para la formación de acuerdos colusivos. Estas determinan las posibles ganancias de un cartel y también los posibles riesgos, tanto por el término del acuerdo que se traduce en pérdidas de utilidades como también por la posibilidad de detección por las autoridades. Es por esto que lo esperable es que las firmas que buscan actuar concertadamente deben considerar y ponderar dos objetivos distintos: cobrar mayores precios y al mismo tiempo minimizar los riesgos, con lo que pueden lograr maximizar las utilidades.

En este trabajo se muestra que cuando existe información incompleta entre las firmas, la forma de ponderar los dos objetivos mencionados anteriormente con tal de maximizar las utilidades de largo plazo consiste en aumentar los precios gradualmente. Esta se logra a través de un simple modelo, donde para niveles suficientes de incertidumbre sobre información del compañero de acuerdo, lo óptimo es subir gradualmente los precios hasta el precio máximo en vez de simplemente poner el precio máximo.

Como se mencionó en un principio, otro objetivo es entender la dinámica de este tipo de acuerdo, es decir, como es esta trayectoria ascendente de precios, cuál es el tiempo óptimo para llegar al precio máximo y, además, cómo es la estabilidad interna del cartel a lo largo de la trayectoria. Para esto, se presentan dos modelos generales, el primero permite que el tipo de la firma con tipo incierta sea continuo y que se elija una trayectoria óptima de precios, mientras que el segundo levanta la restricción de la fuente de información privada y permite que esta pueda ser cualquier factor que afecte los incentivos de las firmas a mantener el acuerdo. En estos se encuentran como resultados preliminares que los precios son crecientes en las creencias y, además, que a medida que los precios crecen, el cartel pierde estabilidad interna y también, que si la firma resulta ser del tipo con mayores incentivos al desvío, romperá el acuerdo antes de

llegar al precio máximo. Si no lo hace, se puede tener certeza de que es del tipo que se coludira mientras todo se mantenga constante, por lo que la probabilidad de duración del acuerdo se asegura por completo.

La importancia de estos resultados para la protección de la libre competencia por parte de las autoridades es clara. Por un lado entender las trayectorias de precios en industrias donde existe información privada entre las firmas es necesario para poder detectar acuerdos ilícitos de precios. Además, a la hora de juzgar y sancionar cuando se descubren carteles es importante poder entender el comportamiento de las firmas coludidas para así estimar los daños del cartel a la sociedad con rigurosidad y precisión.

En términos de trabajo futuro, el primer objetivo es resolver los dos modelos generales y así poder encontrar las trayectorias óptimas de precios para las firmas y cómo evoluciona la estabilidad del cartel con precisión. Así, poder fortalecer los resultados preliminares encontrados y comprobar que los resultados del modelo simple se mantienen al levantar las restricciones establecidas.

Por otro lado, un camino interesante sería adaptar el modelo a colusión tácita en la línea de Harrington & Zhao (2012) y estudiar la trayectoria de precios en este contexto. El modelo no debiera diferir del presentado aquí, pero se debe poner mayor atención al sistema de señales en la fase de aprendizaje, ya que en este trabajo se ha supuesto colusión explícita, es decir, con comunicación entre las firmas.

Por último, con el objeto de desalentar la formación de nuevos carteles y la continuidad de los ya existentes, se puede incorporar al modelo la delación compensada y multas, siguiendo el análisis realizado en el trabajo de Harrington(2005). Dado que estas dos medidas disminuyen los incentivos a entrar en un cartel, ver como interactúa con los resultados encontrados puede generar sugerencias para las autoridades sobre estas dos medidas para reforzar el objetivo que tienen.

5 Referencias

[1] Baye, M. R., & Jansen, D. W. (1996). Repeated games with stochastic discounting. *Economica*, 531-541.

[2] Bolotova, Y., Connor, J. M., & Miller, D. J. (2008). The impact of collusion on price behavior: Empirical results from two recent cases. *International Journal of Industrial Organization*, 26(6), 1290-1307.

[3] Dal Bó, P. (2007). Tacit collusion under interest rate fluctuations. *The RAND Journal of Economics*, 38(2), 533-540.

[4] Harrington, J. E., & Zhao, W. (2012). Signaling and tacit collusion in an infinitely repeated Prisoners' Dilemma. *Mathematical Social Sciences*, 64(3), 277-289.

[5] Harrington, J. E. (2005). Optimal Cartel Pricing In The Presence Of An Antitrust Authority. *International Economic Review*, 46(1), 145-169.

[6] Kreps, D. M., & Wilson, R. (1982). Reputation and imperfect information. *Journal of economic theory*, 27(2), 253-279.

[7] Phelan, C. (2006). Public trust and government betrayal. *Journal of Economic Theory*, 130(1), 27-43.

[8] Selten, R. (1978). The chain store paradox. *Theory and decision*, 9(2), 127-159.

[9] Stokey, N. L., Lucas Jr, R. E., & Prescott, E. C. (1989). Recursive Methods in Economic Dynamics. *Harvard Univ. Press, Cambridge*.

6 Apéndice

Demostración condiciones de Blackwell Modelo general 1, para el problema de la firma 2.

Sea B el conjunto que contiene a los posibles β_t con $B \subseteq \mathbb{R}^l$. Para esto, T debe cumplir lo siguiente

- a. Monotonicidad: sea $V_1, V_2 \in C(B)$ y $V_1(\beta_t) \leq V_2(\beta_t)$, se debe demostrar que $(TV_1)(\beta_t) \leq (TV_2)(\beta_t)$ para todo $\beta \in B = (0, \bar{\beta})$, lo que se cumple si $V_1(\beta_{1,t+1}) \leq V_2(\beta_{2,t+1})$. Si vemos (6), reordenando tenemos $V(\beta_{t+1})\beta_{t+1} = m(\beta_t)$, por lo que se debe cumplir

$$V_1(\beta_{1,t+1})\beta_{1,t+1} = V_2(\beta_{2,t+1})\beta_{2,t+1}$$

y para que $V_1(\beta_t) \leq V_2(\beta_t)$, se debe cumplir que $\beta_{1,t+1} \geq \beta_{2,t+1}$, por lo que $V_1(\beta_{1,t+1}) \leq V_2(\beta_{2,t+1})$. ■

- b. Descuento: se debe demostrar que existe algún $\phi \in (0, 1)$ tal que

$$(TV + a)(\beta_t) \leq (TV)(\beta_t) + \phi a$$

Si a la firma 2 le conviene mantener el acuerdo se tiene que

$$m(\beta_t) + \beta_2(V(\beta_{t+1}) + a) \leq m(\beta_t) + \beta_2V(\beta_{t+1}) + \phi a$$

$$\beta_2 a \leq \phi a$$

Lo que se cumple para $\beta_2 \leq \phi$. Luego si a la firma 2 le conviene el desvío:

$$2m(\beta_t) \leq 2m(\beta_t) + \phi a$$

Lo que se cumple para todo $\phi \in (0, 1)$ ■

Así, el operador T es una contracción por lo que tiene un único punto fijo, por lo que la función V existe.

Demostración Proposición 2

- a. Monotonicidad: sea $V_1^1, V_2^1 \in C(B)$ y $V_1^1(\beta_t) \leq V_2^1(\beta_t)$, se debe demostrar que para todo $\beta \in B = (0, \bar{\beta})$ se cumple $V_1^1(\beta_{t+1}) \leq V_2^1(\beta_{t+1})$. Esto sería

$$\max_m \{ (1 - \eta_t(m, \beta_t) [m + \beta_1 V_1^1(\beta_{t+1})]) \} \leq \max_m \{ (1 - \eta_t(m, \beta_t) [m + \beta_1 V_2^1(\beta_{t+1})]) \}$$

Para todo $m \in (0, \bar{m})$ se cumple que $(1 - \eta_t(m, \beta_t) [m + \beta_1 V_1^1(\beta_{t+1})]) \leq (1 - \eta_t(m, \beta_t) [m + \beta_1 V_2^1(\beta_{t+1})])$. Por lo que si los m estuvieran maximizando cada expresión, también se cumpliría.

■

- b. Descuento: se debe demostrar que existe algún $\phi \in (0, 1)$ tal que $(TV^1 + a)(\beta_t) \leq (TV^1)(\beta_t) + \phi a$, es decir

$$\max_{m_1} \{(1 - \eta_t(m, \beta_t) [m + \beta_1 (V^1(\beta_{1,t+1}) + a)])\} \leq \max_{m_2} \{(1 - \eta_t(m, \beta_t) [m + \beta_1 V^1(\beta_{2,t+1})])\} + \phi a$$

Ya que η_t es creciente en m , al sumar a a la función valor se está aumentando el peso del componente que disminuye la función, es decir $1 - \eta_t$. Por lo tanto, $m_1 \leq m_2$, por lo que la maximización de la derecha es mayor por lo que se cumple la desigualdad.

■

Con esto queda demostrado que el operador T es una contracción, por lo que el problema tiene un único punto fijo, es decir, la función V existe. Ahora se debe demostrar concavidad estricta y diferenciabilidad para que el equilibrio existente sea un máximo único y se pueda encontrar.

Luego, para demostrar lo que queda de la proposición, siguiendo a Stokey, Lucas y Prescott (1989), se necesitan 4 supuestos para que la función $V^1(\beta_t)$ sea estrictamente concava. Primero se necesita que el conjunto B sea convexo y que el conjunto que define los posibles valores de la variable de decisión sea no vacío, compacto-valorado y continuo. Dado que $B = (0, \bar{\beta})$, este conjunto es convexo y la factibilidad viene dada por $m \in (0, \bar{m})$, que también cumple con lo establecido. El segundo supuesto es que la función m tiene que ser acotada y continua, lo que se puede establecer como supuesto ya que no se ha definido dicha función y además que el factor de descuento esté entre 0 y 1, lo que también se cumple. En tercer lugar se debe cumplir que la función m sea estrictamente concava, lo que nuevamente se puede establecer como definición y dado que representa la utilidad del acuerdo es razonable que sea de esta forma. Finalmente, el conjunto que define los posibles valores de la variable de decisión debe ser convexo, en el sentido de que cualquier combinación lineal debe estar dentro del mismo conjunto. Dado que este viene dado por $m \in (0, \bar{m})$ este supuesto también se cumple. Así, queda demostrado que la función $V^1(\beta_t)$ es estrictamente concava.

Finalmente, para que la función valor sea continuamente diferenciable se necesita un supuesto más, que es que la función m sea continuamente diferenciable, lo que también se puede establecer por definición. Con esto queda demostrado que el problema tiene solución y esta es un máximo y es único.

■

Demostración Proposición 3

Primero, demostramos que el denominador es negativo. Si se aplican derivadas parciales a (9). Primero, con respecto a P_t , con lo que queda:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \pi^C}{\partial P_t} + \beta(1 - \varepsilon) \frac{\partial V^N}{\partial \phi_{t+1}} \frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial P_t} = \frac{\partial \pi^D}{\partial P_t} \quad (19)$$

donde las derivadas de ambas utilidades en el periodo con respecto a P_t son mayores a cero, $\frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \mu}$ es menor a cero y asumiendo que mayores creencias traen mayores beneficios para el tipo normal, entonces se puede decir que $\frac{\partial \mu}{\partial P_t} < 0$. Esto quiere decir que a mayores precios la probabilidad de que el tipo N no se desvíe es menor, lo que tiene sentido ya que cada vez tiene menos valor seguir construyendo reputación y además, la tentación de desvío es mayor ya que a mayores precios, mayor es la utilidad de llevarse todo el mercado.

Luego, derivamos (9) con respecto a ϕ_t :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \pi^C}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial \phi_t} + \beta(1 - \varepsilon) \frac{\partial V^N}{\partial \phi_{t+1}} \left[\frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \phi_t} + \frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \phi_t} + \frac{\partial \mu}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial \phi_t} \right) \right] = \frac{\partial \pi^D}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial \phi_t} \quad (20)$$

por la misma lógica anterior, el término $\frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \phi_t} + \frac{\partial \phi_{t+1}}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \phi_t} + \frac{\partial \mu}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial \phi_t} \right) = \frac{d\phi_{t+1}}{d\phi_t}$ que es el efecto total de las creencias en la actualización de estas, es positivo.

Así, podemos ver que el denominador de (14) es negativo. Por lo tanto, si se cumple el supuesto 2.1, esta derivada sería positiva, por lo que los precios serían crecientes en las creencias.

■