INSTITUTO DE ECONOMÍA

TESIS de MAGÍSTER

2015

Diseño de Mecanismo Eficiente con Adquisición de Información Dinámica

Jorge Mesías.

www.economia.puc.cl

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

TESIS DE GRADO
MAGISTER EN ECONOMIA

Mesías Moreno, Jorge Andrés

Julio, 2015

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

Diseño de mecanismo eficiente con adquisición de información dinámica

Jorge Andrés Mesías Moreno

Comisión

Martín Besfamille
Nicolás Figueroa
Constanza Fosco

Santiago, julio de 2015

Diseño de mecanismo eficiente con adquisición de información dinámica

Jorge Mesías Moreno*

24 de agosto de 2015

Resumen

Este trabajo aborda un problema de asignación de bienes cuando los demandantes no conocen el bien en cuestión, lo que hace que no conozcan su verdadera valoración por el objeto. De esta situación, sumado a la restricción de una experimentación por periodo, surge el problema de adquisición de información de manera dinámica. Tres principales resultados se entregan a lo largo del trabajo. Primero, es posible caracterizar un orden eficiente siempre cuando los individuos se diferencian en *priors*, lo que no ocurre cuando la diferenciación es en costos de adquirir información. Segundo, es posible caracterizar la adquisición de información de un proceso con un número finito de familias diferentes en *priors*, tal que en el tiempo se adquiere cada vez menos información y no todas las familias disponibles experimentan. Tercero, existe un mecanismo *ex-post* eficiente, cuando las valoraciones de los agentes son interdependientes.

*Alumno de Magister en Economía, Pontificia Universidad Católica de Chile, jamesias@uc.cl. Agradezco a los profesores de la comisión de microeconomía Constanza Fosco, Martín Besfamille y Nicolás Figueroa, por su preocupación y los comentarios a lo largo de todo este trabajo. Agradezco también a Pascale Cazabon por su constante apoyo, ayuda y paciencia durante todo el proceso de tesis, sin lugar a dudas fue la mejor aliada en esta tarea. Finalmente agradezco a toda "La Oficina", Martín Orozco, Santiago Correa y Nicolás Velasco por sus comentarios, ayudas y buena onda. Todos los errores que pudieran haber en el presente trabajo son de mi exclusiva responsabilidad.

1. Introducción

La literatura acerca de Diseño de Mecanismos es amplia en cuanto a temas abordados y a metodologías utilizadas. Durante el transcurso de las últimas dos o tres décadas, muchos trabajos se han escrito utilizando el diseño de mecanismos para abordar problemas que van desde el cambio climático (Martimort y Sand-Zatman, 2015) y la contaminación (Montero, 2005), hasta el desarrollo de instrumentos para controlar la pesca de peces en una determinada zona (Weitzman, 2002).

Dentro de esta variedad de temáticas, el diseño de mecanismos que incorporan adquisición de información son relevantes, puesto que captan el hecho de que muchas veces los agentes económicos no conocen realmente su valoración o “tipo”, por lo que deben buscar la forma de adquirir esa información que resulta fundamental para la toma de decisiones.

Conforme a lo anterior, varios de estos problemas de adquisición de información son resueltos en un solo periodo (i. e. de manera estática), asumiendo que todos los agentes son capaces de adquirir información al mismo tiempo. Sin embargo, esto deja de lado aquellas situaciones en las que no es posible hacer experimentar a todos los agentes a la vez, lo que lleva a que un problema inicialmente estático, se vuelva dinámico. Esto es justamente lo que este trabajo busca desarrollar.

Pensar en un modelo de adquisición de información en un contexto dinámico puede ser útil para intentar comprender situaciones tan diversas como la venta de empresas grandes a un conjunto de inversionistas, quienes no tienen acceso “a los libros” al mismo tiempo y la información es revelada de a uno en uno; la venta de automóviles de lujo, en mayor o menor medida, donde el llamado *test drive* se puede hacer de a un comprador por vez; o también el problema de las adopciones, donde las familias deben conocer al niño antes de tener una real valoración por él.

Este problema de adquisición de información dinámica, se nutre de dos papers que abordan de manera separada las dos vertientes principales del problema.

Por un lado, el trabajo de Bergemann y Välimäki (2002), que estudia el problema de adquisición de información de agentes en ambientes de valoraciones privadas y comunes, por separado. Mediante la utilización de un mecanismo con pagos *VCG* (Vickrey, W.(1961), Clarke, E. (1971) y Groves, T. (1973)), los autores son capaces de demostrar que es posible alcanzar siempre la eficiencia *ex-post*, pero la eficiencia *ex-ante*, que corresponde a la adquisición de información por parte de los agentes, solo se logra cuando las valoraciones son privadas.

Por otro lado, Bergemann y Välimäki (2010) estudian mecanismos dinámicos. Aquím los autores plantean una secuencia de transferencias o pagos entre los agentes de tal manera que cada jugador recibe o paga su contribución marginal en cada periodo (lo que finalmente es una extensión de los pagos VCG). Mediante esta extensión se logra un mecanismo de revelación de la verdad, donde cada agente revela su información privada.

El presente estudio toma gran parte de la estructura del primer trabajo, ampliando la adquisicón de información a contextos en que este proceso se realiza de manera dinámica. Así, se busca entender cómo se realiza este proceso de adquisición de información, y si la restricción de que esta se haga en más de un periodo cambia las conclusiones que obtienen Bergemann y Välimäki (2002).

Otra diferenciación importante de este estudio con respecto a ByV (2002) está en la manera en que se modelan las valoraciones comunes. Mientras ByV modelan esta situación a través de los "tipos" de los agentes, en este trabajo se procede con una modelación vía *priors*, puesto que surge de manera más intuitiva y natural.

En cuanto a la adquisición de información por parte de agentes económicos, existen diversos trabajos que tratan esta problemática en distintos contextos, como por ejemplo subastas (Persico (2000) y Lu y Ye (2013)) o juegos de coordinación (Morris y Shin (2002), Hellwig y Veldkamp (2009) y Myatt y Wallace (2012)) , entre otros[1].

En todos los trabajos anteriores, la caracterización de la adquisición de información interesa, ya que define el actuar de los agentes en determinadas circunstancias (comprar o no comprar un objeto, jugar un juego de una manera u otra, etc.). Sin embargo, este trabajo se diferencia en que la adquisición de información no solo es de interés para el agente, sino que la sociedad se beneficia también de la adquisición de información, porque se logran asignaciones eficientes.

Por otra parte, el diseño de mecanismos dinámicos también es ampliamente abordado por diversos autores que, en general, buscan entender cómo aplicar el conocimiento de modelos estáticos a escenarios con varios periodos. Más en particular y también más cercano a este trabajo, son aquellos artículos que se dedican a extender los pagos VCG, de naturaleza estática, a un contexto dinámico.

En esta última línea, además del trabajo de Bergemann y Välimäki (2010) mencionado anteriormente, se encuentra lo desarrollado por Athey y Segal (2013), quienes en su trabajo plantean un mecanismo eficiente, compatible en incentivos y que además sea de presupuesto balanceado, para ambientes dinámicos en general.

Esta diferenciación respecto de lo planteado por Bergemann y Välimäki (2010), se logra gracias a la generalización de pagos de tipo AGV (Arrow (1979), d'Aspremont y Gerard-Varet (1979)), los cuales cumplen la función de lograr el presupuesto balanceado, cualidad que no siempre se alcanza con pagos VCG. No obstante, esta característica se obtiene en desmedro de la participación voluntaria *interim*, lo que marca una distancia clara con nuestro modelo y el expuesto por Bergeman y Välimäki (2010).

Con todo lo anterior, también existe literatura que confluye más directamente con este trabajo, al tomar ambas fuentes de investigación para llevarlo a un solo modelo. Un ejemplo de lo anterior es el trabajo de Compte y Jehiel (2007), quienes establecen una relación entre subastas con adquisición de información y formatos dinámicos. En particular, proponen y demuestran que en una subasta con adquisición de información endógena, los esquemas dinámicos tienen un mejor desempeño que los sistemas estáticos de sobre cerrado en cuanto a la maximización de ganancias. Esto se produce por la salida de postores en sucesivas etapas, de tal manera que los postores que restan en juego observan como una señal cuántos competidores "quedan en pie".

El modelo desarrollado en este trabajo, por el contrario, se enfoca en una adquisición de

[1] Un trabajo que resume de buena manera los distintos contextos en los cuales se ha estudiado la adquisición de información, es el survey de Bergemann y Välimäki (2007)

información más "activa" que lo planteado por Compte y Jehiel (2007). Esto se refiere a que en el modelo de Compte y Jehiel se plantea la adquisición como un "pago por ver", en que finalmente el agente no sabe cuánta información está comprando. Por otra parte, el modelo aquí desarrollado trata de manera directa la adquisición como una decisión propia del agente (i.e. el agente por el mismo cuánta información adquirir).

Con todo lo anterior y para efectos de la ilustración del modelo a desarrollar más adelante, utilizaremos el problema de asignación de niños en adopción. Para este tema, que Landes y Posner (1978) abarcan llamándolo mercado de las adopciones, existe diversa literatura, aunque poca desde la perspectiva económica. Uno de los trabajos que abordan este problema de asignación o mercado es el de Blackstone, Buck y Hakim (2004), quienes resaltan que mejorar la posición de los niños (en otras palabras, hacerlos pasar de estar en una casa de acogida a una familia adoptiva), ayuda a mejorar el bienestar social. Y más importante aún es el hecho de que al mismo tiempo se mejora la asignación de recursos del estado al hacer una asignación eficiente. Con esto se da un marco teórico y conceptual al trabajo.

Finalmente, la contribución de este trabajo es estudiar de qué manera cambia la adquisición de información óptima cuando el conjunto de parámetros y su planteamiento cambia acorde a distintos escenarios. En este sentido, diversos escenarios son expuestos, donde las variaciones vienen principalmente de los supuestos que se hacen respecto al entorno. De esta manera, el trabajo busca abordar una problemática desde lo más simple, para luego ir avanzando sucesivamente hacia modelaciones más complejas.

Los principales resultados dentro del entorno descrito tienen que ver con el comportamiento de la adquisición de información y el orden en que los agentes hacen su experimentación. Así se concluye que cuando los agentes se diferencian en *priors* siempre será eficiente hacer que la familia con mayor *prior* experimente (i.e. adquiera información) primero. Esta situación no ocurre cuando la diferenciación se da en costos de adquirir información.

De este primer resultado, surge la necesidad de extender esta noción de orden hacia una caracterización general con una cantidad finita de experimentaciones. De esto se obtiene un segundo resultado que demuestra que en un proceso de adquisición de información finito existen dos propiedades: (i) este proceso se acaba antes de que experimenten todas las familias disponibles (i.e. familias se quedan sin experimentar) y (ii) la adquisición de información es siempre decreciente conforme "pasan" las familias.

Para concluir, un último resultado muestra que es posible lograr un mecanismo eficiente *ex-post* cuando las valoraciones son interdependientes, sin embargo este mecanismo no es eficiente *ex-ante*. Esta conclusión es una extensión directa de Bergemann y Välimäki (2002), quienes obtienen el mismo resultado pero en un ambiente estático.

En lo que sigue, el trabajo se estructura de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo a desarrollar. La sección 3, desarrolla el modelo expuesto y entrega los primeros resultados. Luego, la sección 4 aborda las extensiones y expone uno de los principales resultados de este trabajo. La sección 5 desarrolla una extensión hacia valoraciones interdependientes, otro resultado de importancia del modelo. Finalmente, la sección 6 concluye y expone las posibilidades de investigación futura.

2. El Modelo

2.1. Contexto

Supondremos una agencia de adopciones, indexada por el 0, quien será la encargada de entregar niños en adopción. Por otra parte, existen I familias buscando adoptar un niño(a).

La agencia de adopciones, por su parte, no obtiene utilidad por tener niños, sino que solo le es costoso mantener un niño que no fue adoptado. En particular, el costo de quedarse con un menor es K_2.

Por otro lado, las familias pueden querer o no querer al niño, lo que se caracteriza con su tipo $\theta_i = \{0, 1\}$. Sin embargo, no conocen su real valoración hasta que conocen al niño(a) en cuestión (i.e. hasta que adquiere información respecto del menor que pretenden adoptar). Formalmente, la valoración de las familias se puede expresar como:

$$V_i(x) = \begin{cases} \theta(2 + K_1) & si \quad x = x_i \\ 0 & si \quad x \neq x_i \end{cases} \tag{1}$$

donde $x \in X = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_I\}$ es la asignación que se realiza. En otras palabras, si $x = x_i$ se asigna el niño a la familia i. Además la familia tiene un costo K_1 de mantener al niño si es que efectivamente lo adopta. Con esto la utilidad de la familia se puede expresar como:

$$U_i(x) = V_i(x) - K_1 \Rightarrow U_i(x = x_i) = \begin{cases} 2 & si \quad \theta_i = 1 \\ -K_1 & si \quad \theta_i = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Sin embargo, las familias sí saben antes de entrevistarse con un niño la probabilidad de que les guste $p_i = Pr(\theta_i = 1)$. Esto modela de alguna forma los gustos y/o voluntades de adoptar, y justamente pueden ser distintos entre distintas familias. Entonces, las familias saben que con probabilidad p_i valorarán al niño y con probabilidad $(1 - p_i)$ no lo harán. Llamaremos a esta probabilidad p_i el *prior* de la familia i de su tipo.

El entrevistarse con un menor (i.e. el experimento en el lenguaje de Bergemann y Välimäki (2002)) le otorga a las familias la posibilidad de conocer realmente su valoración por el niño. Luego, las familias deben elegir $\alpha_i \in [0, 1]$ lo que significa que con probabilidad α_i el experimento es exitoso y la familia conoce su real valoración (θ_i), y con probabilidad $(1 - \alpha_i)$ el experimento es fallido y la familia no aprende nada (por lo que siguen teniendo como mejor información su probabilidad p_i). Adquirir información tiene un costo $c(\alpha_i) = a_i \frac{(\alpha_i)^2}{2}$, donde a_i es un parámetro que capta costos posiblemente distintos para cada familia.

La particularidad de este problema es que existe la restricción de que un niño no puede tener más de una entrevista por periodo. Justamente es esta restricción la que le da dinámica al problema y es lo que provoca que las decisiones de cuándo experimentar y/o cuánto experimentar adquieran relevancia.

2.2. Estructura temporal del problema

Una vez caracterizados los agentes, es importante comprender la dinámica del modelo. La figura 1 muestra las etapas para un juego en donde hay un niño y dos familias que desean adoptar.

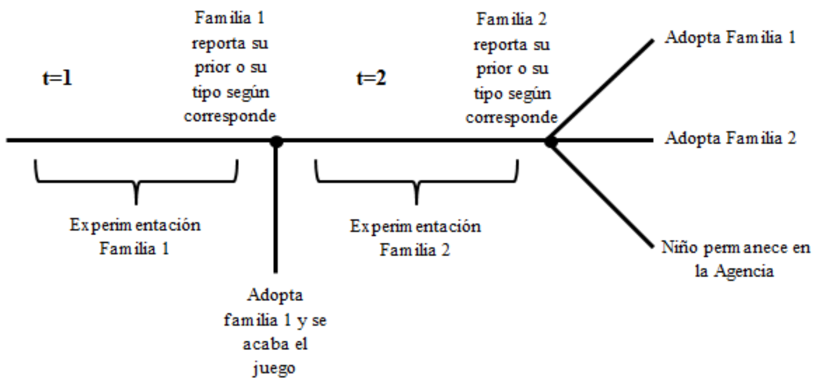


Figura 1: Esquema del juego con 1 niño y 2 familias

En el tiempo $t = 0$ (no incluido en la figura 1) las familias acuden a la agencia porque desean adoptar. La agencia, por su parte, les pregunta su *prior* p_i y su parámetro de costos a_i. Luego, en base a la información revelada, los ordena y agenda para que realicen la entrevista con el niño en cuestión.

La primera familia elegida por la agencia experimentará y luego revelará si aprendió y qué aprendió. En caso de que el experimento sea fallido, volverá a revelar su *prior*. En respuesta a esto la agencia resolverá si entrega al niño en adopción a esta familia o bien pasa a la siguiente.

El juego se repite hasta que se entrega al niño en adopción, o hasta que experimenta la última familia en espera (que en el caso de la Figura 1 es la segunda). Luego la agencia, una vez que ya sabe si la última familia aprendió o no, puede decidir entre entregar el niño en adopción a esta última familia, a alguna familia anterior, o simplemente no entregarlo en adopción. Cabe destacar que cada vez que se resuelve entregar el menor en adopción a alguna familia, se efectúan los pagos que correspondan, aparte de los costos que se incurren por adquisición de información.

En la siguiente sección se ilustran los casos básicos del problema y se demuestra el resultado obtenido por Bergemann y Välimäki (2002) en el caso estático. Posteriormente se demuestra que el resultado sigue siendo válido en el caso de dos periodos.

3. Un problema simple

3.1. Un niño y una familia - El caso estático

Antes de resolver el problema es necesario realizar ciertos supuestos acerca de los parámetros que influyen en la resolución.

Supuesto 1 *El costo de entregar un niño(a) a una familia que no lo valora es mayor que el costo de que el niño(a) se quede en la Agencia. Luego* $K_1 > K_2$.

Supuesto 2 *Llegado el momento en que la Agencia debe tomar la decisión si entregar o no al menor a una familia que solo conoce su prior, esta preferirá entregarlo a quedárselo, es decir,*

$$2p_i - K_1(1 - p_i) > -K_2$$

.
Esto define automáticamente un punto de corte, que trunca el soporte del prior $p_i, \forall i$:

$$p_i \geq \hat{p} = \frac{K_1 - K_2}{2 + K_1}$$

Una vez establecidos ambos supuestos, podemos demostrar que la solución al problema de adquisición de información óptima es la misma desde el punto de vista de un planificador social, que desde la resolución privada en donde la asignación final se resuelve con un mecanismo de pagos VCG.

En efecto, note que los problemas social (s) y privado (p) resuelven respectivamente:

$$\max_{\alpha_s} \alpha_s(2p + (1-p)(-K_2)) + (1-\alpha_s)(2p + (1-p)(-K_1)) - a\frac{\alpha_s^2}{2} \tag{3}$$

$$\max_{\alpha_p} \alpha_p(p(2+K_2) + (1-p)0) + (1-\alpha_p)(2p + (1-p)(-K_1) + K_2) - a\frac{\alpha_p^2}{2} \tag{4}$$

Es importante notar que los pagos VCG hacen que la familia, en caso de adoptar al niño, reciba un pago de K_2 en vez de que ella tenga que pagar. Esto se da puesto que la contribución marginal de la familia en este problema es "ahorrarle" a la agencia un costo de K_2.

Finalmente, obteniendo las condiciones de primer orden y resolviendo para α_s y α_p respectivamente, obtenemos el resultado[2]

$$\alpha_s^* = \alpha_p^* = \frac{(K_1 - K_2)(1-p)}{a} > 0 \tag{5}$$

Este resultado sigue la intuición que surge naturalmente del planteamiento del problema. Mientras más informativo sea el *prior* de las familias, menos información se desea comprar porque con lo que ya se sabe es "suficiente". Por otra parte, mientras mayores diferencias hayan en los costos de entregar un niño en adopción a una familia que no lo quiere, comparado con los de mantenerlo en la agencia, se adquirirá mayor cantidad de información puesto que es más costoso "equivocarse" en la asignación. En último lugar, resulta obvio que a mayor parámetro de costos es menor la adquisición de información, puesto que esta es más costosa.

[2]En estrictor rigor, como $\alpha_i \in [0, 1]$ ya que estamos adquiriendo una probabilidad de conocer el verdadero tipo, hace que:

$$\alpha_s^* = \alpha_p^* = \min\left\{1, \frac{(K_1 - K_2)(1-p)}{a}\right\}$$

Luego, para ahorrar notación omitiremos este mínimo, aún cuando siempre será tomado en cuenta.

3.2. Un niño y dos familias - El caso dinámico

El agregar una segunda familia al problema implica que la agencia debe tomar una decisión en más de una etapa. Si bien el problema es bastante más complejo, en esta sección nos enfocaremos en demostrar que el resultado para el caso estático se sigue cumpliendo en un ambiente dinámico, ya que ahora al haber dos familias y un solo niño, la restricción de una entrevista menor-familia por periodo se hace activa.

Sin perder generalidad, y por motivos de simplificación del problema, supondremos que ambas familias son indénticas, es decir, ambas tienen el mismo *prior* $p_1 = p_2 = p$ y el mismo parámetro de costos $a_1 = a_2 = a$. Además no habrá descuento intertemporal.

Establecidas las condiciones generales y recordando los supuestos 1 y 2, estamos en condiciones de establecer un primer resultado:

Proposición 1 *En un ambiente de adquisición de información dinámica, la solución al problema de adquisición de información óptima coincide para el caso del planificador social con la solución privada.*

Demostración
Consideremos, en primer lugar, el problema social.
Resolvemos por inducción hacia atrás el problema del planificador social. Así, en el segundo periodo maximiza la utilidad, condicional en que en el primer periodo no se aprendió (V_{NA}), y condicional en que se aprendió que $\theta_1 = 0$ (V_0). Formalmente, el problema queda expresado de la siguiente manera:

$$\max_{\alpha_2^{NA,s}} V_{NA} = \alpha_2^{NA,s}(2p + (1-p)[2p - K_1(1-p)]) + (1 - \alpha_2^{NA,s})(2p - K_1(1-p)) - a\frac{(\alpha_2^{NA,s})^2}{2} \tag{6}$$

$$\max_{\alpha_2^{0,s}} V_0 = \alpha_2^{0,s}(2p - K_2(1-p)) + (1 - \alpha_2^{0,s})(2p - K_1(1-p)) - a\frac{(\alpha_2^{0,s})^2}{2} \tag{7}$$

Resolviendo las condiciones de primer orden para (6) y (7) obtenemos:

$$\alpha_2^{NA,s} = \frac{(2 + K_1)p(1-p)}{a} \tag{8}$$

$$\alpha_2^{0,s} = \frac{(K_1 - K_2)(1-p)}{a} \tag{9}$$

Con lo que podemos resolver el primer periodo del problema, el cual queda expresado:

$$\max_{\alpha_1^s} U = \alpha_1^s(2p + (1-p)V_0^*) + (1 - \alpha_1^s)V_{NA}^* - a\frac{(\alpha_1^s)^2}{2} \tag{10}$$

Donde V_0^* y V_{NA}^* son las utilidades del segundo periodo evaluadas en sus argumentos máximos encontrados anteriormente. Luego es fácil notar que:

$$\alpha_1^s = \frac{2p + (1-p)V_0^* - V_{NA}^*}{a} \tag{11}$$

A continuación, el problema privado.
En este caso, también se puede resolver usando recursión hacia atrás, aunque por parte de los agentes, es decir, la segunda familia maximizará tomando como dado los escenarios del primer periodo (NA o 0). No obstante, es importante definir en primer lugar los pagos VCG que hacen implementable el mecanismo.

En el segundo periodo, condicional a que no hubo aprendizaje en el primer periodo, si la familia aprende que le gusta el niño entonces adopta y debe pagar la opción disponible sin ella, que es la esperanza de la utilidad de la primera familia $(2p - K_1(1-p))$; si no aprende en su experimentación, su utilidad esperada de recibir al niño es $2p - K_1(1-p)$, mismo valor que la primera familia, por lo que no se deriva ninguna utilidad en este caso; naturalmente si aprende que su tipo es 0, entonces no adopta y tampoco paga. De lo anterior, notamos que el problema queda definido por:

$$\max_{\alpha_2^{NA,p}} V_{NA} = \alpha_2^{NA,p}(p(2 - 2p + K_1(1-p)) + (1-p)0) + (1-\alpha_2^{NA,p})0 - a\frac{(\alpha_2^{NA,p})^2}{2} \tag{12}$$

Luego, el nivel de adquisión de información que resuelve la condición de primer orden de (12) es:

$$\alpha_2^{NA,p} = \frac{(2 + K_1)p(1-p)}{a} \tag{13}$$

Por otra parte, la segunda familia condicional a que la primera familia aprendió que no le gustaba el menor, resolverá el problema sabiendo que en caso de adoptar aún sin aprendizaje, recibirá un pago de K_2 por parte de la agencia (la única opción disponible sin la segunda familia era que la Agencia se quedara con el niño). Luego el problema a resolver es:

$$\max_{\alpha_2^{0,p}} V_0 = \alpha_2^{0,p}(p(2 + K_2) + (1-p)0) + (1-\alpha_2^{0,p})(2p - K_1(1-p) + K_2) - a\frac{(\alpha_2^{0,p})^2}{2} \tag{14}$$

Y en consecuencia, la adquisición de información óptima en este caso es:

$$\alpha_2^{0,p} = \frac{(K_1 - K_2)(1-p)}{a} \tag{15}$$

Por último, en el primer periodo la familia 1 en caso de aprender, deberá pagar la opción que existe de no estar ella, que es V_0^*[2]. Además, en caso de no aprender, deberá pagar el hecho de cambiarle las reglas del juego a la familia 2: pasar de jugar un juego igual a V_0^* cuando la familia 1 no está, a jugar uno del tipo V_{NA}^* cuando la familia 1 sí está presente. Entonces, el problema que resuelve la familia 1 es:

$$\max_{\alpha_1^p} U = \alpha_1^p(p(2 - V_0^*) + (1-p)0) + (1-\alpha_1^p)(0 - (V_0^* - V_{NA}^*)) - a\frac{(\alpha_1^p)^2}{2} \tag{16}$$

De donde podemos obtener el resultado óptimo de adquisición de información:

$$\alpha_1^p = \frac{2p + V_0^*(1-p) - V_{NA}^*}{a} \tag{17}$$

Basta comparar (8), (9) y (11) con (13), (15) y (17), para notar que son iguales respectivamente, lo que demuestra la proposición. □

Este resultado es particularmente importante porque sabiendo que las soluciones privadas son las mismas que las sociales, podemos enfocarnos en resolver problemas desde la perspectiva del planificador social, sabiendo que existirá un mecanismo privado que correctamente implementado, otorgará la misma solución.

No deja de ser interesante notar ciertas características de la adquisición de información óptima que se deriva del problema. En primer lugar, α_2^{NA} es siempre mayor que α_2^0 independiente de los valores que tome p o a, lo que refleja que el hecho de que en el segundo periodo exista la opción de entregar al niño a la primera familia, exhorta a la segunda familia a adquirir mayor información con el fin de lograr la adopción (desde el punto de vista social, se adquiere mayor información puesto que se busca tomar la mejor decisión entre la familia que no sabe su tipo y la que puede aprenderlo todavía).

Pero además de eso, es llamativo el hecho de que cuando la primera familia aprendió que no valoraba al menor, la segunda familia adquirirá poca información, y cada vez menos, conforme aumente su *prior*, puesto que es casi seguro que se llevará al niño (la mejor opción disponible en ese caso es que el menor permanezca en la agencia, pero por el supuesto 2 sabemos que la agencia prefiere entregar al niño a quedárselo).

4. Extensiones al modelo

Una vez resuelto el problema y habiendo demostrado que la solución social coincide con la privada, podemos abordar distintas aristas de este problema que van entregando consecutivamente más información sobre las políticas óptimas que se podrían implementar.

En este sentido, resulta natural pensar que las familias no son siempre idénticas, y que por ende se hace necesario relajar este supuesto a uno más realista. En esta sección abarcaremos

[2] El supraíndice $*$ indica que dicho valor es el óptimo social.

dos extensiones que permiten darle mayor generalidad al problema y mayor aplicabilidad a situaciones reales.

4.1. Un niño y dos familias con *priors* distintos

Quizás la manera de diferenciación más natural entre familias distintas es en cuánto creen que valoran el niño, es decir, en lo que hemos modelado como *prior*. Es por esto que nos preguntamos si existe algún orden de agenda óptimo de las familias teniendo en cuenta que sus *priors* pueden diferir.

Antes de pasar a la modelación del problema propiamente tal, es bueno pensar qué es lo que estamos modelando con la existencia de este *prior*. Así, la respuesta lógica que hemos dado hasta el momento, es que es una idea de cuánto se valora un determinado niño.

No obstante lo anterior, se podría pensar que este parámetro puede captar distintas "voluntades" o "deseos" de adoptar por parte de una familia. Por ejemplo, no resultaría extraño pensar que una familia que lleva bastante tiempo pensando en la manera de ser padres y han estado buscando incesantemente alguna vía para conseguirlo, tuviera un *prior* mayor que una que ya tiene cuatro hijos y aún así desea adoptar.

Además, cabe recalcar el hecho de que cuando los *priors* difieren entre las familias, la agencia juega un rol más importante aún estableciendo una "agenda" de entrevistas. Note que sin ella, el problema se resolvería de la forma: "primero que llega, primero en experimentar". Luego, el control que ejerce la agencia al ordenar las entrevistas es crucial para la asignación eficiente de entrevistas y posteriormente adopciones.

Con todo lo anterior, el nuevo problema queda definido por dos familias cuyos parámetros de costos son iguales $a_1 = a_2 = a$, pero que difieren en su *prior* en la forma $p_1 > p_2 \geq \hat{p} = \frac{K_1 - K_2}{2 + K_1}$. Además se añade un factor de descuento $\beta \in (0, 1)$ de modo de dar mayor generalidad a la modelación, en el sentido de reconocer que el tiempo que pasa por retrasar la adopción de un menor no es "gratis".

Nuevamente se usará la técnica de inducción hacia atrás para la resolución del problema, solo que el hecho de tener p_i distintos hace que la notación se haga un tanto más complicada. Dado esto, se hacen las siguientes definiciones para mantener ordenado y claro el planteamiento.

Definición 1 *La adquisición de información se definirá de la forma* $\alpha_{t,i}^{S}$*, donde* $S = \{NA, 0\}$ *que son los estados posibles en el tiempo* $t = 2$*. Para ahorrar notación y como existe un solo estado posible en el tiempo 1, se omitirá el supraíndice.*

Definición 2 *Los valores de continuación, o maximizaciones correspondientes en el periodo 2, serán expuestos de la forma* $V_{i,j}^{S}$*, donde al igual que antes* $S = \{NA, 0\}$ *muestra el estado en el que se maximiza, y los subíndices muestran la ordenación de los agentes en el problema completo.*

De lo anterior es importante notar que mientras $\alpha_{2,1}^{NA}$ indica la información adquirida por la familia 1 estando en el periodo 2 en el estado NA, $V_{2,1}^{NA}$ es el valor de la maximización del periodo 2, en un problema en que la familia dos experimentó en el primer periodo y la familia 1 en el segundo periodo, en el estado NA.

Además es importante definir,

Definición 3 *La maximización del problema del periodo 1 se denotará $U_{i,j}$, cuyo subíndice nuevamente denota la ordenación de las familias.*

Tomando en cuanta lo anterior, podemos enunciar un primer resultado clave:

Lema 1 *La solución al problema del segundo periodo, condicional en que en el primer periodo no se aprendió, y el valor de las maximizaciones evaluadas en la solución óptima, es el mismo, independiente de la ordenación de las familias.*

Demostración
Planteamos los problemas correspondientes a las dos posibles ordenaciones, recordando que en caso de que ninguna familia aprenda su tipo, la agencia dará al niño a la familia con mayor p (i.e. la familia 1):

$$\max_{\alpha_{2,2}^{NA}} V_{1,2}^{NA} = \alpha_{2,2}^{NA}(2p_2 + (1-p_2)(2p_1 - K_1(1-p_1))) + (1-\alpha_{2,2}^{NA})(2p_1 - K_1(1-p_1)) - a\frac{(\alpha_{2,2}^{NA})^2}{2} \tag{18}$$

$$\max_{\alpha_{2,1}^{NA}} V_{2,1}^{NA} = \alpha_{2,1}^{NA}(2p_1 + (1-p_1)(2p_2 - K_1(1-p_2))) + (1-\alpha_{2,1}^{NA})(2p_1 - K_1(1-p_1)) - a\frac{(\alpha_{2,1}^{NA})^2}{2} \tag{19}$$

Luego resolviendo las condiciones de primer orden respectivas, llegamos al primer resultado del lema 1, en donde:

$$\alpha_{2,2}^{NA} = \alpha_{2,1}^{NA} = \alpha^{NA} = \frac{(2+K_1)p_2(1-p_1)}{a} \tag{20}$$

Luego, para demostrar la segunda parte del lema, basta con notar que al restar $V_{1,2}^{NA}(\alpha^{NA}) - V_{2,1}^{NA}(\alpha^{NA})$, el segundo y tercer término de ambos valores (la opción cuando el experimento es fallido y el costo de adquisición de información, respectivamente) coinciden, por lo que solo nos quedamos con la resta de los primeros términos.

Factorizando por α^{NA} nos queda que:

$$\begin{aligned} V_{1,2}^{NA}(\alpha^{NA}) - V_{2,1}^{NA}(\alpha^{NA}) = \alpha_{NA}[&2p_2 + 2p_1(1-p_2) - K_1(1-p_1)(1-p_2) \\ &- 2p_1 - 2p_2(1-p_1) + K_1(1-p_1)(1-p_2)] \end{aligned}$$

Pero desarrollando los términos dentro de los corchetes llegamos a que:

$$V_{1,2}^{NA}(\alpha^{NA}) - V_{2,1}^{NA}(\alpha^{NA}) = \alpha_{NA}[2p_1 + 2p_2 - 2p_1p_2 - 2p_1 - 2p_2 + 2p_1p_2]$$

Lo que claramente es cero y nos lleva a concluir que $V_{1,2}^{NA}(\alpha^{NA}) = V_{2,1}^{NA}(\alpha^{NA}) = V^{NA}$, demostrando así el lema. □

Este resultado, que va a ser particularmente importante más adelante, es algo no obvio en primera instancia, pero que tiene lógica si se piensa detenidamente. El hecho de que la agencia pueda "retroceder" en la entrega del niño dándolo en adopción en el segundo periodo a la primera familia que experimentó, hace que el valor del problema tenga las mismas opciones de salida, independiente del orden en que experimentan las familias.

El resto de las soluciones del problema vienen dadas de los respectivos problemas de maximización contingentes a los periodos, tal como se muestra a continuación.

Para el periodo 2, condicional en que se aprendió que $\theta_i = 0$ en el primer periodo,

$$\max_{\alpha_{2,2}^0} V_{1,2}^0 = \alpha_{2,2}^0(2p_2 - K_2(1-p_2)) + (1-\alpha_{2,2}^0)(2p_2 - K_1(1-p_2)) - a\frac{(\alpha_{2,2}^0)^2}{2} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \alpha_{2,2}^0 = \frac{(K_1 - K_2)(1-p_2)}{a} \tag{22}$$

$$\max_{\alpha_{2,1}^0} V_{2,1}^0 = \alpha_{2,1}^0(2p_1 - K_2(1-p_1)) + (1-\alpha_{2,1}^0)(2p_1 - K_1(1-p_1)) - a\frac{(\alpha_{2,1}^0)^2}{2} \tag{23}$$

$$\Rightarrow \alpha_{2,1}^0 = \frac{(K_1 - K_2)(1-p_1)}{a} \tag{24}$$

Y para el periodo 1,

$$\max_{\alpha_{1,1}} U_{1,2} = \alpha_{1,1}(2p_1 + (1-p_1)\beta V_{1,2}^0) + (1-\alpha_{1,1})\beta V^{NA} - a\frac{(\alpha_{1,1})^2}{2} \tag{25}$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,1} = \frac{2p_1 + (1-p_1)\beta V_{1,2}^0 - \beta V^{NA}}{a} \tag{26}$$

$$\max_{\alpha_{1,2}} U_{2,1} = \alpha_{1,2}(2p_2 + (1-p_2)\beta V_{2,1}^0) + (1-\alpha_{1,2})\beta V^{NA} - a\frac{(\alpha_{1,2})^2}{2} \tag{27}$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{2p_2 + (1-p_2)\beta V_{2,1}^0 - \beta V^{NA}}{a} \tag{28}$$

Con todas las soluciones presentes, resulta natural preguntarse si es que una ordenación es mejor que la otra. O más aún, si es que existe un orden que sea **siempre** mejor que el otro. Esto porque a pesar que los valores de continuación son iguales en el caso de "no aprendizaje", estos difieren cuando hay aprendizaje "malo" (i.e. $\theta_i = 0$), por lo que podrían existir situaciones en que un orden diera una mejor solución que otro.

La proposición a continuación responde esta pregunta.

Proposición 2 *En un escenario de un niño y dos familias con priors distintos,* ***siempre*** *es mejor ordenar a las familias de tal modo que la con mayor prior experimente primero y en segundo lugar la con menor prior.*

Demostración
Sea $W_{2,1}(\alpha^*_{1,2}, (\alpha^{0*}_{2,1}, \alpha^{NA*}))$ la solución al problema de asignación con el orden de familias 2,1. Bastará encontrar algún conjunto $(\hat{\alpha}_{1,2}, (\hat{\alpha}^0_{2,1}, \hat{\alpha}^{NA}))$ tal que

$$W_{1,2}(\hat{\alpha}_{1,2}, (\hat{\alpha}^0_{2,1}, \hat{\alpha}^{NA})) \geq W_{2,1}(\alpha^*_{1,2}, (\alpha^{0*}_{2,1}, \alpha^{NA*})) \tag{29}$$

para demostrar la proposición.

Tome $\hat{\alpha}_{1,2} = \alpha^*_{1,2}$ y $(\hat{\alpha}^0_{2,1}, \hat{\alpha}^{NA}) = (\alpha^{0*}_{2,1}, \alpha^{NA*})$. Con esto, lo que haremos será poner la adquisición de información óptima para el problema con orden familia 2 - familia 1, en el problema con orden familia 1 - familia 2.

Luego, tomamos la resta: $W_{1,2}(\hat{\alpha}_{1,2}, (\hat{\alpha}^0_{2,1}, \hat{\alpha}^{NA})) - W_{2,1}(\alpha^*_{1,2}, (\alpha^{0*}_{2,1}, \alpha^{NA*}))$, y obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \alpha^*_{1,2}(2p_1 + (1-p_1)\beta V^0_{1,2}(\alpha^{0*}_{2,1})) + (1-\alpha^*_{1,2})\beta V^{NA} - a\frac{(\alpha^*_{1,2})^2}{2} \\
&\qquad - \alpha^*_{1,2}(2p_2 + (1-p_2)\beta V^0_{2,1}(\alpha^{0*}_{2,1})) - (1-\alpha^*_{1,2})\beta V^{NA} + a\frac{(\alpha^*_{1,2})^2}{2}
\end{aligned}$$

Eliminando el segundo término con el quinto y el tercero con el sexto, el problema se reduce a:

$$= \alpha^*_{1,2}[\underbrace{2(p_1-p_2)}_{>0} + \beta\underbrace{((1-p_1)V^0_{1,2}(\alpha^{0*}_{2,1}) - (1-p_2)V^0_{2,1}(\alpha^{0*}_{2,1}))}_{(**)}] \tag{30}$$

Tal como se muestra en la ecuación (30), el primer término dentro de los corchetes es mayor a 0 (recuerde que estamos trabajando con *priors* de la forma $p_1 > p_2 \geq \hat{p} = \frac{K_1-K_2}{2+K_1}$). Entonces, debemos pasar a analizar el segundo término dentro de los corchetes.

$$\begin{aligned}
(**) &= (1-p_1)\alpha^{0*}_{2,1}(2p_2 - K_2(1-p_2)) + (1-p_1)(1-\alpha^{0*}_{2,1})(2p_2 - K_1(1-p_1)) - (1-p_1)a\frac{(\alpha^{0*}_{2,1})^2}{2} \\
&\quad - (1-p_2)\alpha^{0*}_{2,1}(2p_1 - K_2(1-p_1)) - (1-p_2)(1-\alpha^{0*}_{2,1})(2p_1 - K_1(1-p_1)) + (1-p_2)a\frac{(\alpha^{0*}_{2,1})^2}{2}
\end{aligned}$$

lo que factorizando nos da

$$\begin{aligned}
(**) &= \alpha^{0*}_{2,1}[2p_2(1-p_1) - K_2(1-p_1)(1-p_2) - 2p_1(1-p_2) + K_2(1-p_1)(1-p_2)] \\
&\quad + (1-\alpha^{0*}_{2,1})[2p_2(1-p_1) - K_1(1-p_1)(1-p_2) - 2p_1(1-p_2) + K_1(1-p_1)(1-p_2)] \\
&\quad + a\frac{(\alpha^{0*}_{2,1})^2}{2}(p_1-p_2)
\end{aligned}$$

Finalmente, reduciendo términos llegamos a que

$$(**) = \alpha^{0*}_{2,1}[2p_2 - 2p_1] + (1 - \alpha^{0*}_{2,1})[2_p2 - 2p_1] + (p_1 - p_2)\frac{a}{2}(\alpha^{0*}_{2,1})^2$$
$$(**) = [\frac{a}{2}(\alpha^{0*}_{2,1})^2 - 2](p_1 - p_2)$$

Entonces, reemplazando $(**)$ en la ecuación (30) tenemos que

$$\begin{aligned} W_{1,2}(\hat{\alpha}_{1,2}, (\hat{\alpha}^0_{2,1}, \hat{\alpha}^{NA})) - W_{2,1}(\alpha^*_{1,2}, (\alpha^{0*}_{2,1}, \alpha^{NA*})) &= \alpha^{0*}_{1,2}[2(p_1 - p_2) + \beta(p_1 - p_2)(\frac{a}{2}(\alpha^{0*}_{2,1})^2 - 2)] \\ &= \alpha^{0*}_{1,2}[2(p_1 - p_2)(1 - \beta) + \beta(p_1 - p_2)\frac{a}{2}(\alpha^{0*}_{2,1})^2] \end{aligned} \tag{31}$$

Como $\alpha^{0*}_{2,1}$ y β son números entre 0 y 1, y como $(p_1 - p_2) > 0$, es claro que (31) es positivo, y por ende queda establecido que $W_{1,2}(\hat{\alpha}_{1,2}, (\hat{\alpha}^0_{2,1}, \hat{\alpha}^{NA})) \geq W_{2,1}(\alpha^*_{1,2}, (\alpha^{0*}_{2,1}, \alpha^{NA*}))$, lo que demuestra la proposición. □

Este resultado es uno de los principales de este trabajo por cuanto tiene aplicaciones directas en políticas públicas sobre problemas de asignación con adquisición de información. Esto ya que el resultado excede al problema de la adopción y permite concluir que siempre será mejor mantener un orden para resolver este tipo de problemas.

La intuición detrás del resultado es clara: como la agencia tiene la opción de terminar el juego al primer periodo (i.e. entrega al niño a la primera familia), es conveniente hacer lo posible por evitar pasar al segundo periodo y entrar en gastos de tiempo y nuevos experimentos. En este sentido, la experimentación primero con la familia con mayor *prior* le asegura mayores opciones de que el juego se acabe en el primer periodo, maximizando así el bienestar social.

4.2. Un niño e I familias con *priors* distintos

Otra aplicación interesante del resultado anterior, es que es posible extenderlo, de manera natural a un contexto de un niño e I familias sin perder generalidad, tal como se plantea en el siguiente teorema.

Teorema 1 *En un problema de asignación de un objeto e I demandantes, el bienestar social se maximiza cuando se hace experimentar en orden descendente a los demandantes según su prior.*

Demostración
La prueba es por construcción. Suponga que tiene I familias todas con *priors* distintos y mayores que $\hat{p}$. Tome el resultado expuesto en la proposición 2, y comience a comparar de a pares las familias. De la proposición 2 se sigue que cada vez que tome una pareja le convendrá ordenarlas de modo que la con mayor *prior* quede primero y en segundo lugar la con menor *prior*. Iterando este proceso para todas las parejas se obtiene el orden establecido en el teorema, completando así la demostración de este.

Otra forma, quizás más ordenada de verlo (aunque no tan clara), es que tome la primera de las I familias y comience a compararla con las $I-1$ restantes. Si en algún momento resultó que es conveniente que la familia n vaya antes que la primera, continúe comparando la n-ésima familia con las $I-(n+1)$ restantes (note que si era conveniente partir con la primera familia a las $n+1$ anteriores, entonces es lógico que a la n-ésima familia, que conviene ponerla antes que la primera, también convendrá ponerla antes que las $n+1$). Luego, una vez que termine de comparar a la n-ésima familia con las restantes, parta por experimentar con esa. Y para el segundo periodo repita el mismo proceso, hasta el periodo I en caso de que exista. $\square$

Ahora bien, teniendo en cuenta este teorema, quisiéramos generalizar este resultado de modo de analizar los comportamientos tanto de la utilidad como de la adquisición de información en cada periodo del tiempo. Note que hasta ahora solo hemos caracterizado un orden óptimo, sin haber dicho nada acerca de lo que sucede en cada periodo.

Formalizando, tenemos un conjunto I de familias buscando adoptar, que ya han sido ordenadas por la agencia de manera descendente (i.e. $p_1 > p_2 > p_3 > ... > p_I$, donde el subíndice indica el "turno" de experimentación). Asumiremos también que las familias difieren en su prior (una vez ordenados) de la manera $p_{i+1} = \lambda p_i, \forall i, \lambda \in (0,1)$, así podremos expresar cualquier p_i en función de algún p conveniente.

Lo que queremos, es hacer una formulación recursiva, de tal modo que para cualquier p_i podamos establecer el valor de la esperanza de experimentación, además de caracterizar su nivel óptimo de adquisición de información. Para esto, definimos lo siguiente.

Definición 4 *Sea $V(q,p)$ la función de valor para un proceso de entrevistas, en que experimenta una familia con prior p, y donde la mejor opción disponible es una familia con* prior *q.*

Implicitamente, $V(q,p)$ esconde que existe una familia anterior a la con *prior p* que experimentó en algún periodo pasado y que producto de un experimento fallido no se le entregó el niño en adopción, pero se mantuvo como opción para el futuro.

De esta manera, podemos escribir la función de valor como:

$$\begin{aligned} V(q,p) = \max_{\alpha} \;\; & \alpha(2p + (1-p)\max\{2q - K_1(1-q), \beta V(q, \lambda p)\}) \\ & + (1-\alpha)\max\{2q - K_1(1-q), \beta V(q,\lambda p)\} - a\frac{\alpha^2}{2} \end{aligned} \tag{32}$$

Que reordenando términos y factorizando queda como:

$$V(q,p) = \max_{\alpha} \;\; \alpha p 2 + (1-\alpha p)\max\{2q - K_1(1-q), \beta V(q,\lambda p)\} - a\frac{\alpha^2}{2} \tag{33}$$

En base a la ecuación (33) podemos establecer el siguiente lema:

Lema 2

1) $\exists\ \overline{p}(q,\lambda)$ *tal que* $\max\{2q - K_1(1-q), \beta V(q,\lambda p)\} = 2q - K_1(1-q) \forall p < \overline{p}(q,\lambda)$

2) $V(q,p)$ tiene la propiedad de Single-Crossing *sobre* $2q - K_1(1-q)$

Demostración
Partiremos demostrando la segunda parte del lema, ya que nos será útil para la demostración de la primera.

Suponga que existe p tal que $\beta V(q,p) > 2q - K_1(1-q)$. Entonces, podemos notar que existe $\frac{p}{\lambda}$ que hace:

$$V(q, \frac{p}{\lambda}) = \max_{\alpha}(\alpha\frac{p}{\lambda})2 + (1-\alpha\frac{p}{\lambda})\beta V(q,p) - a\frac{\alpha^2}{2} \tag{34}$$

Si acotamos por abajo, es decir, tomamos $\alpha = 0$, es claro ver que

$$\begin{aligned} V(q, \frac{p}{\lambda}) &\geq \beta V(q,p) \\ &> [2q - K_1(1-q)] \end{aligned} \tag{35}$$

La ecuación (35) nos permite demostrar la propiedad de *Single-Crossing*, puesto que estando una sola vez por sobre la "barrera" de $2q - K_1(1-q)$, nos aseguramos que siempre estaremos arriba de ella si hacemos crecer p. En palabras, solo podemos cruzar una vez la recta $2q - K_1(1-q)$, puesto que si seguimos creciendo en p, $V(q,p)$ también crece. (Note que esto también demuestra que V es débilmente creciente en p para valores $p > \overline{p}$)

Para probar que el p que recién supusimos existe, basta con tomar la función de valor y evaluarla en $p = q$, lo que nos entrega

$$V(q,q) = \max_{\alpha} \alpha 2p + (1-\alpha)\max\{2q - K_1(1-q), \beta V(\lambda q)\} - a\frac{\alpha^2}{2} \tag{36}$$

Si nuevamente acotamos por el "peor" escenario posible ($\alpha = 0$):

$$V(q,q) = \max\{2q - K_1(1-q), \beta V(q,\lambda q)\} \geq 2q - K_1(1-q) \tag{37}$$

Lo que demuestra que en $p = q$ estamos al menos igual que $2q - K_1(1-q)$. Pero lo que buscamos es demostrar que estamos estrictamente sobre dicha "barrera". Para esto, derive la última ecuación con respecto a α y evalúe en 0:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial V(q,q)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} &= 2q - q\max\{2q - K_1(1-q), \beta V(q,\lambda q)\} - a\alpha\Big|_{\alpha=0} \\ &= 2q - q\max\{2q - K_1(1-q), \beta V(q,\lambda q)\} > 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Con esto, se demuestra que la función V es creciente en el punto $\alpha = 0$, lo que asegura que para $\alpha = arg\max V(q,q)$, la función de valor es estrictamente mayor que $2q - K_1(1-q)$.

Ahora bien, la primera parte del lema requiere ver qué sucede en los puntos en que V se encuentra bajo $2q - K_1(1-q)$.

Antes que todo, note que si $p = 0$, entonces

$$V(q, 0) = \max_{\alpha} 2q - K_1(1 - q) - \frac{\alpha^2}{2} = 2q - K_1(1 - q)$$

A partir de esta observación, trabajaremos con valores de q tales que $2q - K_1(1 - q) > 0$, para parámetros K_1, a y λ dados. Esto, porque para el problema es natural pensar que la mejor opción que se tiene debe generar utilidad positiva para la familia (i.e. si una familia adopta solo con su prior, es lógico pensar que, en esperanza, deriva utilidad positiva por la adopción. En caso de no ser así, preferiría no adoptar).

A continuación, nos gustaría ver qué sucede para valores de p cercanos a 0. Para esto notemos que si obviamos el máximo presente en la ecuación (33), podemos escribir la función de valor como

$$V(q, p) = \max_{\alpha} \quad \alpha p 2 + (1 - \alpha p)\beta V(q, \lambda p) - a\frac{\alpha^2}{2}$$

Cuyo argumento máximo se obtiene de resolver la condición de primer orden y es

$$\alpha^* = \frac{(2 - \beta V(q, \lambda p))p}{a}$$

Si reemplazamos α^* en la función de valor obtenemos

$$V^*(q, p) = \frac{[2 - \beta V(q, \lambda p)]^2 p^2}{2a} + \beta V(q, \lambda p) \tag{39}$$

Tome ahora p tan pequeño como quiera. Luego, como el término en corchetes de la ecuación (35) está acotado superiormente por 2, el factor p^2 del primer término en la ecuación (35) tiende a 0, por lo que la función de valor nos queda

$$V^*(q, p) = \beta V(q, \lambda p) \Rightarrow V^*(q, p) < V(q, \lambda p) \tag{40}$$

De la ecuación (36) obtenemos que para valores de p cercanos a 0, la función de valor es decreciente en p. Luego hemos demostrado que existen valores de p para los cuales la función V está por debajo de la "barrera" $2q - K_1(1 - q)$, y valores para los cuales está por sobre esta misma. Finalmente, dado que V es continua, por teorema de valor intermedio se demuestra la existencia de $\overline{p}$. $\square$

Este lema define claramente una situación de borde (o situación límite) intuitiva: existe algún momento en que no conviene seguir experimentando y asignar al niño a la mejor familia disponible (conocida como q). Esto porque al mismo tiempo que estamos descontando la utilidad periodo a periodo, estamos experimentando con familias cada vez "peores" en cuanto a su *prior*, por lo que cada vez tenemos una esperanza de utilidad menor.

Entendido esto último, quisiéramos caracterizar, a partir de esta condición límite, cómo son las funciones de valor para cualquier p y también como son los α óptimos. Para hacer esto, nos referiremos a los resultados desarrollados durante la demostración del lema 2, a la vez que usaremos esta condición de borde para terminar la caracterización.

Sea $p > \overline{p} > \lambda p$. Como $\lambda p < \overline{p}$, entonces tenemos que $\beta V(q, \lambda p) < 2q - K_1(1-q)$, por ende esta familia (i.e. la con *prior* λp) nunca llega a experimentar con el niño, o dicho de otro modo, el juego se acaba antes de que pueda entrevistarse con el menor.

Con esto, podemos resolver para p:

$$V(q,p) = \max_{\alpha}\ \alpha\lambda p 2 + (1-\alpha\lambda p)(2q - K_1(1-q)) - a\frac{\alpha^2}{2} \tag{41}$$

Luego, resolviendo al condición de primer orden tenemos que

$$\alpha^* = \frac{2\lambda p - (2q - K_1(1-q))\lambda p}{a} = \frac{(2+K_1)(1-q)\lambda p}{a} \tag{42}$$

En base a este resultado y a los expuestos en la demostración del lema 2, resulta evidente que existe un comportamiento similar que se reitera periodo a periodo. Gracias a esto podemos caracterizar tanto el valor de la experimentación, como la adquisición de información, para cualquier familia p de un conjunto I de familias que desean adoptar.

Proposición 3 *Sea I un conjunto finito de familias, todas con distintos* priors *tales que $p_{i+1} = \lambda p_i$, con $\lambda \in (0,1)$. Sea $\overline{p}(\lambda, q)$ un valor que define el* prior *de la última familia con la que conviene experimentar. Entonces tenemos que:*

Para todo $p > \overline{p}(\lambda, q) > \lambda p$, se define un $T < I$ que representa el último periodo en una sucesión de entrevistas con niños, tal que:

$$V_T(q,p) = \max_{\alpha}\ \alpha p 2 + (1-\alpha p)(2q - K_1(1-q)) - a\frac{\alpha^2}{2}$$

cuya respectiva adquisición de información óptima es:

$$\alpha_T^* = \frac{(2+K_1)(1-q)p}{a}$$

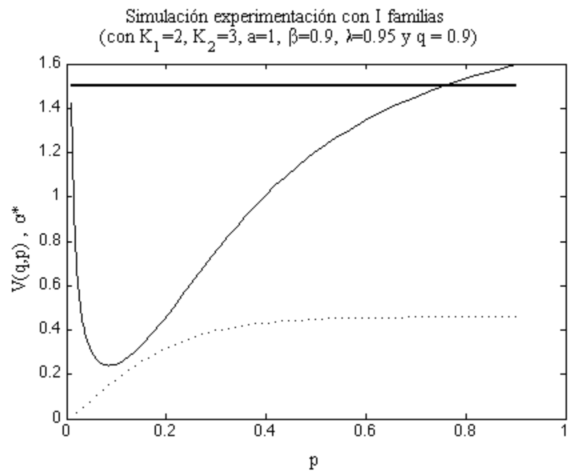
A su vez, para todo $p > \lambda p > \overline{p}(\lambda, q)$:

$$V(q,p) = \max_{\alpha}\ \alpha p 2 + (1-\alpha p)\beta V(q, \lambda p) - a\frac{\alpha^2}{2}$$

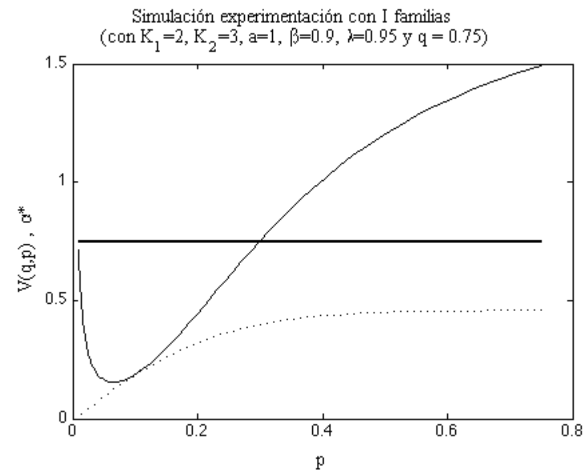
y la respectiva adquisición de información óptima queda definida por:

$$\alpha^* = \frac{(2 - \beta V(q, \lambda p))p}{a}$$

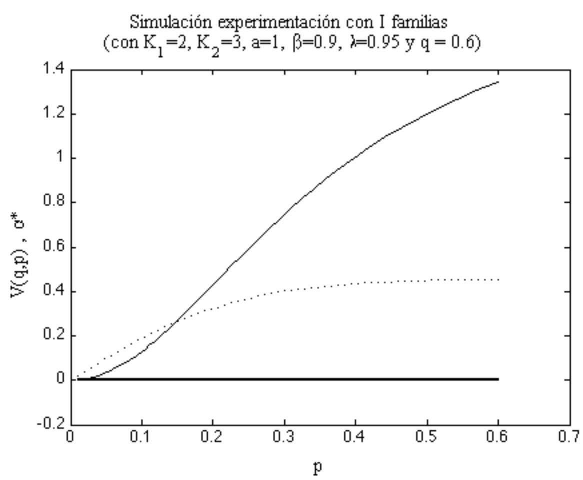
Con esto, podemos realizar simulaciones de series de experimentación de modo de analizar el comportamiento del problema "a lo largo del tiempo". En la Figura 2 se muestra el resultado de una serie de simulaciones para distintos valores de q, que además de ser la mejor alternativa disponible, es también la primera familia en experimentar.



(a) simulación 1



(b) simulación 2



(c) simulación 3

Figura 2: Para todas las figuras $V(q,p)$ se presenta en línea continua delgada, α^* en línea segmentada y $2q - K_1(1-q)$ en línea horizontal

En primer lugar, podemos ver de las simulaciones que son todas acorde a lo planteado tanto en el lema 2, como en la proposición 3. Más importante aún es el rol que juega el valor de q, puesto que el elevar el valor de la opción disponible a la hora de experimentar, hace que el juego termine antes (i.e. existen menos valores de p para los cuales la función de valor es mayor que la "barrera").

Note que hay una serie de características que se repiten a lo largo de las tres simulaciones presentadas: (i) $V(\cdot,\cdot)$ es siempre creciente en p mientras hay experimentación y (ii) α es creciente en p para todo valor de p.

Además es posible apreciar que para los valores cercanos a 0, la función de valor tiene tramos decrecientes en p siempre y cuando se encuentre por debajo de $2q - K_1(1-q)$ (ya discutidos en el lema 2). No obstante, como para dichos tramos no existe experimentación, la función de valor relevante en esa zona es $2q - K_1(1-q)$. Formalmente, podemos caracterizar la función de valor como:

$$V(q,p)=\begin{cases}\text{máx}_\alpha \ \ \alpha p2+(1-\alpha p)\beta V(q,\lambda p)-a\frac{\alpha^2}{2} & si \ \ p>\lambda p>\overline{p}\\ \text{máx}_\alpha \ \ \alpha p2+(1-\alpha p)(2q-K_1(1-q))-a\frac{\alpha^2}{2} & si \ \ p>\overline{p}>\lambda p\\ 2q-K_1(1-q) & c.o.c.\end{cases} \tag{43}$$

Como la afirmación (i) ya ha sido demostrada anteriormente, nos queda demostrar la afirmación (ii), lo que hacemos en el siguiente lema.

Lema 3 *Para todo* $p\in(0,1)$, $\alpha(p)=arg\,\text{máx}_\alpha \ \ \alpha p2+(1-\alpha p)\beta V(q,\lambda p)-a\frac{\alpha^2}{2}$, *es creciente.*

Demostración
Nos gustaría demostrar que la derivada de α respecto de p es positiva para todo p (i.e. $\frac{\partial\alpha^*}{\partial p}>0,\forall p\in(0,1)$).

Antes de pasar a la demostración propiamente tal, nos será de gran utilidad hacer una caracterización de la función de valor. Recordamos la ecuación (35), aunque para ahorrar notación obviaremos el primer parámetro de la función

$$V^*(p)=\frac{[2-\beta V(\lambda p)]^2p^2}{2a}+\beta V(\lambda p)$$

Derivando con respecto a p tenemos

$$\frac{\partial V(p)}{\partial p}=V_p(p)=\frac{p}{a}[2-\beta V(\lambda p)][2-\beta V(\lambda p)-\beta\lambda V_p(\lambda p)p]+\beta\lambda V_p(\lambda p) \tag{44}$$

Pero si hacemos $\lambda\to1$ (i.e. hacemos que el decrecimiento de los priors sea lo más “suave” posible) nos queda

$$V_p(p)=\frac{p}{a}(2-\beta V(p))[2-\beta V(p)-\beta V_p(p)p]+\beta V_p(p) \tag{45}$$

Que claramente es una ecuación diferencial para la función de valor.

Dejamos pendiente por un momento dicho resultado, para pasar a caracterizar la derivada de α. Recordamos primero la fórmula de α

$$\alpha^*(\frac{p}{\lambda})=\frac{(2-\beta V(\lambda\frac{p}{\lambda}))p}{a\lambda}$$

Derivando con respecto al *prior*

$$\frac{\partial\alpha^*(\frac{p}{\lambda})}{\partial p}=\frac{1}{a\lambda}[2-\beta V(p)-\beta pV_p(p)] \tag{46}$$

Pero note que en la ecuación (41) tenemos un expresión similar. Reordenando (41) tenemos que

$$(1-\beta)V_p(p) = \frac{p}{a}(2-\beta V(p))[2-\beta V(p) - \beta p V_p(p)] \tag{47}$$

$$\Rightarrow [2-\beta V(p) - \beta p V_p(p)] = \frac{a(1-\beta)V_p(p)}{p(2-\beta V(p))} \tag{48}$$

Luego, reemplazando (48) en (46)

$$\frac{\partial \alpha^*(\frac{p}{\lambda})}{\partial p} = \frac{(1-\beta)V_p(p)}{\lambda p(2-\beta V(p))} \tag{49}$$

De la ecuación (45) es posible concluir que α es creciente en p, ya que cada uno de los factores involucrados en la fracción son números positivos, lo que demuestra el lema. □

La intuición detrás estos resultados es clara y acorde con lo que uno pensaría en primera instancia. A medida que decrece el *prior* de las familias que se entrevistan con un niño, estas adquieren cada vez menos información por dos razones: (i) es cada vez menor la probabilidad de que efectivamente les guste el menor, pero también (ii) el hecho de "competir" con una opción que es cada vez mejor (en términos relativos), hace que el esfuerzo por informarse sea más costoso (es más difícil ganarle a esta opción).

Por otra parte, es claro que a la agencia no le conviene experimentar "infinitamente", sino que el tener la posibilidad de entregar el niño a una familia que aunque no le gusta con certeza sí tiene altas probabilidades de gustarle, hace que exista un subconjunto de *priors* donde es óptimo experimentar. De esto último es posible concluir que existe una especie de "precio de reserva" por parte de la agencia, en el sentido de que prefiere no experimentar (y por ende no entregar al niño) con familias cuyo *prior* esté bajo cierto valor.

Esto, lejos de ser llamativo, es bastante razonable: la agencia no querrá entregar un niño en adopción a una familia que *a priori* parece ser una "mala" familia. Aún cuando existe la posibilidad de que esa familia sea efectivamente un buena familia para el menor, la agencia decide ni siquiera experimentar evitando desperdiciar recursos. Note además que esto es muy similar a lo que ocurría en el modelo simple, donde este "*prior* de reserva" estaba fijado por $\hat{p}$.

4.3. Un niño y dos familias con distintos parámetros de costos

Otra extensión interesante resulta de la diferenciación de las familias a través de su parámetro de costos. Este parámetro busca captar las posibles diferencias no en cuanto le gusta un niño a una determinada familia, sino en los esfuerzos que esta debe hacer por lograr adoptar a un niño.

Al igual que en la sección anterior, no es extraño pensar en que las familias tengan distintos parámetros de costos. Piense por ejemplo que durante el transcurso de todo el proceso de adopción hay costos burocráticos (papeleos, por ejemplo), además de sucesivos viajes a entrevistas, tiempo gastado, solo por mencionar algunos. Todo eso trata de captar este parámetro y dar una idea de si alguna familia tiene menores costos que otra en ese conjunto de trámites.

En este caso, el *contexto* será con 2 familias con igual *prior* $p_1 = p_2 = p > \hat{p}$, pero con a_i distintos. Además se mantendrá el factor de descuento intertemporal $\beta \in (0, 1)$.

Como la técnica de resolución es la misma que hemos usado hasta el momento, y el problema sigue teniendo la misma estructura, podemos caracterizar sin mayores problemas la adquisición de información óptima en cada momento del tiempo para los dos ordenamientos posibles. Recordando las ecuaciones (6), (7) y (10) y adaptándolas a a_i's distintos obtenemos:

$$\alpha_{2,2}^{NA} = \frac{(2 + K_1)p(1 - p)}{a_2} \tag{50}$$

$$\alpha_{2,1}^{NA} = \frac{(2 + K_1)p(1 - p)}{a_1} \tag{51}$$

$$\alpha_{2,2}^{0} = \frac{(K_1 - K_2)(1 - p)}{a_2} \tag{52}$$

$$\alpha_{2,1}^{0} = \frac{(K_1 - K_2)(1 - p)}{a_1} \tag{53}$$

$$\alpha_{1,1} = \frac{2p + (1 - p)\beta V_{1,2}^{0} - \beta V_{1,2}^{NA}}{a_1} \tag{54}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{2p + (1 - p)\beta V_{2,1}^{0} - \beta V_{2,1}^{NA}}{a_2} \tag{55}$$

Con estos resultados, y habiendo tomado en cuenta la proposición 2 antes vista, sería lógico pensar que por los mismos motivos por los que resulta óptimo hacer experimentar primero a la familia con mayor *prior*, convendría hacer experimentar primero a aquella familia con menores costos. No obstante, esto no es siempre posible, lo que se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4 *En un contexto de adquisición de información dinámica con agentes diferenciados por su parámetro de costos,* ***no*** *existe un orden que* ***siempre*** *sea mejor que el otro. En particular, existen algunos casos en que conviene hacer experimentar a aquella familia con mayores costos primero.*

Demostración
Es posible demostrar esta proposición mediante dos ejemplos en los cuales se pueda apreciar claramente diferentes casos en los que el orden "óptimo" no sea el mismo.

Para esto, y tomando en cuenta las soluciones planteadas en las ecuaciones (50) a (55), se simularon distintas situaciones en las que manteniendo fijo todo lo demás, se varía a_2 en un rango de valores cercanos a a_1. En rigor, se presentan dos simulaciones del problema en un contexto donde $K_1 = 3,\ K_2 = 2,\ \beta = 0{,}9$ y $a_1 = 1$. En la Figura 3 el *prior* es $p = 0{,}9$, mientras que en la Figura 4 el *prior* es $p = 0{,}6$. En ambas se pueden ver los valores que adquiere el bienestar social para los problemas de experimentación en el orden $(1, 2)$ y en el orden $(2, 1)$.

De las figuras es posible notar, en primer lugar, la monotonicidad decreciente de las funciones de bienestar social en el parámetro de costos a_2. Esto va en el mismo sentido que se señaló en

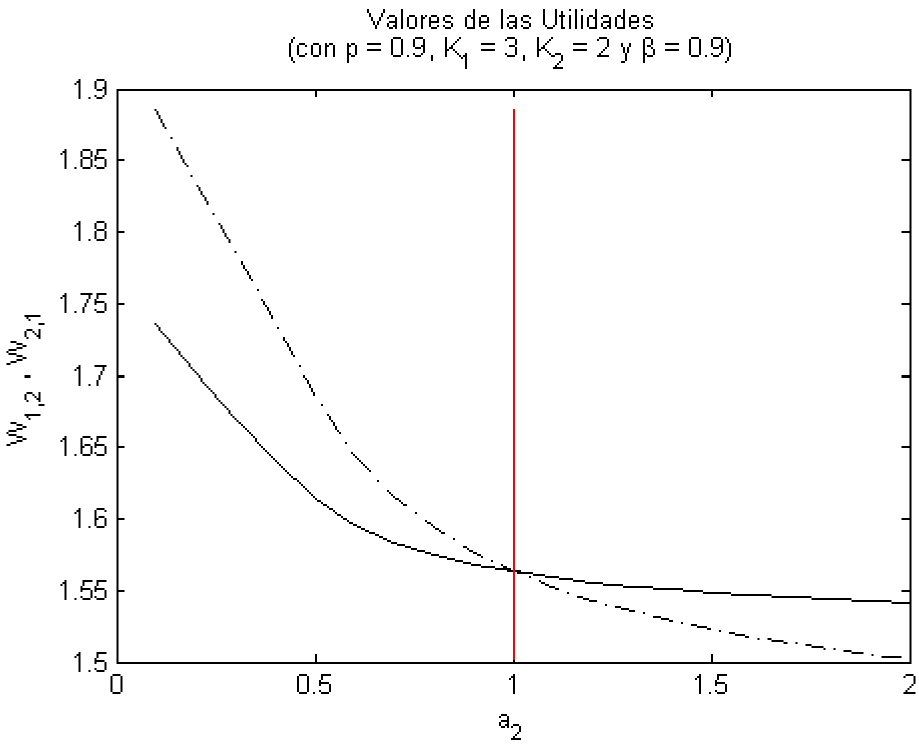


Figura 3: $W_{1,2}(\cdot)$ en línea contínua y $W_{2,1}(\cdot)$ en línea segmentada. La línea vertical marca $a_1 = 1$.

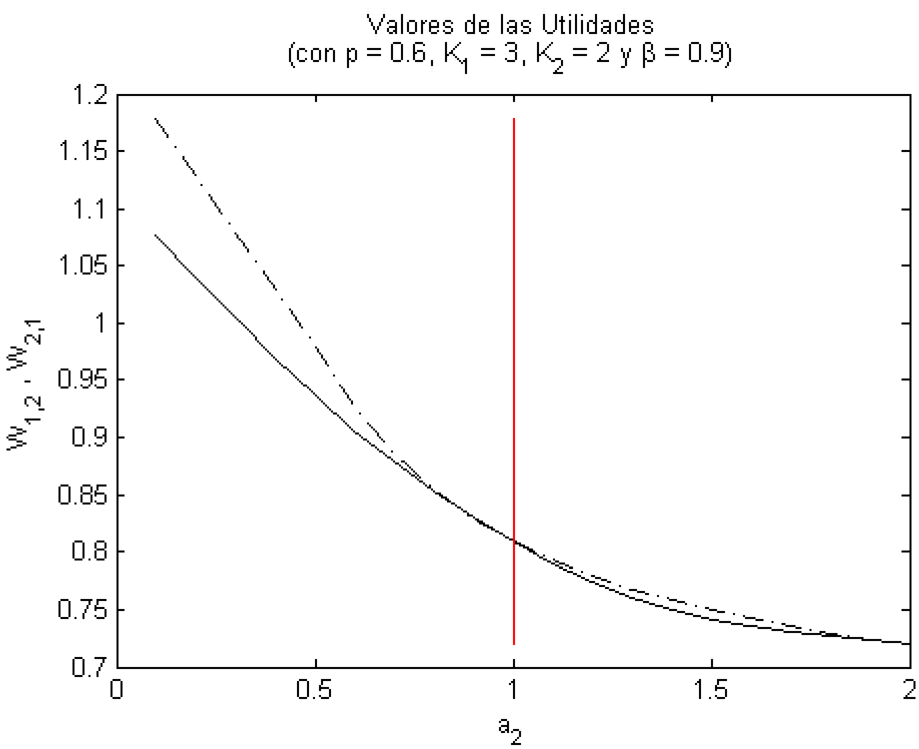


Figura 4: $W_{1,2}(\cdot)$ en línea contínua y $W_{2,1}(\cdot)$ en línea segmentada. La línea vertical marca $a_1 = 1$.

la sección 4.1 y que es transversal a todo este trabajo, y es que mientras más costosa es la adquisición de información no solo se ve afectada la adquisición de información óptima sino que al mismo tiempo el bienestar social cae producto de la menor información adquirida.

Por otra parte, para todas las figuras se graficó una línea vertical en 1 de modo de facilitar el entendimiento y la comprensión de los gráficos. Puntualmente, en la zona a la izquierda de la línea vertical $a_2 < a_1 = 1$, por lo que se esperaría que $W_{2,1}$ (la línea segmentada) estuviera por sobre $W_{1,2}$ (la línea contínua). Del mismo modo, en el sector derecho se esperaría justamente lo contrario, es decir, que la línea contínua estuviera por sobre la segmentada.

De la mera apreciación de la figura 3 podemos notar que esto no sucede siempre, y al contrario que en la proposición 2, existen situaciones en las que conviene hacer experimentar primero a la familia con mayores costos de adquisición de información. $\square$

Si bien este resultado es contra intuitivo tiene una explicación lógica detrás. Para ser más específicos, tomaremos el caso cuando $p = 0{,}6$ y $a_2 = 1{,}5$. Lo primero es notar de las ecuaciones (50) a las (53), que siempre la familia 1 adquirirá más información que la familia 2, lo que tiene sentido ya que para la familia 1 es más barato experimentar. Esto hará que los valores de continuación ($V^S_{i,-i}$) para el problema con orden $(1, 2)$ sean menores que en el problema con orden $(2, 1)$. Además note que, *todo lo demás constante*, también es cierto que en el primer periodo la familia 1 adquiere más información que la familia 2.

Entonces, es en este *trade-off* que existe entre adquirir más información hoy y tener una peor opción mañana versus adquirir poca información hoy, pero reservar una opción buena para mañana, de donde surge el resultado.

Lo que sucede, es que para valores cercanos de los a_i, sumado a valores no tan altos de los *priors*, el planificador prefiere tener la flexibilidad de "guardarse" a la "mejor" familia para el segundo periodo, de modo de poder adaptarse mejor a una situación adversa en el primer periodo. Esto en desmedro de ir con la familia cuyo a_i es más bajo al primer periodo, lo que, en caso de un resultado adverso en la experimentación, lo deja con poca capacidad de adaptarse ya que la adquisición de información será más costosa en el segundo periodo.

5. Hacia un modelo general: Traspaso de información

Hasta ahora hemos trabajado solo con parámetros que no admiten traspasos de información. En palabras técnicas, los parámetros del problema han sido estríctamente privados, lo que hace que lo aprenda una familia no afecte ningún parámetro de la otra familia.

Si bien existen diversas formas en que se puede incorporar esta dinámica de traspasos de información, en este trabajo se abordará la que se cree más intuitiva para el problema. Esto es, mediante la incorporación de *priors* interdependientes, se busca que las familias no sean indiferentes en su actuar óptimo condicional en lo que aprendió la familia anterior.

El hecho de incorporar *priors* interdependientes surge de manera natural al pensar en una serie de experimentos (entrevistas). De alguna manera (explicitada más abajo), las familias que están a la espera de su entrevista actualizan sus creencias (sus *priors*) conforme observan los resultados de las entrevistas pasadas.

Una buena forma de ilustrar esto, es pensando en un ejemplo. Suponga que usted está pensando en adoptar un niño, por lo cual acude a la agencia de adopciones para solicitar una entrevista. Al llegar a la agencia se le pregunta cuál es su *prior*, al mismo tiempo que se le informa de los resultados de entrevistas anteriores para dicho niño.

Naturalmente, su *prior* no va a ser el mismo si es que usted es la primera persona que se va a entrevistar con el niño (en cuyo caso no hay "historia pasada"), que si se le informa que tres familias han aprendido que no les gusta el niño. Probablemente en este último escenario su *prior* se ajuste hacia abajo, ya que "debe ser por algo que no les ha gustado este niño", pensará usted. Es justamente este efecto el que se pretende captar con la existencia de *priors* interdependientes, la posibilidad de ajustar las creencias según la historia pasada.

Formalmente, los *priors* tendrán la siguiente forma funcional:

$$\tilde{p_i} = \frac{p_i + \gamma p_j}{1+\gamma} \tag{56}$$

donde $\tilde{p_i}$ es la creencia actualizada con la información de los demás.

Antes de seguir avanzando, es importante mencionar que la actualización se da ya sea con *priors* o con realizaciones de los tipos. Esto es, si una familia aprende su verdadero tipo, diremos que su *prior* cambió de p_i a 0 o a 1, en caso de que su tipo sea $\theta_i = 0$ o $\theta_i = 1$ respectivamente.

Una vez dicho esto, el resto del problema se mantiene igual a la primera configuración. Esto significa que hay solo dos familias y un niño, que los parámetros de costos de ambas familias son el mismo ($a_i = a_j = a$) y que los *priors* iniciales de cada familia son iguales ($p_i = p_j = p$).

Con todo lo anterior, es posible formular la siguiente proposición:

Proposición 5 *En un ambiente de adquisición de información dinámica con priors interdependientes:*

1. *Existe un mecanismo de pagos VCG que sea compatible en incentivos y que induzca participación voluntaria para el caso privado.*
2. *La adquisición de información óptima que adquieren los agentes en el problema privado, no coincide siempre con la solución del planificador social.*

Demostración Para probar la proposición, resolveremos primero el problema del planificador social. Posteriormente construiremos el problema privado, de donde saldrá la prueba a la parte (1) de la proposición. Finalmente durante la resolución del problema privado, quedará demostrada la parte (2).

Usando inducción hacia atrás podemos notar que en caso de que en el primer periodo la familia uno no aprendió el problema queda definido por

$$\max_{\alpha^{NA,s}} V_{NA} = \alpha^{NA,s}\left(2+(1-p)\left[2\frac{p}{1+\gamma} - K_1\left(1-\frac{p}{1+\gamma}\right)\right]\right) + (1-\alpha^{NA,s})[2p - K_1(1-p)] - a\frac{(\alpha^{NA,s})^2}{2} \tag{57}$$

Dos cosas son importantes de resaltar para el correcto entendimiento del planteamiento. Primero, dado que la familia uno no aprendió en su experimentación, su *prior* sigue siendo p, por lo que no modifica las creencias de la familia dos. En segundo lugar, en caso de que la segunda familia aprende que no le gusta el niño ($\theta_2 = 0$), entonces se entrega el niño a la familia uno, cuya utilidad se calcula sobre los priors actualizados al resultado de la familia dos: dado que ahora $p_2 = 0$, entonces $\tilde{p_1} = \frac{p+\gamma 0}{1+\gamma} = \frac{p}{1+\gamma}$.

Resolviendo la condición de primer orden para la ecuación (57) llegamos al resultado

$$\alpha^{NA,s} = \frac{(2+K_1)(1-p)p}{a(1+\gamma)} \tag{58}$$

Por otra parte, si la familia uno aprende que el niño no le gusta, la familia dos actualizará su *prior* de la forma $\tilde{p_2} = \frac{p+\gamma 0}{1+\gamma} = \frac{p}{1+\gamma}$, con lo que el problema queda definido por

$$\max_{\alpha^{0,s}} V_0 = \alpha^{0,s}\left(2\frac{p}{1+\gamma} - K_2\left(1-\frac{p}{1+\gamma}\right)\right) + (1-\alpha^{0,s})\left[2\frac{p}{1+\gamma} - K_1\left(1-\frac{p}{1+\gamma}\right)\right] - a\frac{(\alpha^{0,s})^2}{2} \tag{59}$$

Y la respectiva solución

$$\alpha_2^{0,s} = \frac{(K_1-K_2)(1+\gamma-p)}{a(1+\gamma)} \tag{60}$$

Con ambas soluciones, podemos plantear el problema del primer periodo tomando como valores de continuación las mejores soluciones del segundo periodo en cada caso. De esta manera, el problema que resuelve el planificador en el primer periodo y su solución quedan descritos por

$$\max_{\alpha_1^s} U = \alpha_1^s(2p + (1-p)V_0^*) + (1-\alpha_1^s)V_{NA}^* - a\frac{(\alpha_1)^2}{2} \tag{61}$$

$$\alpha_1^s = \frac{2p + V_0^*(1-p) - V_{NA}^*}{a} \tag{62}$$

Es importante recalcar que si bien la estructura de la adquisición de información óptima de este primer periodo es igual a la que se obtiene sin traspasos de información (ecuación 11), estas difieren en los valores de continuación, ya que estos no son iguales a los obtenidos anteriormente.

Ahora, pasando al problema privado, lo importante será encontrar los pagos de tipo VCG que hagan que el mecanismo sea compatible en incentivos. Una vez hecho esto, el problema que resuelve el individuo se resuelve de manera natural, tal como se hizo en la demostración de la proposición 1.

En primer lugar, se verá qué sucede cuando la primera familia aprendió que su tipo es igual a 0. Condicional a este escenario, la familia dos tiene tres posibles resultados: (i) aprende que le gusta el niño ($\theta_2 = 1$), (ii) aprende que no le gusta el niño ($\theta_2 = 0$) o (iii) no aprende ($\theta_2 = p$). En el Cuadro 1 se muestra una tabla que resume las valoraciones, los pagos (del tipo VCG) y las utilidades netas en cada uno de los tres casos.

De la lectura del cuadro se puede notar que este esquema de pagos es efectivamente compatible en incentivos: tanto si la familia resulta ser de tipo 1 o de tipo p no obtiene mayor

Cuadro 1: Resumen de valoraciones, pagos y utilidades netas de la familia 2, cuando $\theta_1 = 0$

	Valoración	Pago	Utilidad
$\theta_2 = 1$	2	$-K_2$	$2 + K_2$
$\theta_2 = p$	$2\frac{p}{1+\gamma} - K_1\left(1 - \frac{p}{1+\gamma}\right)$	$-K_2$	$2\frac{p}{1+\gamma} - K_1\left(1 - \frac{p}{1+\gamma}\right) + K_2$
$\theta_2 = 0$	0	0	0

Cuadro 2: Resumen de valoraciones, pagos y utilidades netas de la familia 2, cuando $\theta_1 = p$

	Valoración	Pago	Utilidad
$\theta_2 = 1$	2	$2p - K_1(1-p)$	$2 - [2p - K_1(1-p)]$
$\theta_2 = p$	$\frac{1}{2}(2p - K_1(1-p))$	$\frac{1}{2}(2p - K_1(1-p))$	0
$\theta_2 = 0$	0	0	0

utilidad por desviarse, sino que queda igual que revelando su verdadero tipo. Además, si la familia resulta ser de tipo 0, es claro que no le conviene desviarse puesto que si bien recibe un pago positivo K_2 por llevarse al niño, incurre en un costo K_1 que por definición es mayor que K_2.

De manera similar, el Cuadro 2 presenta el resumen para el caso en que la familia 1 no aprendió en su experimentación (i.e. $\theta_1 = p$). Ahora los pagos asumen la compensación que se debe otorgar a la familia 1 en caso de que no adopte. Las desviaciones nuevamente no son efectivas, puesto que nunca mejoran la utilidad de la revelación verdadera. Con todo esto, los problemas privados y sus respectivas soluciones quedan representados por

$$\max_{\alpha_2^{NA,p}} V_{NA} = \alpha_2^{NA,p}(p(2 - [2p - K_1(1-p)])) + (1 - \alpha_2^{NA,p})(0) - a\frac{(\alpha_2^{NA,p})^2}{2} \tag{63}$$

$$\Rightarrow \alpha_2^{NA,p} = \frac{(2 + K_1)(1-p)p}{a} \tag{64}$$

$$\max_{\alpha_2^{0,p}} V_0 = \alpha_2^{0,p}(\frac{p}{1+\gamma}(2 + K_2)) + (1 - \alpha_2^{0,p})(\frac{p}{1+\gamma}2 - K_1(1 - \frac{p}{1+\gamma}) + K_2) - a\frac{(\alpha_2^{0,p})^2}{2} \tag{65}$$

$$\Rightarrow \alpha_2^{0,p} = \frac{(K_1 - K_2)(1 + \gamma - p)}{a(1+\gamma)} \tag{66}$$

Se puede notar de la comparación de la ecuación (64) con la ecuación (58), la diferencia que surge en el nivel de adquisición de información óptima entre el problema privado y el social. De hecho, privadamente la familia dos adquiere más información que en su contraparte social. La raíz de este problema se encuentra en que los pagos VCG no logran hacer que la segunda familia internalice el hecho de que en caso de aprender que su tipo es 0, no solo no adoptará al niño sino que también afecta indirectamente la valoración de la familia uno mediante la modificación de su *prior*.

Finalmente y una vez resueltos los casos en $t = 2$, centramos nuestra atención en lo que sucede con la adquisición de información de la primera familia en experimentar. El esquema de valoraciones y pagos propuestos se resume en el Cuadro 3.

Cuadro 3: Resumen de valoraciones, pagos y utilidades netas de la familia 1

	Valoración	Pago	Utilidad
$\theta_1 = 1$	2	V_0^s	$2 - V_0^s$
$\theta_1 = p$	$[\frac{1}{2}(1-\alpha_2) + \alpha_2 p](2p - K_1(1-p))$	$[val] - V_0^s + V_{NA}^s$	$V_{NA}^s - V_0^s$
$\theta_1 = 0$	0	0	0

El término $[val]$ es la valoración de la familia en dicho escenario, y se ha usado para ahorrar notación. Además el supraíndice s usado es para señalar que dicho valor de continuación es el social

De la lectura del Cuadro 3 podemos notar que los pagos propuestos satisfacen la compatibilidad de incentivos para la familia número uno. Para esto, recuerde que $V_{NA}^s > V_0^s$ siempre. Luego, el resto de la estructura es igual al problema privado sin traspasos de información, por lo que podemos caracterizar el problema y su respectiva solución como

$$\max_{\alpha_1^p} U = \alpha_1^p(p(2 - V_0^s) + (1-\alpha_1^p)(V_{NA}^s - V_0^s) - a\frac{(\alpha_1^p)^2}{2} \tag{67}$$

$$\Rightarrow \alpha_1^p = \frac{2p + V_0(1-p) - V_{NA}}{a} \tag{68}$$

Con estos resultados, concluye la demostración de la proposición. □

Este resultado es importante por cuanto demuestra la factibilidad de diseñar mecanismos cuando la estructura informacional es más compleja. Si bien es cierto que el mecanismo ya no es un *primer mejor* (por la diferencia en la adquisición de información de la segunda familia en el contexto social versus el problema privado), no obstante la diferencia dependerá de cuánta importancia le dan las familias a las creencias del resto (lo que capta el parámetro γ).

Este resultado se encuentra en línea con lo demostrado por Bergemann y Välimäki (2002), aunque con ciertas diferencias claves. Quizás lo más interesante está en que el hecho de cambiar la estructura de traspasos de información desde la valoración (como hacen ByV (2002)) hacia los *priors*, permite la existencia de un mecanismo compatible en incentivos, aún cuando no permite la completa internalización de efectos en la segunda familia, que es lo que genera la distorsión en los niveles óptimos de α.

6. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos tratado de abarcar desde todas las aristas posibles un problema de asignación eficiente, con adquisición de información dinámica en su forma más simple, es decir, con dos periodos. De esta manera, se ha buscado entender a cabalidad las implicancias de este modelo y cómo inciden los cambios en los parámetros en resultados importantes como el bienestar social o bien en implicancias clave para la resolución como lo es el ordenamiento óptimo de los agentes (familias en nuestro ejemplo).

Quizás el resultado más importante hasta ahora es que existe un orden que **siempre** maximiza el bienestar social por sobre cualquier otro ordenamiento posible. Esto tiene importantes implicancias en políticas públicas, puesto que el bienestar social podría mejorarse con el solo hecho de corregir el ordenamiento de los agentes previo a la experimentación. Esto, aunque no pretende asegurar que sea fácil de implementar, si puede ser tomado como un aporte para el desarrollo o la discusión frente problemas de esta índole.

Por otro lado, se muestra que la forma en que se diferencian los agentes del problema es relevante a la hora de resolverlo. No da lo mismo caracterizar a los agentes como distintos a través del parámetro de costos de adquisición de información, que a través de los gustos o deseos previos a la experimentación por el objeto a asignar. Luego, es importante identificar si es el uno o el otro a la hora de la resolución del problema.

Durante este proceso de comprensión completa del problema, hemos logrado caracterizar una secuencia de experimentaciones para cualquier *prior* dentro de un conjunto de ellos. Esto nos ha permitido entender los procesos de adquisición de información óptimos y su trayectoria a lo largo de la secuencia. Si bien puede resultar natural pensar en que los niveles de información adquiridos en el tiempo vayan decreciendo conforme decrezcan los *prior*, la constatación y demostración formal de este hecho, pretende ser un primer paso hacia una generalización de procesos de aprendizajes secuenciales, lo que tendría importantes implicancias en políticas de asignación.

En la misma línea, podemos observar que la experimentación es buena en el sentido que permite hacer asignaciones eficientes, pero que existe un momento en que no conviene seguir experimentando. Esto quiere decir que no porque exista la opción de adquirir información va a ser conveniente (socialmente hablando) hacerlo.

Esta última constatación nos lleva pensar en la existencia de un símil a lo que es un precio de reserva en una subasta. En otras palabras, existirán familias con *priors* tales que la agencia no estará dispuesta a agendar una entrevista con un niño y por ende, tampoco estará la posibilidad de adopción para esta familia.

Sumado a todo lo anterior, se ha querido avanzar hacia el desarrollo de un modelo más complejo, que permita comprender las "interacciones informacionales" que poseen las familias, y que juegan un rol clave a la hora de la toma de decisiones de los agentes. Esto siempre con la idea de acercarse cada vez más a un modelo de adquisición de información general.

De esta última problemática se obtienen resultados interesantes y que van en línea con la literatura existente además de una constatación novedosa respecto de anteriores trabajos. Esto último tiene relación con la existencia de un mecanismo que permite la compatibilidad de incentivos sin importar si la estructura informacional es absolutamente privada o tiene alguna componente común.

el principal problema de este resultado, y también resaltado en la literatura respecto al tema, es que se sacrifica la eficiencia *ex-ante* del problema. En otras palabras, cuando existe actualización de *priors* por parte de los agentes según las señales que reciben, en un juego privado se adquiere menos información que la que un planificador central adquiriría en una situación similar.

Finalmente, quedan abiertos temas de discusión tanto o más relevantes como los abordados en este trabajo. En este sentido, avanzar hacia una formulación que incluya traspasos de información más allá de la actualización de *priors* entre las diferentes familias que se entrevistan con el menor. Un ejemplo es pensar en valoraciones comunes por el niño, donde la valoración de la familia no depende solo de su propio tipo, sino que también incorpora la valoración de la otra familia.

Esto último es de vital importancia pensando en ir hacia una generalización de este tipo de problemas, que permita explicar diversas situaciones mediante la "calibración" de parámetros y no teniendo que generar un modelo para cada situación.

Referencias

- Athey, S. and Segal, I. (2013), "An Efficient Dynamic Mechanism", *Econometrica*, 81, 6, pp 2463-2485.
- Arrow, K. (1979), "The Property Rights Doctrine and Demand Revelation Under Incomplete Information", *Economics and Human Welfare*, New York: Academic Press.
- Bergemann, D., and J. Välimäki, (2000), "Information Acquisition and Efficient Mechanism Design", *Cowles Foundation Discussion Paper*, 1248.
- ______________(2002), "Information Acquisition and Efficient Mechanism Design", *Econometrica*, 70, 3, pp. 1007-1033.
- ______________(2002), "Information in Mechanism Design", *Cowles Foindation Paper*, 1208.
- ______________(2010), "The Dynamic Pivot Mechanism", *Econometrica*, 78, 2, pp. 771-789.
- Blackstone, E., Buck, A., and Hakim, S. (2004), "Privatizing Adoption and Foster Care: Applying Auction and Market Solutions" *Children and Youth Services Review*, 26, pp. 1033-1049.
- Clarke, E. (1971), "Multipart Pricing of Public Goods", *Public Choice*, 2, pp. 19-33.
- Compte, O., and Jehiel, P. (2007), "Auctions and Information Acquisition: Sealid Bid or Dynamic Formats", *RAND Journal of Economics*, 38, 2, pp. 355-372.
- Cremer, J. and McLean, R. (1988), "Full Extraction of the Surplus in Bayesian and Dominant Strategy Auctions", *Econometrica*, 56, 6, pp. 1247-1257.
- D'Aspremont, C. and L. Gerard-Varet (1979), "Incentives and Incomplete Information", *Journal of Public Economics*, 11, pp. 25-45.
- Groves, T. (1973), "Incentive in Teams", *Econometrica*, 41, pp. 617-631.
- Hellwig, C. and Veldkamp, L. (2009), "Knowing What Others Know: Coordination Motives in Information Acquisition", *The Review of Economic Studies*, 76, 1, pp. 223-251.

- Landes, E., and Posner, R. (1978), "Economics of Baby Shortage", *Journal Legal Studies*, 7, pp. 323-348
- Lu, J., and Ye, L. (2013), "Efficient and Optimal Mechanisms with Private Information Acquisition Costs", *Journal of Economic Theory*, 148, pp. 393-408.
- Martimort, D. and Sand-Zatman, W. (2015), "A Mechanism Design Approach to Climate Agreements", *Journal of the European Economic Association*, forthcoming.
- Montero, J. (2008), "A Simple Auction Mechanism for the Optimal Allocation of the Commons", *American Economic Review*, 98, 1, pp. 496-518.
- Morris, S. and Shin, H. (2002), "The Social Value of Public Information", *American Economic Review*, 92, pp. 1521-1534.
- Myerson, R. (1981), "Optimal Auction Design", *Mathematics of Operations Research*, 6, 1, pp. 58-73.
- Myerson, R. and Satterthwaite, M. (1983), "Efficient Mechanism for Bilateral Trading", *Journal of Economic Theory*, 29, pp. 265-281.
- Persico, N. (2000), "Information Acquisition in Auctions", *Econometrica*, 68, 1, pp. 135-148.
- Vickrey, W. (1961), "Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, 16, pp. 8-37.
- Weitzman, M. (2002), "Landing Fees vs. Harvest Quotas with Uncertain Fish Stocks", *Journal of Environmental Economics and Management*, 43, pp. 325-338.