INSTITUTO DE ECONOMÍA

TESIS de MAGÍSTER

2017

Tarificación Óptima en Transporte Público en Presencia de Evasión

Nathaly Andrade

www.economia.puc.cl

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

TESIS DE GRADO
MAGISTER EN ECONOMIA

Andrade, López, Nathaly Stephania

Julio, 2017

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

TARIFICACIÓN ÓPTIMA EN TRANSPORTE PÚBLICO EN PRESENCIA DE EVASIÓN

Nathaly Stephania Andrade López

Comisión

Martín Besfamille
Francisco Silva
Hugo Silva

Santiago, Julio de 2017

Tarificación Óptima en Transporte Público en Presencia de Evasión

Nathaly Stephania Andrade López*

10 de julio de 2017

Resumen

Este trabajo estudia la maximización del bienestar social, bajo diferentes esquemas de tarificación, sujeto a garantizar el autofinanciamiento de una firma que opera como un monopolio natural. En particular, se analiza un monopolio proveedor de transporte público que enfrenta evasión. La primera parte desarrolla un modelo teórico de tarificación. Se estudia tanto tarifas uniformes como tarifas en dos partes con y sin evasión. La segunda parte presenta un ejercicio de simulación numérico para el Servicio de Transporte Urbano de Chile (Transantiago). Se obtienen las reglas de tarificación óptimas para los escenarios considerados en el análisis teórico y se realizan ejercicios de estática comparativa. En cualquier caso, la dualidad en los ingresos de la firma (aumentar las tarifas permite recaudar más por unidad vendida, pero reduce el número de consumidores) hace que a nivel analítico la respuesta de la tarifa óptima sea ambigua, salvo en casos especiales. Dicha ambiguedad es resuelta a partir del análisis numérico. Los resultados del ejercicio numérico sugieren, asumiendo los supuestos del modelo como ciertos, que el precio que maximiza el bienestar social es menor al del escenario de referencia. Los resultados se sostienen incluso bajo la posibilidad de tarificar en dos partes. Bajo ambos esquemas de tarificación, el bienestar social excede al del escenario de referencia. Se encuentra, además, que en un mundo con evasión las tarifas impuestas exceden a las impuestas en un mundo sin evasión. Finalmente, se analiza la sensibilidad de las tarifas óptimas a cambios en los parámetros del problema, y se concluye con futuras líneas de investigación.

*Estudiante de Magíster en Economía, Instituto de Economía, Pontificia Universidad Católica de Chile, Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile; Email:`nsandrade@uc.cl`.

1. Introducción

Las empresas de transporte público juegan un rol esencial en el funcionamiento de cualquier sociedad moderna. Sin éstas, la movilización de trabajadores, consumidores, entre otros, resultaría complicada. Puesto que dichas empresas típicamente operan como monopolios naturales, debido a los altos costos de entrada que suponen estos mercados, el órgano regulador encuentra un especial interés en el control de los precios y la calidad fijados en estos mercados.

Si bien el regulador responde en primer lugar a consideraciones de eficiencia, una preocupación no menor es garantizar un nivel de beneficios mínimos que aseguren la participación voluntaria de la firma. Esto es en particular importante cuando la firma enfrenta un grupo de consumidores que demandan el bien sin pagar la tarifa asociada a dicho consumo. Naturalmente, la evasión genera una disminución en los ingresos y un aumento en los costos de producción de la firma. Lo anterior es crucial para las empresas proveedoras de transporte público para las cuales, los recursos que obtienen por la venta de pasajes constituyen una fuente significativa de ingresos. Por ejemplo, los ingresos para las proveedoras de transporte en Santiago de Chile, en 2015, alcanzaron un monto de $587.542 millones de pesos, de los cuales el 99,6 % provino de pago de pasajes de los usuarios (DPTM, 2017). Estimaciones sugieren que la evasión supone pérdidas para las operadoras de alrededor de $415 millones de dólares al año (Alto Evasión, 2013)[1].

Este comportamiento está presente, en mayor o menor intensidad en toda la sociedad. Algunas de las causas que influyen en la decisión de evasión son: el nivel de ingreso de los usuarios del transporte público, las altas tarifas, el nivel de satisfacción con el servicio, entre otras. Para ilustrar, en promedio los niveles de evasión en Chile, la cual se ha estimado en 31,4 % para el primer trimestre de 2017 (Programa Nacional de Fiscalización, 2017)[2], son más altos en las comunas de quintiles más bajos (Calvo, 2015), lo que sugiere que los individuos de menores ingresos son más sensibles al costo de los pasajes, situación que constituye un incentivo adicional para evadir.

Dado lo anterior, en un mundo en el cual el regulador debe garantizar la participación de la firma, éste no puede ignorar la evasión al momento de elegir las tarifas óptimas, más aún, si a través de éstas tiene la posibilidad de influir en la decisión de pago de los consumidores. Al respecto, gran parte de la literatura de tarificación óptima en transporte público excluye la evasión de la modelación, típicamente, bajo el supuesto de un alto costo de evasión, que desincentiva la misma, pero existen mercados relevantes, como es el caso del transporte público, energía eléctrica, entre otros, donde este problema está presente. Esta situación motiva la necesidad de pensar acerca de una forma de tarificación que tome en cuenta la evasión.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la maximización de bienestar social bajo diferentes esquemas de precios que permitan autofinanciar el servicio de transporte público cuando un grupo de consumidores decide evadir el pago. El regulador, consciente de que el nivel de evasión es endógeno y responde a los cambios en la tarifa impuesta, elige la tarifa óptima.

[1] http://www.altoevasion.cl/resultados/

[2] http://www.fiscalizacion.cl/indice-de-evasion-de-pago-de-tarifa-en-transantiago/

Específicamente, se desarrolla un modelo basado en un enfoque de tarificación uniforme y en dos partes, donde el regulador elige las tarifas socialmente óptimas que maximizan el bienestar. Este trabajo pretende contribuir en dos aspectos a la literatura. Primero, se extiende el análisis teórico de tarificación óptima a un contexto de evasión del pago por el uso del servicio de transporte público. La modelación toma en cuenta de manera explícita los ingresos de los consumidores. Segundo, el ejercicio de simulación numérico provee información sobre la sensibilidad de las tarifas óptimas a cambios en los parámetros del problema.

La sección analítica caracteriza los resultados principales del modelo teórico. En primer lugar, bajo el supuesto de autofinanciamiento de la firma, el regulador siempre satisface la restricción de beneficios con igualdad. La intuición de lo anterior es clara. Puesto que el regulador solo se preocupa por el bienestar de los consumidores, el cual decrece en la magnitud de las tarifas, el mismo encuentra no eficiente colocar el beneficio de la firma por encima de su opción externa. En el caso en que el regulador tarifica con una tarifa uniforme con precio, el bienestar social se maximiza al tarificar a costo medio. Debe notarse que dicho costo medio es complejo puesto que debe tomar en cuenta la posibilidad de que la opción externa de la firma sea mayor a cero. Más aún, ante la presencia de evasión, el costo a considerar debe tomar en cuenta el costo asociado a proveer el servicio de transporte público a los informales. Bajo un esquema de tarificación con licencia, el regulador, distribuye las necesidades de financiamiento entre los consumidores formales.

En segundo lugar, se consideran ejercicios de estática comparativa a nivel analítico. En cualquier caso el resultado de dicho ejercicio es ambiguo. Aumentar las tarifas tiene dos efectos. Por un lado, la firma aumenta sus ingresos dada el alza en las tarifas. Por otro lado, el número de consumidores formales se reduce dado que algunos deciden salir del mercado o ser informales; lo anterior naturalmente afectan el beneficio de la firma. Dicha ambiguedad se resuelve a partir de un ejercicio de estática comparativa a nivel numérico. Aquellos casos particulares en que el ejercicio de estática comparativa es claro a nivel analítico, se discuten en la sección teórica.

Los resultados del ejercicio numérico sugieren, asumiendo los supuestos del modelo como ciertos, que en general las tarifas que maximiza el bienestar social, con y sin presencia de evasión, son menores al del escenario de referencia. Bajo ambos esquemas de tarificación, el bienestar social excede al del escenario de referencia. Lo anterior sugiere la posibilidad de que el regulador en la práctica responda a otros criterios además del de eficiencia o esté sujeto a restricciones adicionales a las consideradas en este trabajo. Las tarifas óptimas se muestran sensibles a cambios en los costos de la firma proveedora de transporte, y se mueven en la misma dirección que estos últimos, y en dirección contraria al costo de evasión. Finalmente, tanto en los modelos de tarificación uniforme como en el de tarifa en dos partes, con y sin presencia de evasión, el bienestar máximo se obtiene al tarificar solo con precio y no con licencia. Esto se explica por la disminución en el ingreso de los consumidores que supone el pago de una licencia, de manera que los consumidores tienen menos recursos que destinan al consumo de otros bienes y esto causa una disminución en su utilidad. Por lo tanto, tarificar con precio resulta ser más eficiente en términos de bienestar.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se revisa la literatura relacionada a evasión y tarificación óptima en transporte público. En la Sección 3 se plantea el modelo analítico, obteniendo expresiones para las tarifas óptimas a partir de la maximización del bienestar social sujeto a una restricción de financiamiento de la firma. En la Sección 4 se desarrolla una simulación con parámetros reales con el objetivo de encontrar valores numéricos óptimos de las tarifas, seguido de un análisis de estática comparativa a través de variaciones en los parámetros del problema. Finalmente, la Sección 5 contiene las conclusiones y líneas futuras de investigación.

2. Literatura

2.1. Evasión

Actualmente, en vista de la inexistencia de controles efectivos que garanticen el pago de las tarifas por parte de los usuarios del transporte público, la evasión se ha convertido en un problema relevante para las firmas proveedoras del servicio y para las autoridades reguladoras. De acuerdo a Barabino et al (2015), el problema de la evasión causa pérdidas económicas importantes, inequidad social y aumento de niveles de violencia que afectan la seguridad de los usuarios en general. Además, la evasión del pago por el servicio de transporte público afecta directamente al financiamiento y a los costos de las firmas proveedoras, lo que a su vez influye en la tarificación impuesta a los usuarios del sistema. Esta situación hace necesaria la intervención por parte de las autoridades reguladoras con el fin de que tomen medidas que influyan en la decisión de evasión por parte de los usuarios del transporte.

A pesar de este creciente problema, la literatura relacionada a tarificación en presencia de evasión es limitada. Al respecto, varios estudios se han enfocado solamente en determinar las razones que motivan a los consumidores a evadir el pago de las tarifas, analizando características específicas de los servicios de transporte y de los usuarios. Tal es el caso de Reddy et al. (2011) y Bucciol et al. (2013) que analizan el comportamiento de la sociedad y de cada usuario, y su influencia en la evasión del pago del transporte. Estos trabajos llegan a la conclusión de que factores como calidad del servicio, forma de pago del pasaje, estrato de ingreso de los usuarios, conducta de otros usuarios, entre otros, son causantes de la decisión de evadir el pago.

Asimismo, Guarda et al. (2016) a través de un análisis econométrico determina los factores relacionados a la operación del servicio de transporte urbano en Santiago,Chile, que influyen en la evasión del pasaje. Al respecto, identifica situaciones que hacen que la evasión aumente, tales como: incremento de los tiempos de espera en la parada, existencia de muchos usuarios en un bus, varios usuarios que ingresan por la misma puerta y alta ocupación de una misma unidad. Por otra parte, Barabino et al. (2013) estudia el ámbito de control de la evasión, en su trabajo propone eficientes sistemas de fiscalización que consideren la cantidad de evasión, número de pasajeros fiscalizados y ganancias de las empresas proveedoras del servicio de transporte público; todo esto sumado a un monto razonable de multa y buen sistema de recolección de la misma, que garanticen la efectividad del sistema de fiscalización.

Finalmente, existen trabajos teóricos desarrollados por Polinsky y Shavell (1979), Boyd et al. (1989) y Kooreman (1993), en los cuales se consideran que los consumidores que deciden evadir el pago actúan de manera racional, y prestan mayor importancia a la probabilidad de ser descubiertos y a las tarifas impuestas.

En el contexto de este trabajo, el control y las causas que determinan la evasión se alejan del ámbito de análisis. A diferencia de la literatura antes presentada, este estudio pretende ser un complemento a la literatura de tarificación óptima considerando la presencia de individuos que deciden evadir el pago del pasaje del transporte público. Específicamente, se considera que las tarifas impuestas a los usuarios del transporte influyen en la decisión de pago o no de las mismas, a través del efecto que tienen sobre el ingreso.

2.2. Tarificación en transporte público

Cuando se habla de tarificación óptima se refiere a las distintas estrategias de precios que permiten alcanzar determinados objetivos dependiendo del contexto que se analice. Por ejemplo, las tarifas óptimas en transporte público que maximizan el bienestar social pueden ser iguales o pueden diferir de las que maximizan los beneficios de la firma. De manera que al hablar de esquemas óptimos de precios se debe definir previamente el problema que se desea resolver. En general, el regulador busca maximizar el bienestar social cuando se toman decisiones de transporte, donde la maximización del bienestar incluye, entre otras cosas, lograr eficiencia económica y rentabilidad de la firma. En el contexto de este trabajo se tendrá a un regulador utilitarista clásico que se preocupa por el bienestar de todos los individuos de la sociedad. Una razón, por la que al regulador clásico le interesa el bienestar de los consumidores informales es que le importa el bienestar global de la sociedad, o bien tiene motivaciones políticas que hace que garantizar el bienestar a todos, incluso a los evasores, le permita ganar mayor cantidad de votos.

En general, el análisis de esquemas de precios en transporte público distingue entre las políticas de primer y segundo mejor (Tirachini y Hensher, 2012). Al respecto, en un mundo de primer mejor, la economía del bienestar señala que la maximización del bienestar se obtendrá al igualar los precios al costo marginal, sin embargo, en este contexto en el cual las firmas proveedoras de transporte contituyen un monopolio natural, nace un conflicto entre eficiencia y rentabilidad, pues al querer encontrar una política de precios óptima que promueva el uso eficiente del transporte público puede dar lugar a pérdidas financieras. Una opción es cubrir dichas pérdidas con impuestos de suma alzada, pero su implementación no es fácil. Además las condiciones necesarias para alcanzar el mundo del primer mejor rara vez se encuentran en el mundo real.

Por su parte, en el mundo de segundo mejor se encuentran los esquemas de precios que difieren de la tarificación que iguala el precio al costo marginal y que aseguran el adecuado financiamiento de la firma. Esquemas de tarifas lineales simples, como la tarificación a costo medio, o bien esquemas más complejos como la tarificación no lineal (tarifas en dos partes, tarificación a la Ramsey, "Peak Load pricing") se encuentran en este mundo. En este trabajo, se considera que el regulador no tiene restricción sobre el tipo de tarificación que impone, y se estudia, además del esquema con precio uniforme, la posibilidad de aplicar un esquema de tarifas en dos partes.

2.2.1. Tarificación uniforme

En relación a la literatura sobre tarificación uniforme en transporte público que no considera evasión se tiene a Mohring (1972), Turvey y Mohring (1975) y Jansson (1979), donde se identifica que la inclusión del tiempo de viaje dentro de la función de costo social influye en la aplicación de la tarificación a costo marginal. Los autores señalan que cuando el incremento en la demanda de transporte induce a un incremento de la frecuencia del servicio, los costos de viaje de todos los usuarios disminuyen debido a la disminución de los tiempos de espera (efecto Mohring); sin embargo cuando solo se toma en cuenta los costos del operador en la función de costos del transporte público no se observa dicho fenómeno. De manera que el costo marginal cae por debajo del costo medio, lo que, en ausencia de evasión, constituye un argumento fuerte para subsidiar el servicio de transporte público. Estos estudios obtienen el precio y frecuencia óptima dada una demanda que no depende del precio y de la frecuencia. Dichos trabajos fueron generalizados por Jansson (1993).

De igual manera, Parry y Small (2009) provee un enfoque general para evaluar los efectos de las tarifas subsidiadas de transporte sobre el bienestar social, y analiza posibles reformas de precios tomando en cuenta la existencia de economías de escala, el efecto de las tarifas sobre el uso del automóvil, congestión, contaminación y ajustes en la oferta del servicio. En ausencia de evasión, los autores encuentran que aumentos en el bienestar social se deben al ajuste incremental de los subsidios iniciales. Los subsidios óptimos tanto para horas punta como valle se obtienen para Whasington D.C, Los Angeles y Londres.

Finalmente, Basso y Silva (2014) realiza una evaluación de la eficiencia y conveniencia de los subsidios de transporte, sin considerar evasión. Para esto, utiliza un modelo de elección de modo de transporte que toma en cuenta la sustitución entre transporte público y privado, elasticidades de la demanda por transporte intertemporal y total, y usuarios heterogéneos. Los autores extienden el análisis de Parry y Small (2009) en relación al análisis del beneficio marginal de un incremento en los subsidios, pero tomando en cuenta que éstos pueden operar en conjunto con otras políticas. Mediante una simulación del modelo con datos de Londres, Reino Unido y Santiago de Chile, se encuentra que, en ausencia de evasión, la sustituibilidad entre políticas es grande, en Santiago conviene subsidiar siempre y cuando no haya tarificación por congestión. Además encuentran que las vías de autobús son una forma atractiva de aumentar las frecuencias, disminuir las tarifas y aumentar el bienestar social sin tener que inyectar fondos públicos.

A diferencia de la literatura anterior, este estudio introduce evasión al escenario de tarificación óptima en transporte público, la cual resulta endógena y responde a cambios en las tarifas impuestas. Los trabajos anteriores de tarificación en transporte público analizan los beneficios, en ausencia de evasión, de aumentar los subsidios al transporte, sobre el bienestar social, tal es el caso de los trabajos de Mohring (1972), Turvey y Mohring (1975), Jansson (1979), y Parry y Small (2009). A diferencia de estos estudios, al considerar la evasión en la modelación se estudia el efectos de las tarifas óptimas sobre el bienestar social y que garantizan el autofinanciamiento de la firma, sin tener que recurrir a subsidios. Por otra parte, el trabajo de Basso y Silva (2014) encuentra que en ausencia de evasión, conviene subsidiar siempre y cuando no haya tarificación por congestión, tal es el caso de Santiago. En este sentido, este estudio se aleja de éste último, pues en presencia de evasión se subtarificaría al modo auto.

2.2.2. Tarificación en dos partes

La situación en la que el pago por un bien consta de una cantidad fija y una variable se denomina tarifa en dos partes. La tarificación en dos partes (P, T) consiste en el pago de una licencia de valor T por entrar al mercado, que otorga el derecho de pagar P por unidad consumida. En la práctica, este tipo de tarificación es usado comúnmente, tal es el caso de la telefonía, electricidad, parque de diversiones, taxi, entre otros (Tirole, 1988).

Oi (1971) fue uno de los primeros en estudiar cómo maximizar ganancias con este tipo de tarificación, mediante la extracción del excedente de los consumidores a través de T. Este estudio analiza la tarificación en dos partes usando como ejemplo el parque de diversiones de Disney, donde se cobra T por entrar y P por cada juego. Además, considera el caso en el que los consumidores obtienen excedentes negativos, donde deciden dejar de consumir y salir del mercado dado que se encuentran en una mejor situación. Oi (1971), además, toma en cuenta las diferencias entre consumidores por medio de sus funciones de demanda, que dependen del precio del bien y de su ingreso, el autor supone elasticidad ingreso igual a cero, de manera que las demandas no varían cuando cambia el ingreso.

Igualmente, Feldstein (1972) estudia la tarificación en dos partes en el servicio público, donde incorpora al análisis de eficiencia la dimensión de equidad. Asume una forma funcional específica para el bienestar social y deriva las expresiones de las tarifas en dos partes socialmente óptimas. El autor no considera el efecto de un cambio en P (disminución en T) que hace que el ingreso disponible del consumidor cambie, pues considera que dicho efecto es pequeño en la práctica. Además considera un número fijo de consumidores, y supone que su entrada al mercado constituye una fuente para cubrir costos de la firma.

Carbajo (1988) relaciona la tarificación óptima en dos partes con el transporte público. En el modelo que desarrolla existen dos formas de pago, (i) P por viaje o (ii) T por viajes ilimitados en un periodo de tiempo. El autor ofrece dos menús de tarifas en dos partes que los representa de la siguiente forma: $(P, 0)$ y $(0, T)$. Si el consumidor elige el primer menú, no paga la entrada al mercado T, solo paga por cada viaje realizado. Si escoge el segundo menú, el consumidor paga por entrar al mercado y los viajes unitarios que realice no tiene precio P. El autor, además, considera importante la distinción entre consumidores pues explica que si se suponen individuos homogéneos, el problema se vuelve trivial, ya que se escogería un solo menú. Al respecto, las diferencias de los consumidores se capturan a través de un parámetro de gusto vinculado al grado de utilización del transporte público. De esta manera, el autor maximiza el bienestar social.

Finalmente, Ng y Weisser (1974) analizan la tarificación en dos partes óptima considerando consumidores heterogéneos en el ingreso que deciden si entrar o no al mercado, y toman en cuenta que el número de consumidores es variable; además considera el beneficio social como la suma de las utilidades indirectas. Los autores encuentran las tarifas óptimas de P y T al maximizar la función de bienestar social sujeto a una restricción de financiemínto de la firma, dichas tarifas están basadas en las elasticidades precio de la demanda.

La principal diferencia de este trabajo con los anteriores es la introducción de evasión al escenario de tarificación. Además, a diferencia del trabajo de Oi (1971), no se maximiza beneficios de la firma, sino que se tiene un regulador que maximiza bienestar social cuando un grupo de consumidores decide no pagar por el consumo de un servicio público. A diferencia de Feldstein (1972) y Carbajo (1988), no se considera fijo el número de consumidores a cambios en las tarifas en dos partes, sino variable. El modelo de tarificación en dos partes propuesto en este estudio, es esencialmente una extensión del trabajo de Ng y Weisser (1974) al mercado de transporte público. La principal diferencia con estos autores es que se incorpora la posibilidad de que los consumidores dentro del mercado consuman sin pagar por el uso de un servicio público, en dicho estudio, la decisión de los consumidores se basa en salir o permanecer en el mercado. Al igual que estos autores, en este estudio no se contrarresta la distribución desigual de la riqueza a través de medidas correctivas. Finalmente, Oi (1971), Feldstein (1972) y Carbajo (1988) consideran el excedente del consumidor al utilizar funciones de utilidad cuasi-lineales. Esto, en un contexto de evasión, resulta poco útil, pues se elimina el efecto ingreso y minimiza el problema a un escenario donde todos los consumidores optan solo por una opción (todos evaden o todos pagan). A diferencia de estos trabajos, se considera funciones de utilidad no cuasi-lineales y se obtiene de manera explícita la demanda de los consumidores que decidan pagar o no por el servicio de transporte público.

3. Modelo

Esta sección desarrolla el modelo teórico sobre el cual se basan los resultados numéricos. Se presenta la decisión de los consumidores respecto a ser formales, informales o abandonar el uso de transporte público. El comportamiento de los consumidores depende de las tarifas impuestas por el regulador y de su ingreso, de manera que el número de consumidores dentro de cada segmento resulta variable y endógeno. A partir de esto, se encuentran las expresiones para los valores óptimos de las tarifas que maximizan el bienestar social sujeto a una restricción de beneficios. Se define (en caso de existir) el consumidor indiferente entre un esquema de consumo u otro, como aquel cuyo ingreso satisface la igualdad de las utilidades indirectas en cada caso. Las decisiones de los consumidores a cada lado de dicho ingreso de corte son caracterizadas. Los primeros cuatro escenarios presentan la modelación para el caso de tarifas uniformes. Se estudia lo que ocurre en presencia de evasión, y cómo las tarifas óptimas influyen en la decisión de los consumidores. Tomando esto como punto de partida, se extiende el modelo a un mundo de tarifas en dos partes. Finalmente, en cada escenario se presentan las expresiones análiticas que describen la respuesta de las tarifas frente a cambios exógenos en los parámetros del modelo. Las demostraciones omitidas se presentan en el Apéndice Matemático.

3.1. Modelo Analítico

Se considera una economía con tres bienes: el bien x, que corresponde a cantidad de viajes al mes en transporte público, el bien G, que corresponde al consumo de otros bienes al mes, y el bien L, que corresponde al consumo mensual de ocio de los consumidores. Se asume que x es producido por un monopolista que enfrenta evasión, mientras que G y L son provistos de manera competitiva.

Consumidores

Se considera un mercado de N consumidores que operan bajo dos escenarios. En el primer escenario, no existe evasión del pago de tarifas asociado al consumo del bien x, de manera que los consumidores escogen entre consumir formalmente o salir del mercado. Un segundo escenario considera un mundo en que los consumidores, de encontrarlo óptimo, pueden evadir el pago de x. En dicho escenario, puesto que el consumo formal e informal domina a salir del mercado, la decisión relevante para los consumidores es entre consumir formalmente o evadir el pago. Se considera, además del pago de un precio P por unidad demandada, el caso en que el consumo formal del bien x supone el pago de una licencia T por el derecho a entrar al mercado, y el caso en que el consumidor formal debe pagar un precio y una licencia por el consumo del bien x. El precio por consumo por unidad del bien G se normaliza a uno. Se asume que los consumidores informales incurren en un costo $h > 0$ constante e independiente de la cantidad que se consume de x. Este costo refleja la dificultad de obtener el producto sin pagar o bien el costo moral de evadir el pago. Se consideran consumidores heterogéneos únicamente en el ingreso Y. La distribución de la población está caracterizada por una función de densidad denotada como $f(Y)$, de soporte $[\underline{Y}, \overline{Y}]$.

Específicamente, el consumidor que decide ser formal deriva utilidad del consumo de los bienes G, x y L, y resuelve el siguiente problema de maximización de utilidad sujeto a restricciones de presupuesto y de tiempo:

$$\begin{aligned} \max_{(G,x,L)\,\in\,\mathbb{R}^3_+} \quad & \phi(G)+\psi(x)+\xi(L) \\ \text{s.a.} \quad & G+xP=Y-T \\ & L+xt=\tau \end{aligned} \tag{1}$$

Donde t es el tiempo por unidad de viaje en transporte público y τ es el tiempo disponible de cada individuo el cual destina a ocio y a viajar en transporte. Se asume que $\phi,\ \psi$ y ξ son funciones caracterizadas de acuerdo al supuesto 1.

Supuesto 1 *(Función de utilidad): $\phi(\cdot),\ \psi(\cdot),\ \xi(\cdot)$ satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *ϕ, ψ y ξ son estrictamente crecientes y cóncavas en su dominio.*

(ii) *$\psi^{'}(0)=\infty$ y $\lim_{x\longrightarrow\infty}\psi^{'}(x)=0$.*

La parte ***(i)*** del Supuesto 1 es estándar y asegura que el consumidor deriva utilidad de aumentar su consumo en cualquiera de los bienes considerados. Más aún, asumir concavidad, responde al principio estándar de utilidad marginal decreciente. Notar además que puesto que ϕ, ψ, y ϕ son funciones estrictamente crecientes, ambas restricciones (presupuestaria y de tiempo) del problema (1) estarán activas. Lo anterior asegura que el consumo óptimo de viajes en transporte público queda caracterizado por la siguiente condición.

$$-\phi^{'}(Y-T-Px)P+\psi^{'}(x)-\xi^{'}(\tau-xt)t=0$$

Debe notarse además que la parte ***(ii)*** del supuesto 1, asegura que esta condición sólo se satisface para $x>0$. Se denota la demanda óptima por transporte público para el consumidor formal, como $x^*(P,T,Y)$, que es una función del precio P, de la licencia T y del ingreso Y del individuo. El siguiente Lema caracteriza las derivadas parciales de la función de demanda por transporte público. Puesto que su demostración resulta directa de la condición de optimalidad, la misma se omite.

Lema 3.1 *(Función $x^*(P,T,Y)$): La función de demanda por transporte público de los consumidores formales satisface las siguentes condiciones:*

(i) *$\forall(P,T,Y)\in\mathbb{R}^3_+$ se tiene $\frac{\partial x^*(\cdot)}{\partial Y}>0$.*

(ii) *$\forall(P,T,Y)\in\mathbb{R}^3_+$ se tiene $\frac{\partial x^*(\cdot)}{\partial \tau}>0$.*

(iii) *$\forall(P,T,Y)\in\mathbb{R}^3_+$ se tiene $\frac{\partial x^*(\cdot)}{\partial P}<0$ y $\frac{\partial x^*(\cdot)}{\partial T}<0$.*

La función de utilidad indirecta del consumidor formal está dada por la función máximo del problema (1), la cual se denota como en la identidad (2). Esta función indica el máximo nivel de utilidad que puede obtener un individuo de ingreso Y, para valores fijos del precio P y la licencia T.

$$V_F(P,T,Y) \coloneqq \phi(Y - T - x^*(P,T,Y)P) + \psi(x^*(P,T,Y)) + \xi(\tau - x^*(P,T,Y)t) \qquad (2)$$

Por otro lado, los consumidores informales no pagan la tarifa (P,T) asociada al consumo de x. Esto implica que éstos destinan todo su ingreso al consumo de G y enfrentan como una única restricción la dimensión temporal. Además, al consumir x sin pagar, su utilidad disminuye. Esta pérdida de utilidad se representa por $h > 0$, que por simplicidad se asume constante e independiente de x. El problema del consumidor informal está dado por (3).

$$\begin{aligned} \max_{(G,x,L)\in\mathbb{R}^3_+} \quad & \phi(G) + \psi(x) + \xi(L) - h \\ \text{s.a.} \quad & G = Y \\ & L + xt = \tau \end{aligned} \qquad (3)$$

De la resolución del problema (3), se obtiene la cantidad óptima de consumo de viajes en transporte público para los informales denotada por $\tilde{x}$. Es directo verificar que la misma resulta inelástica frente a cambios en el valor de las tarifas y el ingreso. Además, es importante notar que dicha demanda es acotada debido a la restricción temporal del problema. La utilidad indirecta que alcanza el consumidor informal está dada por la función máximo del problema (3) y se define en (4). El lema 3.2 caracteriza la demanda de los informales.

$$V_I(Y) \coloneqq \phi(Y) + \psi(\tilde{x}) + \xi(\tau - \tilde{x}t) - h \qquad (4)$$

Lema 3.2 *(Demanda de los informales): Considere un individuo de ingreso $Y \in [\underline{Y}, \overline{Y}]$ arbitrario. Para todo $(P,T) \in \mathbb{R}^2_+$, se tiene que $\tilde{x} \geq x^*(P,T,Y)$.*

Intuitivamente, cuando $(P,T) = (0,0)$, se tiene que para cualquier ingreso $Y \in [\underline{Y}, \overline{Y}]$ se satisface que $x^*(0,0,Y) = \tilde{x}$. De no ser así, el consumidor informal podría imitar al consumidor formal aumentando su utilidad, lo que contradice el supuesto de que los agentes son maximizadores de utilidad. Lo anterior, unido al Lema 3.1 que garantiza que para cualquier $Y \in [\underline{Y}, \overline{Y}]$, la demanda por transporte público de los formales decrece en P y T, implica que para cualquier $(P,T) \in \mathbb{R}^2_+$ se tiene que $x^*(P,T,Y) \leq \tilde{x}$.

Dado el Lema 3.2, un consumidor opta por el consumo formal si su utilidad indirecta como formal es mayor a su utilidad indirecta como informal. Lo anterior es equivalente a decir que $\Delta V(P,T,Y) \coloneqq V_F(P,T,Y) - V_I(Y) > 0$.

Lema 3.3 $\forall (P,T) \in \mathbb{R}^2_{++}$, $\Delta V(P,T,Y)$ *es estrictamente creciente en Y.*

Vale la pena explicar intuitivamente el resultado del Lema 3.3. Para un vector $(P,T) \in \mathbb{R}^2_{++}$ fijo, aumentar el nivel de ingreso tiene dos efectos. Por un lado $\Delta V(P,T,Y)$ aumenta puesto que $V_F(P,T,Y)$ es creciente en Y. Por otro lado $\Delta V(P,T,Y)$ disminuye puesto que $V_I(Y)$ también es creciente. La concavidad de la función de utilidad asegura que el primer efecto domina al segundo con lo que $\Delta V(P,T,Y)$ es estrictamente creciente en Y. La decisión entre el consumo formal e informal para consumidores con ingresos a un lado u otro de $\hat{Y}_I(P,T)$ es homogénea.

Para P y T dados, el ingreso del consumidor indiferente ($\hat{Y}(P,T)$) entre ser formal o informal, de existir, satisface la condición $\Delta V(P,T,Y) = 0$. De no existir un individuo indiferente se define $\hat{Y}(P,T)$ como $\underline{Y}$, si todos los consumidores prefieren el consumo formal frente al informal, y como $\overline{Y}$ en el caso opuesto. El Lema 3.4 caracteriza la diferencia de las funciones de utilidad indirectas en términos de sus respuesta frente a Y.

Lema 3.4 *(Ingreso de corte, formal vs informal): Considere* $(P,T) \in \mathbb{R}^2_+$ *como dado. El ingreso de corte,* $\hat{Y}(P,T)$*, satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\left(\forall Y \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]\right) \left[Y \geq \hat{Y}(P,T,Y) \Longrightarrow V_F(P,T,Y) > V_I(Y)\right]$

(ii) $\left(\forall Y \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]\right) \left[Y < \hat{Y}(P,T,Y) \Longrightarrow V_F(P,T,Y) < V_I(Y)\right]$

Intuitivamente, los individuos de ingresos mayores al ingreso de corte, $\hat{Y}(P,T)$, de existir, obtienen una la utilidad mayor siendo formales que siendo informales. De nuevo, esto se debe a que aumentos marginales en el ingreso, reportan mayor utilidad a los consumidores con ingresos mayores a $\hat{Y}(P,T)$ debido a la concavidad de la función de utilidad. Lo contrario sucede con los individuos de ingresos menores al ingreso de corte.

De forma análoga al caso de los informales, los consumidores que optan por salir del mercado destinan todo su ingreso al consumo de G y enfrentan como una única restricción la dimensión temporal. La utilidad indirecta que alcanza el consumidor que sale del mercado se denota por $V_s(Y)$. De manera formal, la misma está dada por la identidad (5).

$$V_s(Y) \coloneqq \phi(Y) + \psi(0) + \xi(\tau) \tag{5}$$

Cuando la decisión relevante para un consumidor es entre ser formal o salir del mercado, el mismo opta por ser formal ssi la utilidad indirecta como formal es mayor a su utilidad indirecta de salir del mercado. Lo anterior es equivalente a decir que $\Delta V_s(P,T,Y) \coloneqq V_F(P,T,Y) - V_s(Y) > 0$.

Lema 3.5 $\forall (P,T) \in \mathbb{R}^2_{++}$ *se tiene que* $\Delta V_s(P,T,Y)$ *es estrictamente creciente en* Y*.*

La intuición del Lema 3.5 es similar al Lema 3.3. Por su parte, para P y T dados, el ingreso del consumidor indiferente, que se denota por $\hat{Y}_s(P,T)$, entre ser formal o salir, de existir, satisface la condición $\Delta V_s(P,T,Y) = 0$. De no existir un individuo indiferente se define $\hat{Y}_s(P,T)$ como $\underline{Y}$, si todos los consumidores prefieren el consumo formal frente a salir, y como $\overline{Y}$ en el caso opuesto.

Finalmente, de manera similar al caso con evasión, la decisión de los consumidores a un lado u otro de $\hat{Y}_s(P,T)$ es homogénea. El Lema 3.6 caracteriza lo anterior.

Lema 3.6 *(Ingreso de corte, formal vs salir): Considere $(P,T) \in \mathbb{R}^2_+$ como dado. El ingreso de corte, $\hat{Y}_s(P,T)$ satisface las condiciones siguientes:*

(i) $\left(\forall Y \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]\right) \left[Y \geq \hat{Y}_s(P,T,Y) \Longrightarrow V_F(P,T,Y) > V_s(Y)\right]$

(ii) $\left(\forall Y \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]\right) \left[Y < \hat{Y}_s(P,T,Y) \Longrightarrow V_F(P,T,Y) < V_s(Y)\right]$

La intuición del Lema 3.6 es similar al Lema 3.4.

Firma y Regulador

Para el caso con evasión, conocida la elección entre ser formal e informal, a partir del usuario de ingreso indiferente $\hat{Y}(P,T)$, se establece la medida de bienestar. Dadas las funciones de utilidad indirecta de cada individuo, el regulador maximiza el bienestar social de todos los usuarios, el cual está dado por la suma ponderada de las utilidades indirectas de los consumidores formales e informales. Además, el regulador enfrenta una restricción de beneficios de la firma, que requiere que ésta obtenga beneficios por encima de una cota inferior denotada por $\overline{\pi} \geq 0$. Formalmente, el problema del regulador en el escenario con evasión está dado por (6).

$$\begin{aligned} \max_{(P,T)\in\mathbb{R}^2_+} \quad & W_s := \int_{\underline{Y}}^{\hat{Y}} \theta_I(Y) V_I\left(Y\right) f(Y) dy + \int_{\hat{Y}}^{\overline{Y}} \theta_F(Y) V_F\left(P,T,Y\right) f(Y) dy \\ \text{s.a} \quad & \pi(P,T) \geq \overline{\pi} \end{aligned} \tag{6}$$

Donde los beneficios de la firma regulada están dados por $\pi(P,T) := (P-c)X_F + TN_F - c\tilde{X}_I - F$. La firma enfrenta un costo fijo F y un costo marginal c constante por viaje. Esto supone que dada la tarifa (P,T), el margen que percibe la firma por cada viaje está dado por $(P-c)$ multiplicado por la demanda total de los formales, la cual se denota por $X_F := \int_{\hat{Y}}^{\overline{Y}} x^*(P,T,Y) f(Y) dy$, mientras que los ingresos por concepto de tarifa están dados por TN_F, donde $N_F := \int_{\hat{Y}}^{\overline{Y}} f(Y) dy$ es la cantidad de individuos que deciden consumir de manera formal. Se debe notar que el número de consumidores que paga es variable y depende de la tarifa impuesta por el regulador[3]. Un cambio en la tarifa modifica el margen extensivo haciendo que el número de consumidores informales cambie. Debe notarse además, que la firma incurre en un costo c por proveer el servicio para los consumidores informales, donde la demanda total de éstos últimos está dada por $\tilde{X}_I := \int_{\underline{Y}}^{\hat{Y}} \tilde{x} f(Y) dy$.

Se consideran ponderadores de la forma [4], $\theta_i(Y) := \frac{1}{\partial V_i / \partial y}$; donde $\partial V_i / \partial y$ es la utilidad marginal del ingreso evaluada en P y T óptimos para $i \in \{F, I\}$. La idea detrás de esta forma de ponderar es eliminar las consideraciones de redistribución en el problema del regulador. Una unidad extra de ingreso aumenta el bienestar en la misma cantidad, al margen de quien reciba la misma puesto que se pondera a cada individuo en el recíproco de su utilidad marginal del ingreso.

[3]La tecnología de modelación sigue a Ng y Weisser (1974).
[4]Este tipo de ponderadores sigue a Negishi (1960).

Dadas las condiciones del problema del regulador, y tomando en cuenta que la función de bienestar social W es monótona decreciente en P y T, el único caso de análisis relevante en los modelos de tarificación uniforme, es cuando las restricciones del problema están activas. El Apéndice Matemático aborda la demostración de este argumento en detalle.

Un problema análogo aparece para el escenario en que la decisión relevante es entre ser formal y salir del mercado. Puesto que todas las definiciones del problema del regulador son análogas a las del caso con evasión, el problema se omite.

Finalmente, se considera la siguiente cronología de la interacción. En $t = 0$, el regulador elige las tarifas óptimas que resuelven el problema (6). En $t = 1$ los individuos toman su decisión de consumo en términos de las tarifas impuestas.

3.2. Modelo: Tarificación Uniforme sin Evasión

Caso 1: $P > 0$, $T = 0$

En este escenario se excluye la evasión de la modelación. Todos los individuos de esta economía observan el precio P por viaje en transporte público impuesto por el regulador, y toman la decisión de salir o consumir como formales. Formalmente, los consumidores formales resuelven el problema dado por (7).

$$\begin{aligned} \max_{(G,x,L)\,\in\,\mathbb{R}^3_+} \quad & \phi(G) + \psi(x) + \xi(L) \\ \text{s.a} \quad & G + xP = Y \\ & L + xt = \tau \end{aligned} \tag{7}$$

La demanda óptima de los formales por el bien x que resulta de resolver el programa (7) se denota por $x^*(P, 0, Y)$. La función máximo resultante está dada por $V_F^1(P, 0, Y)$[5]. Un individuo decide consumir el bien x si su utilidad indirecta de consumir es mayor a su utilidad indirecta de salir del mercado, ésta última se denota por $V_s^1(Y) := \phi(Y) + \psi(0) + \xi(\tau)$. Es decir, opta por el consumo formal ssi $\Delta V^1(P, Y) := V_F^1(P, 0, Y) - V_s^1(Y) > 0$. Al igual que en el caso general, de existir un individuo indiferente entre consumir como formal o salir del mercado, se define $\hat{Y}^1(P)$ como el ingreso del mismo. En este caso se tendrá que $\Delta V^1(P, \hat{Y}^1(P)) = 0$. En caso de no existir, de nuevo, $\hat{Y}^1(P)$ queda definido como $\underline{Y}$ o $\overline{Y}$.

El problema del regulador está dado por (8), donde $\pi(P, 0) := (P - c)X_F^1 - F$, y $X_F^1 := \int_{\hat{Y}^1}^{\overline{Y}} x^*(P, 0, Y) f(Y) dy$ es la demanda total de los consumidores.

[5] En lo que sigue los supraíndices $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ denotan el caso considerado y los subíndices F, I, s denotan el comportamiento del consumidor en el mercado respecto a ser formal, informal o salir del mercado, respectivamente.

$$\begin{aligned} \max_{(P,T)\in\mathbb{R}_+\times\{0\}} \quad & W^1 := \int_{\underline{Y}}^{\hat{Y}^1} \theta_s(Y)V_s^1(Y)\, f(Y)dy + \int_{\hat{Y}^1}^{\overline{Y}} \theta_F(Y)V_F^1(P,0,Y)\, f(Y)dy \\ \text{s.a} \quad & \pi(P,0) \geq \overline{\pi} \end{aligned} \tag{8}$$

En lo que sigue, se toma como supuesto la existencia de un individuo indiferente entre ambas modalidades de consumo dado el precio óptimo. El supuesto 2 hace explícito lo anterior.

Supuesto 2 *Sea P^* el precio óptimo que resulta de resolver el problema (8). Se asume que $\Delta V^1(\underline{Y}, P^*) < 0$ y $\Delta V^1(\overline{Y}, P^*) > 0$.*

El supuesto 2 y el Lema 3.5, junto con la continuidad de $\Delta V^1(P,Y)$, aseguran la existencia de un individuo indiferente de ingreso $\hat{Y}^1$ interior en el óptimo del problema (8). Dado lo anterior, se puede formular la proposición 3.7 que caracteriza la regla de tarificación óptima para el caso 1.

Proposición 3.7 *(Regla de Tarificación Uniforme Óptima con Precio): La regla de tarificación óptima que caracteriza la solución al problema (8) está dada por:*

$$P^* = c + \frac{F + \overline{\pi}}{X_F^1} > 0 \tag{9}$$

Es interesante notar que en el caso hipotético en que la firma no tiene costos fijos, $F = 0$, y en que el regulador sólo está obligado a evitar que la firma opere bajo pérdidas, $\overline{\pi} = 0$, el precio óptimo resulta de tarificar de forma eficiente cobrando el costo marginal de producción.

Intuitivamente, la regla de tarificación óptima consta de dos partes. Primero, el regulador busca colocar un precio tal que se pueda cubrir el costo marginal de producción. Naturalmente este sería el precio óptimo de no existir la necesidad de financiar más allá a la firma. La existencia de $\overline{\pi}$ y F hace que el regulador se vea obligado a aumentar el P hasta poder cubrir la restricción presupuestaria. En el óptimo, el regulador reparte la tarea de financiar $\overline{\pi} + F$ entre todas las unidades vendidas de x. Se debe notar que si $\overline{\pi} = 0$, la regla óptima resulta en tarificar al costo medio para asegurar que la firma proveedora pueda cubrir tanto los costos fijos como los costos variables del proceso de producción. La proposición (3.8) caracteriza la respuesta del precio óptimo frente a cambios en los parámetros del problema.

Proposición 3.8 *Considere P^* como la solución al problema (8). La respuesta de P^* frente a cambios en c y $\overline{\pi}$ está dada por:*

(i) $\frac{dP^*}{dc}$ *está dado por* $\frac{dP^*}{dc} = \frac{1}{1+\frac{(F+\overline{\pi})}{(X_F^1)^2}\frac{\partial X_F^1}{\partial P}}$.

(ii) $\frac{dP^*}{d\overline{\pi}}$ *está dado por* $\frac{dP^*}{d\overline{\pi}} = \frac{X_F^1}{(F+\overline{\pi})\frac{\partial X_F^1}{\partial P}+(X_F^1)^2}$.

Es interesante comparar los resultados de la proposición 3.8 para el caso en que $\overline{\pi}+F=0$ con el escenario en que $\overline{\pi}+F>0$. Considerar primero el resultado (i) bajo el primer escenario. Un aumento en el costo marginal de producción ciertamente genera un aumento en el precio óptimo. Dado que el regulador no necesita cubrir los costos fijos y el beneficio objetivo es nulo, éste tarifica con la eficiencia como su único objetivo, es decir, $P^*=c$. En el escenario en que $\overline{\pi}+F>0$ la respuesta del precio es ambigua puesto que $\frac{\partial X_F^1}{\partial P}<0$. Si la magnitud de dicha derivada es grande, entonces aumentos en el costo marginal conducen a reducciones en el precio. Intuitivamente, el aumento en el precio genera dos efectos. Primero permite aumentar los ingresos de la firma, ceteris paribus, puesto que cada unidad se vende a un precio mayor. Segundo, puesto que los consumidores responden cambiando su demanda y saliendo del mercado frente a aumentos en el precio, la firma ve sus ingresos caer. Si la magnitud de $\frac{\partial X_F}{\partial P}$ es grande, el segundo efecto domina con lo que el regulador encuentra óptimo reducir el precio. La intuición es análoga para el resultado **(ii)**. Debe notarse además que si $\underset{P\to 0^+}{lim}\frac{\partial x_F(P,0,Y)}{\partial P}=-\infty$ y $\underset{P\to\infty^+}{lim}\frac{\partial x_F(P,0,Y)}{\partial P}=0$ para cualquier Y, el precio óptimo P^* crecerá en c y $\overline{\pi}$ siempre que se parta de un nivel de precios suficientemente alto. Notar, además, que el tamaño del P a partir del cual la respuesta es creciente cambia con $\overline{\pi}+F$.

Caso 2: $T>0,\ P=0$

Esta sección analiza la tarificación óptima en un escenario sin evasión, en que el consumo formal está asociado al pago de una licencia T, impuesta por el regulador, la cual les permite realizar ilimitados viajes en transporte público durante un mes. El pago de la licencia disminuye el ingreso disponible de los usuarios del transporte. Los consumidores deciden entre el consumo formal y salir del mercado. El problema que resuelven los individuos formales está dado por (10).

$$\begin{aligned} &\max_{(G,x,L)\,\in\,\mathbb{R}^3_+} && \phi(G)+\psi(x)+\xi(L)\\ &\text{s.a} && G=Y-T \\ & && L+xt=\tau \end{aligned}\tag{10}$$

La demanda óptima de los formales por el bien x que resulta de resolver el programa (10) se denota por $x^*(0,T,Y)$. La función máximo resultante está dada por $V_F^2(0,T,Y)$. Igual que en el caso 1, un individuo decide consumir el bien x si su utilidad indirecta de consumir es mayor a su utilidad indirecta de salir del mercado. Esto es, opta por el consumo formal ssi $\Delta V^2(T,Y)\coloneqq V_F^2(0,T,Y)-V_s^2(Y)>0$. Al igual que en el caso general, de existir un individuo indiferente entre consumir como formal o salir del mercado, se define $\hat{Y}^2(T)$ como el ingreso del mismo. En este caso se tendrá que $\Delta V^2(\hat{Y}^2(T))=0$. En caso de no existir, de nuevo, $\hat{Y}^2(T)$ queda definido como $\underline{Y}$ o $\overline{Y}$.

En este contexto, el problema que resuelve el regulador es el siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{(P,T)\in\{0\}\times\mathbb{R}_+} & W^2 := \displaystyle\int_{\underline{Y}}^{\hat{Y}^2} \theta_s(Y)V_s^2\left(Y\right)f(Y)dy + \int_{\hat{Y}^2}^{\overline{Y}} \theta_F(Y)V_F^2\left(0,T,Y\right)f(Y)dy & \\
\text{s.a} & \pi(0,T) \geq \overline{\pi} &
\end{array}
\tag{11}
$$

Donde $\pi(0,T) := TN_F^2 - cX_F^2 - F$, $X_F^2 := \int_{\hat{Y}^2}^{\overline{Y}} \tilde{x} f(Y)dy$ es la demanda total de los consumidores, y $N_F^2 := \int_{\hat{Y}^2}^{\overline{Y}} f(Y)dy$ es el número total de consumidores en el mercado. De forma análoga al ejercicio hecho en el caso 1, se toma como supuesto la existencia de un individuo indiferente entre ambas modalidades de consumo. El supuesto 3 hace explícito lo anterior.

Supuesto 3 *Sea T^* la licencia óptima que resulta de resolver el problema (11). Se asume que $\Delta V^2(T^*, \underline{Y}) < 0$ y $\Delta V^2(T^*, \overline{Y}) > 0$.*

El supuesto 3 y el Lema 3.5, junto con la continuidad de $\Delta V^2(P,Y)$, aseguran la existencia de un individuo indiferente de ingreso $\hat{Y}^2$ interior en el óptimo del problema (11). Dado lo anterior, la proposición 3.9 caracteriza la regla de tarificación óptima para el caso en cuestión.

Proposición 3.9 *(Regla de Tarificación Licencia Uniforme sin Evasión): La regla de tarificación óptima que caracteriza la solución al problema (11) está dada por:*

$$
T^* = \frac{F + \overline{\pi} + cX_F^2}{N_F^2} > 0 \tag{12}
$$

Se debe notar que en el caso particular en que $F + \overline{\pi} = 0$, la regla de tarificación dicta colocar una licencia igual al costo total sobre la cantidad de ususarios formales. La proposición 3.10 caracteriza la respuesta de la tarifa óptima frente a cambios exógenos en los parámetros del modelo.

Proposición 3.10 *Considere T^* como la solución al problema (11). T^* satisface lo siguiente:*

(i) $\frac{dT^*}{dc}$ *está dado por* $\frac{dT^*}{dc} = \frac{N_F^2 X_F^2}{(N_F^2)^2 - \left(c\frac{\partial X_F^2}{\partial T}N_F^2 - \frac{\partial N_F^2}{\partial T}(cX_F^2 + \overline{\pi} + F)\right)}$.

(ii) $\frac{dT^*}{d\overline{\pi}}$ *está dado por* $\frac{dT^*}{d\overline{\pi}} = \frac{N_F^2}{(N^2)_F^2 - \left(c\frac{\partial X_F^2}{\partial T}N_F^2 - \frac{\partial N_F^2}{\partial T}(cX_F^2 + \overline{\pi} + F)\right)}$.

Al igual que en el caso 1, dado que tanto X_F^2 como N_F^2 se mueven en la misma dirección frente a cambios en la licencia, no es posible asignar un signo único a las derivadas de la proposición 3.10. En el caso particular en que $F + \overline{\pi} = 0$, una condición suficiente para que la licencia óptima sea creciente, tanto en el costo marginal como en el nivel de beneficio objetivo, es que en la licencia óptima se cumpla $-\frac{\partial X_F^2}{\partial T}\frac{T^*}{X_F^2} > -\frac{\partial N_F^2}{\partial T}\frac{T^*}{N_T^2}$; esto es, que la elasticidad licencia de la demanda agregada formal sea mayor en magnitud que la elasticidad licencia del número de consumidores. Intuitivamente, dicha condición coincide con que la demanda promedio sea decreciente en la licencia.

3.3. Modelo: Tarificación Uniforme con Evasión

Caso 3: $P > 0$, $T = 0$

Ahora se analiza un esquema de tarificación uniforme en un contexto de evasión en el que el consumo formal sólo requiere del pago de un precio P por unidad de x demandada. El problema que resuelven los consumidores formales está dado por (7), sujeto a que $T = 0$, mientras que los consumidores informales resuelven el problema dado en (3). Al igual que en el contexto sin evasión, la demanda óptima por el bien x es una función $x^*(P, 0, Y)$, y la utilidad del formal se denota por $V_F^3(P, 0, Y)$. De forma análoga, la demanda de los informales se denota por $\tilde{x}$ y su utilidad indirecta por $V_I^3(Y)$.

Al igual que en el escenario sin evasión, un individuo decide consumir formalmente el bien x si su utilidad indirecta de consumir es mayor a su utilidad indirecta de ser informal. Es decir, un individuo opta por el consumo formal ssi $\Delta V^3(P, 0, Y) > 0$. El ingreso de corte, $\hat{Y}^3(P)$, es definido de modo análogo al modelo general y la caracterización a cada lado de $\hat{Y}^3(P)$ es similar al Lema 3.4.

El problema del regulador está dado por (13), donde $\pi(P, 0) := (P - c)X_F^3 - c\tilde{X}_I^3 - F$, donde $X_F^3 := \int_{\hat{Y}^3}^{\overline{Y}} x^*(P, 0, Y)f(Y)dy$ es la demanda total de los formales y $\tilde{X}_I := \int_{\underline{Y}}^{\hat{Y}^3} \tilde{x}f(Y)dy$ es la demanda total de los informales.

$$
\begin{array}{ll}
\max\limits_{(P,T)\in\mathbb{R}_+\times\{0\}} & W^3 := \displaystyle\int_{\underline{Y}}^{\hat{Y}^3} \theta_I(Y)V_I^3(Y)\, f(Y)dy + \int_{\hat{Y}^3}^{\overline{Y}} \theta_F(Y)V_F^3(P, 0, Y)\, f(Y)dy \\
\text{s.a.} & \pi(P, 0) \geq \overline{\pi}
\end{array}
\tag{13}
$$

En lo que sigue se toma como supuesto la existencia de un individuo indiferente entre ambas modalidades de consumo, esto es, se asume un $\hat{Y}^3(P)$ interior. El supuesto 4 hace explícito lo anterior.

Supuesto 4 *Sea P^* el precio óptimo que resulta de resolver el problema (13). Se asume que $\Delta V^3(P^*, \underline{Y}) < 0$ y $\Delta V^3(P^*, \overline{Y}) > 0$.*

Hecho lo anterior, la proposición 3.11 caracteriza la regla de tarificación del caso 3.

Proposición 3.11 *(Regla de Tarificación Uniforme óptima con Precio en Presencia de Evasión): La regla de tarificación óptima que caracteriza la solución al problema (13) está dada por:*

$$P^* = c + \frac{F + \overline{\pi} + c\tilde{X}_I^3}{X_F^3} > 0 \tag{14}$$

Como se observa, en presencia de evasión, la regla de tarificación aparece un nuevo término, comparado al escenario sin evasión, que está dado por la proporción del costo marginal (c) multiplicado por la demanda total de los consumidores informales $\tilde{X}_I^3$. La intuición es parecida a la dada en el caso sin evasión. El regulador coloca un precio tal que pueda cubrir los costos variables de producción. La presencia de costos fijos y beneficios mínimos a alcanzar, hace que tarificar a costo marginal genere pérdidas para la firma. La forma en que el regulador ataca este problema es añadiendo al precio, el exceso a financiar por unidad vendida. Lo nuevo en este escenario es que aumentos en el precio, en lugar de llevar a que algunos consumidores abandonen el mercado, hacen que estos pasen a participar como consumidores informales. Puesto que el costo marginal de producción de las unidades evadidas debe igual ser asumido por la firma, el regulador tiene que cambiar el precio para tomar en cuenta esto. Notar que cuando el consumo de los evasores es cero, $\tilde{x}$, tenemos nuevamente la regla de tarificación obtenida en la proposicón 3.7. La proposición (3.12) caracteriza la respuesta del precio óptimo frente a cambios en los parámetros del problema.

Observación : Notar que dado P^*, existe un intervalo $(\underline{h}, \overline{h})$ tal que si $h \in (\underline{h}, \overline{h})$, $\hat{Y}^3(P^*) \in (\underline{Y}, \overline{Y})$ y la solución del problema (13) está bien caracterizada. El intervalo $(\underline{h}, \overline{h})$ queda implícitamente definido por:

$$\Delta V^3(P^*, \overline{Y})|_{\underline{h}} = 0$$
$$\Delta V^3(P^*, \underline{Y})|_{\overline{h}} = 0$$

Proposición 3.12 *Considere P^* como la solución al problema (13). P^* satisface lo siguiente:*

(i) $\frac{dP^*}{dc}$ *está dado por* $\frac{dP^*}{dc} = \frac{X_F^3(X_F^3+\tilde{X}_I^3)}{(X_F^3)^2 - c\frac{\partial \tilde{X}_I^3}{\partial P} + (F+\overline{\pi}+c\tilde{X}_I^3)\frac{\partial X_F^3}{\partial P}}$.

(ii) $\frac{dP^*}{d\overline{\pi}}$ *está dado por* $\frac{dP^*}{dc} = \frac{X_F^3}{(X_F^3)^2 - c\frac{\partial \tilde{X}_I^3}{\partial P} + (F+\overline{\pi}+c\tilde{X}_I^3)\frac{\partial X_F^3}{\partial P}}$.

La proposición 3.12 es análoga a la proposición 3.8. A diferencia de la anterior, notar que ahora no es posible asignar un signo a la respuesta del precio óptimo frente a cambios en c y $\overline{\pi}$ incluso para el caso en que $F + \overline{\pi} = 0$. Intuitivamente, en el caso sin evasión, tarificar a costo marginal aseguraba el cumplimiento de la restricción de beneficios cuando $F + \overline{\pi} = 0$. La presencia de evasores, y el hecho de que cambios en el precio colocado afectan la cantidad de consumo informal, hacen que incluso cuando el beneficio objetivo es cero y cuando la firma no tiene costos fijos que cubrir, tarificar a costo marginal genere pérdidas.

Caso 4: $T > 0, \ P = 0$

En esta sección se analiza el escenario en que los consumidores formales sólo pagan T por el uso de transporte público, lo que les permite realizar viajes ilimitados durante un mes. El pago de la licencia disminuye el ingreso disponible de los usuarios del transporte. Además, existen consumidores informales que deciden evadir el pago. El problema que resuelven los consumidores formales está dado por (10), mientras que los consumidores que evaden resuelven el problema dado en (3). Resolviendo el problema de los consumidores, se encuentra que, tanto la demanada de los formales, como de los informales es la misma, de manera que, los consumidores formales demandan $\tilde{x}$, y la utilidad que reciben está dada por $V_F^4(0, T, Y)$. Los informales también demandan $\tilde{x}$ y obtienen una utilidad dada por $V_I^4(Y)$.

El ingreso de corte, $\hat{Y}^4(T)$, es definido de modo análogo al modelo general y la caracterización a cada lado de $\hat{Y}^4(T)$ es similar al Lema 3.4. Al igual que en el caso 3, un individuo decide ser formal si su utilidad indirecta es mayor a su utilidad indirecta de consumir x informalmente. Es decir, opta por el consumo formal ssi $\Delta V^4(T,Y) \coloneqq V_F^4(0,T,Y) - V_I^4(Y) > 0$.

El problema del regulador está dado por el programa (15), donde $\pi(0,T) \coloneqq TN_F^4 - c(X_F^4 + \tilde{X}_I^4) - F$, $X_F^4 \coloneqq \int_{\hat{Y}^4}^{\overline{Y}} \tilde{x} f(Y)dy$ es la demanda total de los formales y $\tilde{X}_I^4 \coloneqq \int_{\underline{Y}}^{\hat{Y}^4} \tilde{x} f(Y)dy$ es la demanda total de los informales en este escenario.

$$\begin{aligned} \max_{(P,T)\in\{0\}\times\mathbb{R}_+} \quad & W^4 \coloneqq \int_{\underline{Y}}^{\hat{Y}^4} \theta_I(Y) V_I^4(Y) f(Y)dy + \int_{\hat{Y}^4}^{\overline{Y}} \theta_F(Y) V_F^4(0,T,Y) f(Y)dy \\ \text{s.a} \quad & \pi(0,T) \geq \overline{\pi} \end{aligned} \tag{15}$$

Al igual que en el caso 2, se asume la existencia de un $\hat{Y}^4(T,Y)$ interior. El supuesto 5 hace explícito lo anterior.

Supuesto 5 *Sea T^* la licencia óptima que resulta de resolver el problema (15). Se asume que* $\Delta V^4(T^*,\underline{Y}) < 0$ *y* $\Delta V^4(T^*,\overline{Y}) > 0$.

La regla de tarificación óptima que resulta de resolver el problema (15) está dada por la proposición 3.13.

Proposición 3.13 *(Regla de Tarificación Uniforme Óptima con Licencia en Presencia de Evasión): La regla de tarificación óptima que caracteriza la solución al problema (15) está dada por:*

$$T^* = \frac{F + \overline{\pi} + cX_F^4 + c\tilde{X}_I^4}{N_F^4} > 0 \tag{16}$$

Como se observa, al igual que en el caso 3, en presencia de evasión, en la regla óptima aparece un nuevo término que está dado por el costo de proveer el servicio de transporte a los informales ($c\tilde{X}_I^4$). La proposición 3.14 caracteriza la respuesta de la tarifa óptima frente a cambios exógenos en los parámetros del modelo.

Observación : Notar que dado T^*, existe un intervalo $(\underline{h},\overline{h})$ tal que si $h \in (\underline{h},\overline{h})$, $\hat{Y}^4(T^*) \in (\underline{Y},\overline{Y})$ y la solución del problema (15) está bien caracterizada. El intervalo $(\underline{h},\overline{h})$ queda implícitamente definido por:

$$\Delta V^4(T^*,\overline{Y})|_{\underline{h}} = 0$$
$$\Delta V^4(T^*,\underline{Y})|_{\overline{h}} = 0$$

Proposición 3.14 *Considere T^* como la solución al problema (15). T^* satisface lo siguiente:*

(i) $\frac{dT^*}{dc}$ *está dado por* $\frac{dT^*}{dc} = \frac{N_F^4(X_F^4+\tilde{X}_I^4)}{(N_F^4)^2 - \left\{c(\frac{\partial X_F^4}{\partial T} + \frac{\partial \tilde{X}_I^4}{\partial T})N_F^4 - (F+\overline{\pi}+c(X_F^4+\tilde{X}_I^4))\frac{\partial N_F^4}{\partial T}\right\}}$.

(ii) $\frac{dT^*}{dc}$ *está dado por* $\frac{dT^*}{d\overline{\pi}} = \frac{N_F^4}{(N_F^4)^2 - \left\{ c(\frac{\partial X_F^4}{\partial T} + \frac{\partial \tilde{X}_I^4}{\partial T})N_F^4 - (F + \overline{\pi} + c(X_F^4 + \tilde{X}_I^4))\frac{\partial N_F^4}{\partial T} \right\}}$.

La proposición 3.14 es análoga a la proposición 3.10. Notar que otra vez, no es posible asignar un signo a la respuesta del precio óptimo frente a cambios en c y $\overline{\pi}$ incluso para el caso en que $F + \overline{\pi} = 0$. La sección 4 considera estos problemas de estática comparativa de forma numérica.

Observación : $(\exists \overline{h})$ tal que para $h \geq \overline{h}$ el Caso 3 coincide con el Caso 1, y el Caso 4 coincide con el Caso 2, de manera que ningún usuario de transporte público decide ser informal.

Un alto costo de evasión h hace que la utilidad que obtienen los consumidores por usar el transporte público sin pagar sea siempre menor a la que obtienen por ser formales y a la utilidad que obtendrían por salir del mercado, de manera que todos los consumidores deciden pasar al segmento formal o bien dejar de consumir, que es el escenario modelado en el Caso 1 en caso de tarificar con precio $P > 0$, y Caso 2 en caso de tarificar solo con licencia $T > 0$.

3.4. Modelo: Tarificación en Dos Partes con Evasión

Caso 5: $P,\ T > 0$

En un escenario en que el consumo formal requiere el pago de P y T por el servicio de transporte público, los individuos que deciden consumir formal e informalmente resuelven los problemas (1) y (3), respectivamente[6]. Los formales tienen una función de demanda $x^*(P, T, Y)$ y una función de utilidad indirecta denotada por $V_F(P, T, Y)$. Los informales tienen una de demanda que se donota por $\tilde{x}$ inelástica con respecto a P y T, y su función de utilidad indirecta se denota por $V_I(Y)$.

Un individuo decide ser formal ssi $\Delta V \coloneqq V_F(P, T, Y) - V_I(Y) > 0$. Se asume la existencia de un individuo indiferente entre ser formal o informal, dadas la tarifa en dos partes óptima. El supuesto 6 hace explícito lo anterior.

Supuesto 6 *Sea* (P^*, T^*) *la tarifa en dos partes óptima que resulta de resolver el problema (6). Se asume que* $\Delta V(P^*, T^*, \underline{Y}) < 0$ *y* $\Delta V(P^*, T^*, \overline{Y}) > 0$.

El supuesto 6 y el Lema 3.3, junto con la continuidad de $\Delta V(P, T, Y)$, aseguran la existencia de un individuo indiferente de ingreso $\hat{Y}(P, T)$ interior en el óptimo del problema (6). El ingreso del individuo indiferente entre consumir como formal e informal es aquel para el cual se cumple que $V_F(P, T, \hat{Y}) = V_I(\hat{Y})$. La demanda del consumidor indiferente es $\hat{x} > 0$ y el número de consumidores formales está dado por $N_F \coloneqq \int_{\hat{Y}}^{\overline{Y}} f(Y)dy$.

La cantidad total demandada por los consumidores formales está dada por la integral de la demanda sobre todos los consumidores formales, que se denota por $X_F(P, T, Y)$. El cambio

[6] Esta sección es una extensión del trabajo de Ng y Weisser (1974) a un escenario con evasión.

en la cantidad total demandada de los consumidores formales cuando cambia el precio P está dada por:

$$\frac{\partial X_F}{\partial P} = \frac{\partial X_F}{\partial P} + \hat{x}\frac{\partial N_F}{\partial P}$$

En lo anterior $\frac{\partial X_F}{\partial P}$ es el cambio en la demanda cuando el precio varia dejando la cantidad de consumidores formales constante; y $\hat{x}\frac{\partial N_F}{\partial P}$ es el cambio en la demanda cuando el consumidor indiferente deja de pagar.

La derivada de la demanda de los consumidores formales cuando cambia el valor de la licencia T está dada por:

$$\frac{\partial X_F}{\partial T} = \frac{\partial X_F}{\partial T} + \hat{x}\frac{\partial N_F}{\partial T}$$

De forma análoga, $\frac{\partial X_F}{\partial T}$ es el cambio en la demanda cuando varia T dejando la cantidad de consumidores formales constante; y $\hat{x}\frac{\partial N_F}{\partial T}$ es el cambio en la demanda cuando el consumidor indiferente deja de pagar.

La tarifa en dos partes socialmente óptima se obtiene de resolver el problema del regulador dado por la expresión (6). La condición de optimalidad está dada por:

$$\frac{\partial W/\partial P}{\partial W/\partial T} = \frac{\partial \pi/\partial P}{\partial \pi/\partial T} \tag{17}$$

La expresión (17) corresponde a la igualdad entre la tasa marginal de sustitución y la tasa marginal de transformación entre P y T de acuerdo a lo permitido por la restricción presupuestaria. El lado izquierdo de la igualdad, por la Identidad de Roy, corresponde a $\overline{X} \coloneqq \frac{X_F}{N_F}$, es decir la cantidad promedio consumida por los formales. Los óptimos para P y T están dados por las siguientes expresiones:

$$P = c + \frac{Q(c\tilde{X}_I + F) + c\tilde{x}N_F Q}{SN_F + QN_F(\overline{X} - \hat{x})} \tag{18}$$

$$T = \frac{(c\tilde{X}_I + F)\,(S - \hat{x}Q) - Qc\tilde{x}X_F}{SN_F + QN_F(\overline{X} - \hat{x})} \tag{19}$$

Donde $S \coloneqq \frac{\partial X_F}{\partial P} - \overline{X}\frac{\partial X_F}{\partial T}$ y $Q \coloneqq \overline{X}\frac{\partial N_F}{\partial T} - \frac{\partial N_F}{\partial P}$. La ecuación S representa la ecuación de Slutsky, y muestra la variación total de la demanda compensada de los formales cuando cambian P y T.

Lema 3.15 *:* $\frac{\partial N_F}{\partial P} = \hat{x}\frac{\partial N_F}{\partial T}$

La demostración del lema 3.15 es análoga a la proposición 1 de Ng y Weisser (1974). Utilizando este lema, se puede expresar (18) y (19) en términos de elasticidades.

Proposición 3.16 *: (Regla de tarificación en dos partes óptima en presencia de evasión): Si el óptimo del problema (6) es interior, entonces la tarifa en dos partes óptima en presencia de evasión que satisface la restricción sobre los beneficios a alcanzar por la firma proveedora del servicio de transporte público, está dada por:*

$$\frac{(P-c)X_F}{(c\tilde{X}_I+F)} = \frac{\eta_{N_F}\frac{\overline{X}}{\hat{x}}(\overline{X}-\hat{x})}{\eta_{X_F}\overline{X}+\eta_{N_F}\frac{(\overline{X}-\hat{x})^2}{\hat{x}}}\left(1+\frac{c\tilde{x}N_F}{(c\tilde{X}_I+F)}\right) \tag{20}$$

$$\frac{TN_F}{(c\tilde{X}_I+F)} = \frac{\eta_{X_F}\overline{X}-\eta_{N_F}\frac{\overline{X}-\hat{x}}{\hat{x}}\left(\hat{x}+\overline{X}\frac{c\tilde{x}N_F}{(c\tilde{X}_I+F)}\right)}{\eta_{X_F}\overline{X}+\eta_{N_F}\frac{(\overline{X}-\hat{x})^2}{\hat{x}}} \tag{21}$$

Donde, $\eta_{N_F} := \frac{\partial N_F}{\partial P}\frac{P}{N_F}$ es la elasticidad precio del número de consumidores formales; y $\eta_{X_F} := S\frac{P}{X_F}$ es la elasticidad precio de la demanda de los individuos formales. En condiciones normales, estas elasticidades son negativas. En caso de que $P=0$ o $T=0$ la solución coincide con (14) y con (16), respectivamente.

Por la naturaleza del problema, el déficit de la firma cuando tarifica con precio igual a costo marginal está dado por el costo fijo más el costo que enfrenta la firma por proveer el servicio de transporte a los consumidores informales $(c\tilde{X}_I+F)>0$. Además, tanto η_{N_F} como η_{X_F} son negativas, pues en el primer caso, un aumento en P disminuye el número de consumidores formales, y en el segundo caso disminuye la demanda de los consumidores formales. Tomando en cuenta esto último, la primera expresión de la proposición 3.16 representa la fracción del déficit de la firma que se financia con precio $P>0$ por encima de costo marginal c, y la segunda expresión representa la fracción del déficit que se financia con la licencia $T>0$ que pagan los consumidores formales por entrar al mercado.

Observación : Notar que dado (P^*,T^*), existe un intervalo $(\underline{h},\overline{h})$ tal que si $h\in(\underline{h},\overline{h})$, $\hat{Y}(P^*,T^*)\in(\underline{Y},\overline{Y})$ y la solución del problema (6) está bien caracterizada. El intervalo $(\underline{h},\overline{h})$ queda implícitamente definido por:

$$\Delta V(P^*,T^*,\overline{Y})|_{\underline{h}}=0$$
$$\Delta V(P^*,T^*,\underline{Y})|_{\overline{h}}=0$$

Reexpresando la ecuación (20), se obtiene que la regla de tarificación en dos partes óptima con precio unitario por viaje en transporte público es:

$$P^* = c+\frac{\eta_{N_F}\frac{(\overline{X}-\hat{x})}{\hat{x}}\left(\frac{c\tilde{X}_I+F}{N_F}\right)}{\eta_{X_F}\overline{X}+\eta_{N_F}\frac{(\overline{X}-\hat{x})^2}{\hat{x}}}+\frac{\eta_{N_F}\overline{X}\frac{(\overline{X}-\hat{x})}{\hat{x}}}{\eta_{X_F}\overline{X}+\eta_{N_F}\frac{(\overline{X}-\hat{x})^2}{\hat{x}}}\left(\frac{c\tilde{x}}{\overline{X}}\right)>0 \tag{22}$$

Los dos primeros términos del lado derecho de (22) corresponden a la expresión para el precio óptimo en Ng y Weisser (1974), cuando no existe la posibilidad de evadir el pago de tarifas. Estos términos muestran los costos asociados al hecho de que los consumidores indiferentes sean sensibles a cambios en los precios, por lo que el déficit de la firma se financia con una menor cantidad de consumidores.

El último término del lado derecho de (22) se explica por la presencia de consumidores que evaden el pago de las tarifas del transporte. Este término muestra que el precio óptimo en presencia de evasión tiene asociado un cargo adicional que está dado por la fracción del consumo promedio de los consumidores informales $\tilde{x}$ sobre el consumo promedio de los consumidores formales $\overline{X}$. Se observa, además, que dicha fracción se relaciona de manera directa con la elasticidad precio del número de consumidores formales η_{N_F}, y de manera inversa con la elasticidad precio de la demanda η_{X_F}, ceteris paribus. Tomando en cuenta esto, dada la posibilidad de evasión, mientras mayor sea la sensibilidad del número de consumidores formales y de su demanda, el déficit de la firma se financia con una cantidad menor de consumidores que sin presencia de evasión.

Reexpresando la ecuación (21), se obtiene que la licencia óptima que se paga por entrar al mercado:

$$T^* = \frac{\eta_{X_F}\overline{X} - \eta_{N_F}(\overline{X} - \hat{x})}{\eta_{X_F}\overline{X} + \eta_{N_F}\frac{(\overline{X}-\hat{x})^2}{\hat{x}}} \left(\frac{c\tilde{X}_I + F}{N_F} \right) - \frac{\eta_{N_F}\frac{\overline{X}-\hat{x}}{\hat{x}}\overline{X}}{\eta_{X_F}\overline{X} + \eta_{N_F}\frac{(\overline{X}-\hat{x})^2}{\hat{x}}} c\tilde{x} > 0 \tag{23}$$

El primer término del lado derecho (23) corresponde a la expresión para la licencia óptima en Ng y Weisser (1974), cuando no existe la posibilidad de evadir el pago de tarifas. El segundo término del lado derecho se explica por la presencia de consumidores informales que evaden el pago de las tarifas. La licencia óptima se ve afectada por la presencia de consumidores que evaden el pago de las tarifas del transporte. El término adicional está dado por el costo c de proveer el servicio a los consumidores que evaden el pago, multiplicado por la cantidad promedio consumida de los informales $\tilde{x}$. Este término se relaciona de manera directa con la elasticidad precio del número de consumidores formales η_{N_F}, y de manera inversa con la elasticidad precio de la demanda η_{X_F}, ceteris paribus.

Finalmente, si se conocen las condiciones de costo y de demanda, además de la respuesta del número de consumidores a cambios en las tarifas P y T, la tarifa óptima en dos partes en presencia de evasión puede ser calculada.

Cuando las restricciones están activas, es decir, $P, T, \lambda > 0$, una tarifa en dos partes socialmente óptima que permite mantener financiada a la firma proveedora del servicio de transporte público cuando un grupo de consumidores decide evadir el pago de tarifas satisface:

Proposición 3.17 *Si la función de utilidad es cuasi-lineal, $\overline{X} = \hat{x}$, o si la elasticidad precio del número de consumidores (η_{N_F}) es igual a cero:*

(i) *Es óptimo tarificar con P igual a costo marginal c.*

(ii) *La licencia T óptima por entrar al mercado es igual a $T = \frac{(c\tilde{X}_I+F)}{N_F}$, es decir, es igual al déficit de la firma cuando tarifica $P = c$, promediado por el total de consumidores formales.*

Proposición 3.18 *En condiciones normales de demanda $\eta_{N_F} < 0$ y $\eta_{X_F} < 0$, entonces P es mayor a (menor a) c si $\overline{X}$ es mayor a (menor a) $\hat{x}$.*

Intuitivamente, cuando $\overline{X} = \hat{x}$ se tiene un mundo en el cual la demanda de los individuos formales no responde a cambios en el ingreso. Lo anterior resulta, por ejemplo, de considerar demandas que provienen de funciones de utilidad cuasi-lineales. De ser este el caso, el regulador encuentra atractivo perseguir eficiencia con el precio y cubrir las necesidades de financiamiento a partir de la licencia T. Lo anterior es evidente cuando se piensa en que un aumento en T, disminuye el ingreso disponible de los consumidores. Dado que la demanda de los mismos no cambia con el ingreso Y, dicho aumento no afecta su cantidad demandada.

Proposición 3.19 *En condiciones normales de demanda, cuando $\overline{X} > \hat{x}$, si $\overline{X}$ y $\hat{x}$ permanecen constantes ante cambios en las elasticidades η_{N_F} y η_{X_F}, y además las elasticidades también son constantes, una tarifa en dos partes óptima en presencia de evasión cumple:*

(i) *La proporción del déficit de la firma $(c\tilde{X}_I + F)$ que se financia con $P > c$ aumenta con la elasticidad precio del número de consumidores formales $|\eta_{N_F}|$ en valor absoluto y la proporción que se financia con T disminuye con $|\eta_{N_F}|$.*

(ii) *La proporción del déficit de la firma $(c\tilde{X}_I + F)$ que se financia con $P > c$ disminuye con la elasticidad precio de la demanda compensada de consumidores formales $|\eta_{X_F}|$ en valor absoluto y la proporción que se financia con T aumenta con $|\eta_{X_F}|$.*

Intuitivamente, mientras más sensible sea el número de consumidores formales frente a un aumento en el nivel de precios, resulta atractivo financiar el déficit vía precios. El efecto sobre la fracción de $(c\tilde{X}_I + F)$ financiada con la licencia T resulta de que $(c\tilde{X}_I + F) = TN_F + EX_F$, de manera que $1 = \frac{EX_F}{(c\tilde{X}_I + F)} + \frac{TN_F}{(c\tilde{X}_I + F)}$, entonces los efectos de η_{N_F} y η_{X_F} sobre $\frac{TN_F}{(c\tilde{X}_I + F)}$ son los mismos que en $\frac{EX_F}{(c\tilde{X}_I + F)}$ con signo diferente.

En otras palabras, si el número de consumidores formales es elástico, pero su demanda es inelástica resulta eficiente tarificar solo vía precio P para cubrir el déficit de la firma. Si la demanda de los formales es muy sensible a cambios en precios, su cantidad demandada disminuye mucho al cambiar marginalmente el precio. En este caso resulta conveniente colocar un precio bajo. Además, se observa que al disminuir la licencia por entrar al mercado, el número de consumidores formales aumenta. Por otro lado, cuando la demanda de los consumidores formales es muy sensible a cambios en las tarifas y el número de consumidores formales es insensible a dichos cambios, resulta eficiente tarificar solo con licencia T para cubrir el déficit de la firma.

4. Ejercicio Numérico

En esta sección se presenta un ejercicio de simulación numérico, para lo cual se utilizan parámetros del Sistema de Transporte Público de Santiago (Transantiago) en Chile, nivel de ingresos de los usuarios e índices de evasión del pago del pasaje de los autobuses. Se simulan escenarios en que los usuarios tienen la opción de pagar un precio unitario por viajes en transporte público, una tarjeta que permite ilimitados viajes por mes, o ambas opciones, y además existe la posibilidad de evadir el pago de las tarifas del transporte. Se utiliza el modelo desarrollado en la sección anterior con el objetivo de calcular los valores óptimos de las tarifas en presencia de evasión, y se presenta la sensibilidad de las tarifas óptimas a cambios en los parámetros del problema, y su efecto sobre el bienestar social y sobre los índices de evasión.

4.1. Sistema de transporte público de Santiago

El Transantiago actualmente es operado por 7 empresas concesionarias y está integrado, tanto física como tarifariamente con el Metro de Santiago a través una forma de pago denominada "tarjeta bip", que es un medio de acceso al servicio. De acuerdo al Informe de Gestión 2015-2016 del Directorio de Transporte Público Metropolitano (DTPM, 2017), las transacciones anuales en los buses, realizadas con la tarjeta bip, en el año 2016 disminuyeron en $4,4\,\%$ respecto a las transacciones realizadas en el 2015. Estos cambios se atribuyen a factores como la evasión y al uso de medios de transporte privados, como es el auto o la bicicleta. En particular, se destaca el hecho de que la evasión del pago de tarifas de buses, la cual se ha estimado en 31,4 % para el primer trimestre de 2017, influye en la subestimación de la demanda, lo cual afecta de forma directa a los ingresos de las empresas concesionarias. Finalmente, en 2015 los resultados financieros del Transantiago fueron negativos, las operadoras enfrentaron pérdidas de \$417.205 millones.

Los principales parámetros que se utilizan para calibrar el modelo se detallan a continuación.

4.2. Calibración

El número de usuarios que moviliza el Transantiago mensualmente es $N = 4.8$ millones. Se toma como escenario de referencia la situación actual en la que se paga por viaje en bus una tarifa única de $P = \$640$ pesos y $T = \$0$[7]. En 2015, los costos totales de las operadoras del Transantiago fueron de \$988.716 millones y los ingresos de \$571.511 millones. En este mismo año, dichos usuarios realizaron 922 millones de viajes en el sistema de buses de Santiago, que en valores mensuales, corresponden a 76.8 mil millones de viajes. Éstos últimos tienen asociado un costo variable de \$19.565 millones para las operadoras del servicio al mes (DTPM, 2015). Suponiendo que el resto de los costos del sistema corresponden a cargos fijos, se obtiene $F = \$62.828$ millones mensuales. Además, el valor del costo marginal para los buses urbanos en Santiago ha sido calculado en $c = \$215$ CLP/pasajero (Batarce, 2016).

[7] Actualmente, existe un pago único de $T = \$1.550$. Dado que este pago es único y su valor es mínimo, este análisis considera el escenario de referencia como uno de tarifa uniforme con $T = 0$.

Se utiliza la siguiente forma funcional para la utilidad de los consumidores: $log(G) + log(x) + log(L)$ que cumple con las propiedades del Supuesto 1, sujeto a las restricciones de presupuesto y de tiempo del problema (1), planteado en la sección anterior. Se utiliza, además, una distribución de ingresos, donde los individuos de menores ingresos son mayoría dentro de todos los usuarios de transporte público, continua y de soporte acotado entre $\underline{Y} = \$197.000$[8], y $\overline{Y} = \$5\ 000.000$. Se considera además, que un usuario, en promedio, tiene 8 horas del día disponibles que reparte entre ocio y viajes en transporte público, de manera que en un mes, sin considerar fines de semana, el tiempo disponible que un usuario destina a ocio y a viajar en transporte público es $\tau = 176$ horas (22 días $\times$ 8 horas), y el tiempo de viaje promedio en bus se establece en $t = 1$ hora.

Dados todos los parámetros del modelo, la función de utilidad, y asumiendo que la firma de transporte público se autofinancia completamente ($\overline{\pi} = 0$), el único parámetro que falta por determinar el es costo de evasión (h). Este costo se calibra de manera tal que se replica el 30 % de evasión existente en los buses del Transantiago, y el valor que alcanza es $h = 0{,}1111$.

4.3. Resultados

En la tabla 1 se presentan los principales resultados de las tarifas óptimas para cada uno de los casos estudiados en la sección anterior, con y sin presencia de evasión. Además, se presenta el cambio relativo del bienestar social respecto al escenario de referencia, y sus efectos sobre el nivel de evasión para cada caso. Se considera como punto inicial el escenario de referencia (REF), que corresponde al escenario actual de precios y nivel de evasión en transporte público del Transantiago en Chile. A partir de este escenario se comparan las tarifas encontradas en ambos escenarios.

Tabla 1: Resultados

Casos	P^*	T^*	Δ BS	Índice de evasión
Escenario de referencia				
REF	\$640	0	0	30,00 %
Escenario sin evasión				
1	\$367,79	-	0,578 %	-
2	-	\$27.066,86	0,465 %	-
Escenario con evasión				
3	\$457,28	-	0,519 %	19,59 %
4	-	\$40.304,79	0,496 %	20,58 %
5	\$457,28	-	0,519 %	19,59 %

En el primer escenario los consumidores eligen entre consumir formalmente o salir del mercado. En este escenario el valor óptimo del precio por viaje en transporte público es \$367,79, y en el caso de tarificar con licencia, su valor óptimo es \$27.066,86. Asumiendo que en REF el regulador actúa de forma óptima, la presencia de evasión hace que el bienestar social óptimo posible de alcanzar sea menor que sin la presencia de evasión.

[8] Ingreso mínimo mensual en Chile 2017 para trabajadores menores de 18 años y mayores de 65 años.

Comparando los resultados de los casos correspondientes al primer escenario con el escenario de referencia (REF), en un mundo donde no existe evasión, resulta óptimo tarificar con un precio menor al actual de $P = \$640$. Un precio menor atrae a una mayor cantidad de consumidores que realizan viajes en transporte público, lo que genera un aumento en los ingresos de las operadoras, y permite su financiamiento sin recurrir a aumentos en precios y subsidios.

En el segundo escenario se tiene a un regulador que considera la evasión al momento de imponer las tarifas que maximizan el bienestar social. En términos de bienestar, al igual que en el escenario sin evasión, es óptimo tarificar solo con precio, cuyo valor óptimo es \$457,28. Al comparar el cambio en el bienestar social en los casos 3-5, con el escenario de referencia, el máximo bienestar se alcanza tarificando con precio (caso 3). Debe notarse que para el caso 5 de tarifa en dos partes resulta óptimo tarificar solo con precio. Tal como se plantea en la proposición 3.16, el precio óptimo coincide con el precio encontrado en el caso 3.

Vale la pena resaltar algunas complicaciones presentes al momento de resolver el caso 5 de tarifa en dos partes. Primero, la función de bienestar social de tarifa en dos partes no es globalmente cóncava. Lo anterior implica la existencia de varios máximos locales. Dado que el método de resolución utilizado en este ejercicio consiste en identificar puntos en que las derivadas parciales de la función objetivo sean nulas, el mismo es incapaz de discriminar entre máximos locales y máximos globales. Más aún, la identificación de los diferentes máximos locales resulta sensible al punto inicial a partir del cual se inicia el proceso de búsqueda. Tomando en cuenta esto último, se realizó un ejercicio de "robustez"[9] con el fin de determinar la tarifa en dos partes óptima con la que se alcanza el mayor bienestar social. El mismo consiste en tratar de indentificar el máximo global a partir de un proceso de grilla.

En relación a las elasticidades de la demanda y del número de consumidores formales, definidas analíticamente en el caso 5 de la sección anterior, se obtiene que un aumento de 1 % en el precio P, disminuye la demanda total compensada de los consumidores en 0,0079 %. Este resultado es coherente con la elasticidad precio de la demanda presente en la literatura, por ejemplo, Parry y Small (2009) en su escenario de referencia tiene una elasticidad precio de la demanda de -0,002 %. Asimismo, un aumento de 1 % en el precio P disminuye el número de formales en 0,3845 %. Estos resultados sugieren que los consumidores formales y su demanda son inelásticos a cambios en el precio P.

Los resultados encontrados en ambos escenarios sugieren que en presencia de evasión los consumidores formales pagan tarifas más altas que cuando no se consideran a los consumidores informales dentro de la modelación. Además, al comparar los resultados encontrados en el caso con evasión, los precios óptimos encontrados son menores al precio que actualmente se paga por viaje en transporte público, y son tal que permiten mantener el financiamiento de la firma, sin tener que recurrir a aumentos de precios o subsidios. Esto se explica debido al hecho de que menores tarifas modifican la decisión de los consumidores en el margen, de manera que aumenta el número de consumidores formales, lo que a su vez aumenta los ingresos percibidos por la firma, y la evasión disminuye. Como se observa en la Tabla 1, el índice de evasión cuando se tarifica solo con precio, disminuyó de 30 % a 19,59 %.

[9]Un análisis detallado de este ejercicio se presenta en el apéndice.

En conclusión, tarificar solo con precio resulta más eficiente en términos de bienestar en los escenarios con y sin presencia de evasión. Intuitivamente, esto se explica debido a que el pago de una licencia disminuye el ingreso disponible de los consumidores, pues ahora cuentan con menos recursos que destinan al consumo de otros bienes y esto a su vez disminuye su utilidad. Esta situación se refleja en el menor bienestar social que se alcanza al tarificar solo con licencia o con una tarifa en dos partes (cuando $P, T > 0$).

4.4. Estática Comparativa

En esta sección se analiza la dirección de los cambios de las tarifas óptimas, cuando se modifica de manera marginal los parámetros del problema. Para esto se proponen tres escenarios y se analiza los cambios en la solución del problema. Al igual que en el contexto original (Tabla 1), en los escenarios con y sin evasión, los casos 1 y 3 son los que obtienen mayor bienestar, por lo que el análisis se concentrará en ambos casos en particular.

Escenario 1: Aumento en los costos fijos de la firma

En este escenario se va a analizar el comportamiento de las tarifas óptimas, con y sin presencia evasión, cuando aumenta en 10 % los costos fijos de la firma proveedora del servicio de transporte público.

Como se observa en la Tabla 2, las tarifas óptimas con y sin presencia de evasión se mueven en la misma dirección del cambio en los costos fijos. El óptimo sin evasión, es tal que el precio es mayor al escenario original (Tabla 1). La misma situación se observa para el precio óptimo con evasión. Intuitivamente, en un mundo donde la firma debe autofinanciarse, un aumento en los costos fijos se traduce en un aumento de las tarifas óptimas impuestas por el regulador, con el fin de mantener el financiamiento de la firma. Este aumento en las tarifas induce a un grupo de consumidores a moverse al segmento informal, lo que se traduce en un aumento en el índice de evasión, tal como se observa en la última columna de la Tabla 2. Finalmente, al igual que el escenario original, se observa que es más eficiente tarificar con precio, pues el cambio en el bienestar, comparado con el escenario de referencia es mayor.

Tabla 2: Efecto de un aumento en 10 % en los costos fijos (F)

Casos	P^*	T^*	Δ BS	Índice de evasión
		Escenario de referencia		
REF	\$640	0	0	30,00 %
		Escenario sin evasión		
1	\$383,28	-	0,488 %	-
2	-	\$27.936,42	0,385 %	-
		Escenario con evasión		
3	\$489,01	-	0,420 %	21,66 %
4	-	\$43.062,23	0,397 %	22,63 %
5	\$489,01	-	0,420 %	21,66 %

Finalmente, un aumento en el beneficio objetivo de la firma ($\overline{\pi}$) tiene el mismo efecto que un aumento de los costos fijos. Esto se explica por la forma en que entran dichos parámetros en la restricción de financiamiento de la firma en todos los casos analizados.

Escenario 2: Aumento en el costo marginal de la firma

Ahora se analiza el efecto de un aumento de 10 % en el costo marginal de la firma sobre las tarifas que impone el regulador en un contexto con y sin evasión.

Tabla 3: Efecto de un aumento en 10 % en el costo marginal (c)

Casos	P^*	T^*	Δ BS	Índice de evasión
Escenario de referencia				
REF	$640	0	0	30,00 %
Escenario sin evasión				
1	$389,56	-	0,542 %	-
2	-	$29.072,51	0,282 %	-
Escenario con evasión				
3	$502,83	-	0,378 %	22,52 %
4	-	$44.330,23	0,353 %	23,53 %
5	$502,83	-	0,378 %	22,52 %

Incrementos en los costos marginales pueden ser el reflejo de mejoras en la calidad del servicio de transporte público lo que hace que el costo por viaje en transporte público sea más caro. Al igual que el escenario anterior, las tarifas óptimas con y sin presencia de evasión se mueven en la misma dirección que el cambio en el costo marginal. Cuando aumenta el costo por viaje para las firmas operadoras del transporte público, se generan aumentos en los valores de las tarifas óptimas, lo que induce a que una parte de los consumidores formales decida no pagar y pasar a ser informales. Esto último se refleja en el aumento del índice de evasión comparado a los índices del escenario original (Tabla 1).

Escenario 3: Disminución del costo de evasión

En este escenario se analizan los efectos de una disminución del 10 % en el costo de evasión (h), el cual refleja el costo moral de evadir el pago de las tarifas por el uso del servicio de transporte público.

Tabla 4: Efecto de disminución de 10 % en el costo de evasión (h)

Casos	P^*	T^*	Δ BS	Índice de evasión
Escenario de referencia				
REF	$640	0	0	30,00 %
Escenario con evasión				
3	$489,57	-	0,504 %	24,89 %
4	-	$43.111,90	0,483 %	25,75 %
5	$489,57	-	0,504 %	24,89 %

Los resultados en la Tabla 4 sugieren que un menor costo de evasión tiene asociado tarifas más altas comparadas con las tarifas encontradas en el escenario original.

Intuitivamente, un costo de evasión bajo induce a que una mayor cantidad de consumidores decidan evadir el pago de las tarifas del transporte, pues la utilidad asociada a ser informal supera a la de ser formal. Al existir una mayor cantidad de consumidores informales, la firma proveedora reduce sus ingresos, de manera que esta reducción debe ser cubierta con tarifas más altas con el fin de cubrir los costos de la firma. Se debe tomar en cuenta que imponer tarifas más altas a los consumidores, influye aún más en la decisión de evasión de los consumidores.

Analíticamente, cuando el costo de evasión tiende a cero ($h \to 0$), las mayoría de consumidores formales tenderá a ser informal, y solo los consumidores para los cuales se cumpla:

$$\xi(\tau - tx^*(\cdot)) - \xi(\tau - t\tilde{x}) > \phi(Y) - \phi(Y - Px^*(\cdot)) + \psi(\tilde{x}) + \psi(x^*(\cdot))$$

es decir, que la utilidad de ser formal sea mayor a ser informal, dado que el costo de evasión es muy bajo, seguirán como formales en el mercado.

Finalmente, si el costo de evasión $h \longrightarrow 0{,}31$, ningún individuo evade el pago de las tarifas. En esta situación los únicos casos relevantes de análisis son 1 y 2, donde la decisión de los consumidores se basa en consumir formalmente o salir del mercado. Intuitivamente, esto se explica debido al hecho de que evadir el pago de tarifas resulta muy costoso y la utilidad de evadir cae por debajo de la utilidad de ser formal o de salir del mercado, de manera que los consumidores que no estén dispuestos a pagar, salen del mercado pues se encuentran mejor en términos de utilidad.

4.5. Síntesis de resultados

El ejercicio numérico presentado en esta sección utilizó como base los modelos teóricos de tarificación óptima de la sección anterior. Los parámetros utilizados corresponden al sistema de buses urbanos de Santiago (Transantiago) en Chile. La solución en todos los casos resultó tal que el bienestar máximo se obtiene al tarificar solo con precio, tanto en el escenario con evasión, como sin ella.

Cuando se tarifica solo con licencia la mejora en el bienestar social comparado con la tarificación uniforme con precio P es menor. Intuitivamente, el pago de la licencia disminuye el ingreso de los consumidores, ahora tienen menos ingreso para el consumo de otros bienes G, lo que disminuye su utilidad en mayor medida, y esto se refleja en el bienestar social que se alcanza con este tipo de tarificación comparado con el bienestar cuando se tarifica solo con precio.

Al analizar la sensibilidad de las tarifas óptimas a cambios en los parámetros del problema, se encontró que aumentos en los costos (c, F) de la firma proveedora, se traducen en tarifas más altas, para mantener la firma financiada. En el tercer escenario al disminuir el costo de evasión se observa que la cantidad de consumidores informales aumenta debido a que evadir el pago no es tan costoso en términos morales, por lo tanto la utilidad que obtienen es mayor a la que se obtiene siendo formal. Este aumento de informales provoca una disminución de los ingresos que percibe la firma proveedora del transporte. El regulador, con el fin de garantizar la participación de la firma y mantener su financiamiento, aumenta el valor de las tarifas.

5. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo de tarificación óptima, uniforme y en dos partes, para el servicio de transporte público donde el regulador impone las tarifas óptimas que maximizan el bienestar social. El modelo considera la presencia de consumidores heterogéneos en el ingreso que evaden el pago de tarifas. El número de consumidores es variable y depende de la tarificación impuesta. Éstos se enfrentan a dos alternativas. En un escenario sin evasión, eligen entre consumir formalmente o salir del mercado, y en un escenario con evasión, eligen entre ser formales o informales. El objetivo es encontrar las tarifas óptimas, tal que maximicen el bienestar social sujeto a garantizar el autofinanciamiento de la firma. Adicionalmente, se desarrolló un ejercicio numérico que provee información sobre la sensibilidad de las tarifas óptimas a cambios en los parámetros del problema.

Los resultados principales del modelo teórico son los siguientes. Por un lado, bajo el supuesto de autofinanciamiento de la firma, el regulador siempre satisface la restricción de beneficios con igualdad. Esto se explica porque el regulador solo se preocupa por el bienestar de los consumidores, el cual decrece en la magnitud de las tarifas, el mismo encuentra no eficiente colocar el beneficio de la firma por encima de su opción externa. En el caso en que el regulador tarifica con una tarifa uniforme con precio, el bienestar social se maximiza al tarificar a costo medio. Debe notarse que dicho costo medio es complejo puesto que debe tomar en cuenta la posibilidad de que la opción externa de la firma sea mayor a cero. Más aún, ante la presencia de evasión, el costo a considerar debe tomar en cuenta el costo asociado a proveer el servicio de transporte público a los informales. Bajo un esquema de tarificación con licencia, el regulador, distribuye las necesidades de financiamiento entre los consumidores formales.

Por otro lado, se consideran ejercicios de estática comparativa a nivel analítico. En cualquier caso el resultado de dicho ejercicio es ambiguo. Aumentar las tarifas tiene dos efectos. Por un lado, la firma aumenta sus ingresos dada el alza en las tarifas. Por otro lado, el número de consumidores formales se reduce dado que algunos deciden salir del mercado o ser informales; lo anterior naturalmente afectan el beneficio de la firma. Dicha ambiguedad se resolvió en el ejercicio de estática comparativa a nivel numérico.

En el ejercicio numérico se utilizó los modelos teóricos de tarificación óptima con y sin presencia de evasión desarrollados en la sección 3. Se utilizó parámetros del sistema de buses urbanos de Santiago (Transantiago) y una distribución de ingresos donde los individuos de menores ingresos son mayoría dentro de todos los usuarios de transporte público. Para cada consumidor se calculó la demanda por viajes en transporte público a partir de su función de utilidad. Se tomó en cuenta, además, los efectos del ingreso sobre el pago de las tarifas del transporte, pues en condiciones normales, la demanda por viajes en transporte público crece con el ingreso. Una vez definidos los escenarios a analizar, se encontraron los óptimos para cada caso analizado en la sección teórica.

La solución en todos los casos resultó tal que el bienestar máximo se obtiene al tarificar solo con precio, tanto en el escenario con evasión, como sin ella. Es decir, en un mundo en que la firma debe autofinanciarse y no existe la posibilidad de evasión, resultó ser más eficiente en términos de bienestar tarificar solo con precio, un precio más bajo en este escenario provoca un aumento en la cantidad de usuarios de transporte, lo que permite mantener financiada a la firma proveedora. Por otro lado, cuando se incorpora la posibilidad de evadir el pago de tarifas, tarificar solo con precio, al igual que el caso sin evasión, permite alcanzar el mayor bienestar posible, y mantiene a la firma financiada. Este resultado sugiere que tarifas más altas, tienen mayor impacto sobre el ingreso de los consumidores, lo que a su vez influye en su decisión de pago de las tarifas.

Se realizó un ejercicio de estática comparativa, donde se modificaron las condiciones iniciales del problema con el fin de estudiar el comportamiento de las tarifas óptimas del transporte público en Santiago. Los resultados sugieren que las tarifas óptimas para el servicio de transporte público en Santiago se mueven en la misma dirección que los cambios en los costos de la firma proveedora y se mueven en dirección contraria al cambio en el costo de evasión, de manera que costos de evasión bajos tienen asociados tarifas altas, y visceversa.

Un resultado interesante constituye el hecho de que en el escenario de referencia (REF) donde existe evasión, la firma proveedora de transporte, actualmente, enfrenta pérdidas con la tarifa establecida de $P = \$640$, por lo que debe ser subsidiada. Tomando en cuenta esto último, los resultados del ejercicio númerico sugieren que establecer un precio menor al actual permite mantener financiada a la firma sin tener que recurrir a aumentos en las tarifas o subsidios. Esto se explica por el hecho de que una tarifa menor modifica la decisión de los consumidores en el margen, de manera que aumenta el número de formales que paga por cada viaje realizado en transporte público, y facilita el cumplimiento de la restricción de financiamiento de la firma.

Este trabajo sugiere líneas futuras de investigación. Primero, se puede generalizar este análisis a un escenario dinámico, en el cual los consumidores de manera repetida deciden si evadir o no el pago de las tarifas del transporte. Segundo, resulta interesante extender el modelo a un escenario en el que los consumidores puedan elegir entre varios menús de tarifas en dos partes de los cuales puedan obtener la mayor utilidad posible, y así poder evaluar los efectos sobre el nivel de evasión. Tercero, se puede estudiar el caso en el que el costo de evasión no es constante y dependa de la demanda de cada consumidor.

Apéndice Matemático: Demostraciones Omitidas

Demostración (*Lemma 3.2*):
Considere un individuo de ingreso $Y \in [\underline{Y}, \overline{Y}]$ arbitrario. Notar que para $(P,T) = (0,0)$ se tiene que $x^*(0,0,Y) = \tilde{x}$. De no ser este el caso, los consumidores informales podrían desviarse de su conducta al imitar a los consumidores formales. Esto contradice el supuesto de que los mismos son maximizadores de utilidad. El lema 3.1 asegura que $x^*(P,T,Y)$ es decreciente en T y en Y. De modo que se concluye que $x^*(P,T,Y) \leq x^*(0,0,Y) = \tilde{x}$ ∎

Demostración (*Lema 3.3*):
Considere $(P,T) \in \mathbb{R}^2_{++}$ como dado. Basta ver que $\frac{\partial}{\partial Y}(\Delta V(P,T,Y)) > 0$. Dicha derivada está dada por

$$\frac{\partial}{\partial Y}(\Delta V(P,T,Y)) = \phi^{'}(Y - Px^*(P,T,Y)) - \phi^{'}(Y)$$

donde al tomar la derivada debe notarse que el teorema de la envolvente permite ignorar el efecto de Y sobre los valores óptimos de las variables de decisión. Dado que $x^*(P,T,Y) > 0$ para $(P,T) \in \mathbb{R}^2_{++}$, y dado que el supuesto 1 garantiza que $\phi(\cdot)$ es una función cóncava, se concluye que $\Delta V(P,T,Y)$ es estrictamente creciente en Y. ∎

Demostración (*Lema 3.4*):
Considere la existencia de un individuo indiferente entre el consumo formal e informal. De acuerdo a la definición, el ingreso de este individuo es $\hat{Y}(P,T)$. El Lema 3.3 garantiza que para ingresos mayores a $\hat{Y}(P,T)$, $\Delta V(P,T,Y) > 0$ mientras que para ingresos menores a $\hat{Y}(P,T)$, $\Delta V(P,T,Y) < 0$. Suponga ahora que $\hat{Y}(P,T)$ coincide con uno de los extremos del conjunto de ingresos. Si $\hat{Y}(P,T) = \underline{Y}$ ciertamente todos los individuos de ingreso mayor a $\hat{Y}(P,T)$ optan por el consumo formal. Además, puesto que no hay ningún individuo de ingreso menor a $\hat{Y}(P,T)$ la conclusión **(i)** de la proposición se sostiene. Si $\hat{Y}(P,T) = \overline{Y}$ todos los individuos de ingreso menor a $\hat{Y}(P,T)$ optan por evadir. Otra vez, puesto que no hay ningún individuo con un ingreso mayor a $\hat{Y}(P,T)$ la conclusión **(ii)** de la proposición se sostiene . ∎

Demostración (*Lema 3.5*):
La demostración es análoga a la demostración del Lema 3.3. ∎

Demostración (*Lema 3.6*):
La demostración es análoga a la demostración del Lema 3.4. ∎

Casos relevantes de optimización:

En los modelos de tarificación uniforme de la sección 3, el regulador maximiza el bienestar social sujeto a una restricción de beneficios de la firma, donde $\overline{\pi} \geq 0$. Para demostrar que el único caso relevante de análisis es cuando las restricciones del problema están activas, es decir, cuando $P, T, \lambda > 0$, se va a utilizar el modelo de tarificación uniforme sin evasión correspondiente al caso 1: $P > 0, T = 0$.

Sea el problema del regulador el planteado en (8). El valor de P que maximiza el bienestar social bajo la condición de cumplir un beneficio objetivo de la firma ($\overline{\pi} \geq 0$) resulta de resolver:

$$\mathcal{L}(P, \lambda) := W \; + \; \lambda \left[(P - c)X - F - \overline{\pi} \right]$$

Para encontrar el óptimo, se deriva el lagrangeano con respecto a P y λ. El sistema de condiciones de primer orden del problema es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} &= \frac{\partial W}{\partial P} + \lambda \left[X + (P - c)\frac{\partial X}{\partial P} \right] \leq 0 \quad ; \quad P\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= (P - c)X - F - \overline{\pi} \geq 0 \qquad\qquad\qquad ; \quad \lambda\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{aligned}$$

Análisis de casos:

Caso 1: $P > 0,\ \lambda > 0$
En este caso las restricciones están activas, por lo que las CPO se cumplen con igualdad, y la tarifa óptima se obtiene al despejar el precio P de la segunda CPO:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial P} + \lambda \left[X + (P - c)\frac{\partial X}{\partial P} \right] = 0 \\ &(P - c)X - F - \overline{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $P > 0,\ \lambda = 0$
En este caso solo una restricción está activa. Utilizando la Identidad de Roy y la condición de que $\lambda = 0$ las CPO quedan:

$$\begin{aligned} &X = \underbrace{\lambda \left[X + (P - c)\frac{\partial X}{\partial P} \right]}_{=0} \\ &(P - c)X - F - \overline{\pi} \geq 0 \end{aligned}$$

Dado que $X = 0$ en la primera CPO, la segunda CPO queda: $-F - \overline{\pi} \geq 0$, lo que es una contradicción pues $\overline{\pi} \geq 0$. Por lo tanto se descarta el Caso 2.

Caso 3: $P = 0,\ \lambda = 0$
En este caso todas las restricciones están inactivas. Utilizando la Identidad de Roy las CPO quedan:

$$\begin{aligned} &-X \leq \underbrace{\lambda \left[X + (P - c)\frac{\partial X}{\partial P} \right]}_{=0} \\ &(P - c)X - F - \overline{\pi} \geq 0 \end{aligned}$$

Dado que $P = 0$, la segunda CPO queda: $-cX - F \geq \overline{\pi}$, lo que es una contradicción pues $\overline{\pi} \geq 0$. Por lo tanto se descarta el Caso 3.

Caso 4: $P = 0,\ \lambda > 0$
Al igual que en caso 2, en este caso solo una restricción está activa. Utilizando la Identidad de Roy las CPO quedan:

$$
\begin{aligned}
&- X + \lambda \left[X + (P - c)\frac{\partial X}{\partial P} \right] \leq 0 \\
&(P - c)X - F - \overline{\pi} = 0
\end{aligned}
$$

Dado que $P = 0$, la segunda CPO queda: $-cX - F = \overline{\pi}$, lo que es una contradicción pues $\overline{\pi} \geq 0$. Por lo tanto se descarta el Caso 4.

Finalmente, el único caso relevante de análisis en este trabajo es el caso 1 cuando todas las restricciones del problema están activas. Esto último se cumple para los cuatro modelos de tarificación uniforme con y sin presencia de evasión.

Demostración (*Proposición 3.7*):
El regulador maximiza el bienestar social dado en (8). El valor de P que maximiza el bienestar social bajo la condición de cumplir un beneficio objetivo de la firma $(\overline{\pi}) \geq 0$ resulta de resolver:

$$\mathcal{L}(P, \lambda) \coloneqq W \ + \ \lambda \left[(P - c)X - F - \overline{\pi} \right]$$

Para encontrar el óptimo, se deriva el lagrangeano con respecto a P y λ. El sistema de condiciones de primer orden (CPO) del problema es:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = 0 \iff \frac{\partial W}{\partial P} = -\lambda \left[X + (P - c)\frac{\partial X}{\partial P} \right] \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff (P - c)X - F = \overline{\pi}
\end{aligned}
$$

Despejando P de la segunda CPO se obtiene la expresión para la tarifa uniforme óptima con precio sin presencia de evasión dada por (9), con lo que termina la demostración. ∎

Demostración (*Proposición 3.9*):
El regulador maximiza el bienestar social dado en (11). El valor de T que maximiza el bienestar social bajo la condición de cumplir un beneficio objetivo de la firma $(\overline{\pi}) \geq 0$ resulta de resolver:

$$\mathcal{L}(T, \lambda) \coloneqq W \ + \ \lambda \left[TN - cX - F - \overline{\pi} \right]$$

Para encontrar el óptimo, se deriva el lagrangeano con respecto a T y λ. El sistema de condiciones de primer orden (CPO) del problema es:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = 0 \iff \frac{\partial W}{\partial T} = -\lambda \left[N + T\frac{\partial N}{\partial T} - c\frac{\partial X}{\partial T} \right] \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff TN - cX - F = \overline{\pi}
\end{aligned}
$$

Despejando T de la segunda CPO se obtiene la expresión para la tarifa uniforme óptima con licencia sin presencia de evasión dada por (12), con lo que termina la demostración. ∎

Demostración (*Proposición 3.11*):
El regulador maximiza el bienestar social dado en (13). El valor de P que maximiza el bienestar social bajo la condición de cumplir un beneficio objetivo de la firma $(\overline{\pi}) \geq 0$ resulta de resolver:

$$\mathcal{L}(P, \lambda) := W \ + \ \lambda \left[(P-c)X_F - c\tilde{X}_I - F - \overline{\pi}\right]$$

Para encontrar el óptimo, se deriva el lagrangeano con respecto a P y λ. El sistema de condiciones de primer orden (CPO) del problema es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = 0 &\iff \frac{\partial W}{\partial P} = -\lambda \left[X_F + (P-c)\frac{\partial X_F}{\partial P} - c\frac{\partial \tilde{X}_I}{\partial P}\right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 &\iff (P-c)X_F - c\tilde{X}_I - F = \overline{\pi} \end{aligned}$$

Despejando P de la segunda CPO se obtiene la expresión para la tarifa uniforme óptima con precio en presencia de evasión dada por (14), con lo que termina la demostración. ∎

Demostración (*Proposición 3.13*):
El regulador maximiza el bienestar social dado en (15). El valor de T que maximiza el bienestar social bajo la condición de cumplir un beneficio objetivo de la firma $(\overline{\pi}) \geq 0$ resulta de resolver:

$$\mathcal{L}(T, \lambda) := W \ + \ \lambda \left[TN_F - c\left(X_F + \tilde{X}_I\right) - F - \overline{\pi}\right]$$

Para encontrar el óptimo, se deriva el lagrangeano con respecto a T y λ. El sistema de condiciones de primer orden (CPO) del problema es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = 0 &\iff \frac{\partial W}{\partial T} = -\lambda \left[N_F + T\frac{\partial N_F}{\partial T} - c\left(\frac{\partial X_F}{\partial T} + \frac{\partial \tilde{X}_I}{\partial T}\right)\right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 &\iff TN_F - c\left(X_F + \tilde{X}_I\right) - F = \overline{\pi} \end{aligned}$$

Despejando T de la segunda CPO se obtiene la expresión para la tarifa uniforme óptima con licencia en presencia de evasión dada por (16), con lo que termina la demostración. ∎

Demostración (*Lema 3.15*):
Para demostrar $\frac{\partial N_F}{\partial P} = \hat{x}\frac{\partial N_F}{\partial T}$, primero se aplica la identidad de Roy para obtener la demanda del consumidor marginal $(\hat{x})$, de manera que $\frac{\frac{\partial V_m}{\partial P}}{\frac{\partial V_m}{\partial T}} = \hat{x}$, donde V_m es la utilidad indirecta del consumidor marginal. De manera que, para mantener la utilidad del consumidor marginal constante debe ser que $\frac{\partial T}{\partial P} = -\hat{x}$. Ahora, para que el número de consumidores formales se mantenga constante debe ser que $\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{N_P^F}{N_T^F}$. Así, al igualar las dos condiciones anteriores se obtiene $\frac{\partial N_F}{\partial P} = \hat{x}\frac{\partial N_F}{\partial T}$. ∎

Demostración (*Proposición 3.16*):
El regulador maximiza el bienestar social de todos los consumidores dado por la expresión (3). Los valores de P y T que maximizan el bienestar social bajo la restricción de beneficios de la firma resultan de derivar el Lagrangeano: $\mathcal{L}(P,T,\lambda) \coloneqq W + \lambda\left[(P-c)X_F + TN_F - c\tilde{X}_I - F - \overline{\pi}\right]$ El sistema de ecuaciones de primer orden que caracterizan la solución del problema (6) está dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = 0 &\iff \frac{\partial W}{\partial P} = -\lambda\left[X_F + (P-c)\frac{\partial X_F}{\partial P} + T\frac{\partial N_F}{\partial P} - c\frac{\partial \tilde{X}_I}{\partial P}\right]\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = 0 &\iff \frac{\partial W}{\partial T} = -\lambda\left[(P-c)\frac{\partial X_F}{\partial T} + N_F + T\frac{\partial N_F}{\partial T} - c\frac{\partial \tilde{X}_I}{\partial T}\right]\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 &\iff (P-c)X_F + TN_F - c\tilde{X}_I - F = \overline{\pi}
\end{aligned}$$

Se debe notar que en el desarrollo de la condición de primer orden se utiliza el hecho que $\frac{\partial V_F}{\partial P}(P,Y) = -x^*(P,T,Y)\frac{\partial V_F}{\partial Y}$ (Identidad de Roy). Así, la primera CPO se reexpresa como:

$$\frac{\partial W}{\partial P} = -\int_{\hat{Y}}^{\overline{Y}} x(P,T,Y)f(y)dy = -X_F$$

Desarrollando la derivada parcial de W respecto a T se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial P} &= \int_{\hat{Y}}^{\overline{Y}} \theta_F(Y)\frac{\partial V_F}{\partial T}(P,T,Y)f(Y)dy - V_F(P,T,\hat{Y})\theta_F(\hat{Y})f(\hat{Y})\hat{Y}_T + V_I(\hat{Y},h)\theta_I(\hat{Y})f(\hat{Y})\hat{Y}_T\\
&= \int_{\hat{Y}}^{\overline{Y}} \theta_F(Y)\left(-\frac{\partial V}{\partial Y}\right)f(Y)dy
\end{aligned}$$

Se debe notar que en el desarrollo de la condición de primer orden se utiliza el hecho que $\frac{\partial V_F}{\partial Y} = -\frac{\partial V_F}{\partial T}$ (Identidad de Roy). Así, la segunda CPO se reexpresa como:

$$\frac{\partial W}{\partial T} = -\int_{\hat{Y}}^{\overline{Y}} f(Y)dy = -N_F$$

Dado lo anterior, se puede reescribir las dos primeras CPO como:

$$\begin{aligned}
-X_F &= -\lambda\left[X_F + (P-c)(X_P^F + \hat{x}N_P^F) + T\ N_P^F + c\tilde{x}(\tau,t)N_P^F\right]\\
-N_F &= -\lambda\left[N_F + (P-c)(X_T^F + \hat{x}N_T^F) + TN_T^F + c\tilde{x}(\tau,t)N_T^F\right]
\end{aligned}$$

Sea $\overline{X} \coloneqq \frac{X_F}{N_F}$; $S \coloneqq X_P^F - \overline{X}X_T^F$ la ecuación de Slutsky, es decir, la integral de las derivadas de la demanda de los formales respecto a P y T de las demandas compensadas, y muestra la variación total de la demanda de los formales cuando cambian P y T y $Q \coloneqq \overline{X}N_T^F - N_P^F$. Del cociente entre las expresiones anteriores se despeja $(P-c)$ y se obtiene:

$$(P-c) = \frac{Q\,(T + c\tilde{x})}{S - \hat{x}Q}$$

Sea $cX_I + F$ el déficit en el que incurre la firma cuando tarifica con precio igual a costo marginal. La restricción presupuestaria del problema debe cumplir $cX_I + F = TN_F + EX_F$, despejando T de esta última expresión y reemplazando en la expresión para $(P - c)$ se puede expresar los óptimos P y T como en (18) y (19).

Finalmente, utilizando el Lema 3.15, se expresa (18) y (19) en términos de elasticidades, y se obtienen la expresiones (20) y (21) para la tarifa óptima en dos partes , con lo que termina la demostración. ∎

Demostración (*Proposición 3.17*):
La demostración de (i) e (ii) es directa, reemplazando la condición $\eta_{N_F} = 0$ en las ecuaciones (22) y (23) es suficiente para obtener $P = c$ y $T = \frac{(c\tilde{X}_I + F)}{N_F}$ ∎

Demostración (*Proposición 3.18*):
Si η_{N_F} no es cero, necesariamente es negativa, pues un aumento de las tarifas disminuye la cantidad de consumidores formales. Además, η_{X_F} también es negativa, pues un aumento en las tarifas disminuye la demanda compensadas de los consumidores formales. Por lo tanto, $P - c$ se mueve en la misma dirección que $(\overline{X} - \hat{x})$. $(i) - (ii)$: Se debe a la restricción de beneficio objetivo a alcanzar por la firma, además en el caso en que se tarifique con $P < c$ la firma, al ser un monopolio natural incurre en pérdidas financieras, por lo que necesariamente debe ser financiada con $T > 0$. ∎

Demostración (*Proposición 3.19*):
Partiendo de la premisa de que las elasticidades son constantes, derivando (18) respecto a η_{N_F} y a η_{X_F}, se obtiene:

$$\frac{\partial \left(\frac{EX_F}{(c\tilde{X}_I + F)} \right)}{\partial \eta_{N_F}} = \frac{\eta_{X_F} \overline{X}^2 \frac{\left(\overline{X} - \hat{x}\right)}{\hat{x}} \left(1 + \frac{c\tilde{x} N_F}{(c\tilde{X}_I + F)} \right)}{\left(\eta_{X_F} \overline{X} + \eta_{N_F} \frac{(\overline{X} - \hat{x})^2}{\hat{x}} \right)^2} < 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{EX_F}{(c\tilde{X}_I + F)} \right)}{\partial \eta_{X_F}} = \frac{-\eta_{N_F} \overline{X}^2 \frac{\left(\overline{X} - \hat{x}\right)}{\hat{x}} \left(1 + \frac{c\tilde{x} N_F}{(c\tilde{X}_I + F)} \right)}{\left(\eta_{X_F} \overline{X} + \eta_{N_F} \frac{(\overline{X} - \hat{x})^2}{\hat{x}} \right)^2} > 0 \tag{25}$$

Como se puede observar, dado que η_{X_F} y η_{N_F} son negativas, (24) también es negativa y (25) es positiva si $\overline{X} > \hat{x}$. ∎

Apéndice: Ejercicio Numérico

La solución de la tarifa en dos partes del caso 5 se basa en el método de resolución de ecuaciones no lineales "Newton Raphson". A grandes rasgos, el mismo, a partir de una conjetura inicial, itera hasta encontrar un punto en que las derivadas parciales de la función a maximizar son nulas. Se debe notar de lo anterior que para el caso de funciones no globalmente cóncavas, el método es incapaz de discriminar entre máximos globales y máximos locales. Más aún, si el óptimo del problema en cuestión no está caracterizado por la condición de igualar las derivadas parciales a cero, el método falla en identificar el óptimo. Debe notarse además que es posible alcanzar diferentes máximos locales a partir de iniciar el proceso de iteración utilizando diferentes conjeturas iniciales.

Por ejemplo, para una conjetura inicial de $P = \$640$ y $T = \$0{,}49$, la tarifa encontrada está dada por $P = \$457{,}17$ y $T = \$10{,}01$. Partiendo de una conjetura inicial distinta, $P = \$640$ y $T = \$12.000$, el algoritmo arroja la solución $P = \$322, 35$ y $T = \$11.875{,}65$. A modo de confirmación, otras conjeturas iniciales han sido consideradas. En cualquier caso, el bienestar social óptimo encontrado es menor al presentado en el caso 5 de la Tabla 1.

Un ejercicio de robustez posible consiste en considerar el valor del bienestar social óptimo para una grilla sobre los diferentes valores posibles de T. La Tabla 5 presenta dicho ejercicio:

Tabla 5:

T	P	ΔBS
0	457.28	0
10	457.17	-0.00001
100	456.13	-0.00005
1000	445.8	-0.00063
2000	434.3	-0.00119
3000	422.8	-0.00171
4000	411.3	-0.00221
5000	399.9	-0.00300
6000	388.4	-0.00345
7000	377	-0.00418
8000	365.5	-0.00458
9000	354.1	-0.00526
10000	343	-0.00687
11000	331	-0.00560
12000	320	-0.00747
13000	308	-0.00615
14000	297	-0.00797

La primera columna corresponde a valores de la licencia fijos, la segunda columna corresponde al precio óptimo, dado el valor de la licencia correspondiente como fijo. La tercera columna muestra el cambio porcentual en el bienestar social comparado al caso $T = 0$. Notar que en todos los escenarios el bienestar social es menor al caso con $T = 0$. En segundo lugar, debe notarse que el bienestar social decrece en el nivel de licencia considerado. Lo anterior es consistente con la argumentación de que la tarifa en dos partes óptima en presencia de evasión coincide con la tarifa uniforme en precio óptima del caso 3 de la Tabla 1. El hecho de que el método Newton Raphson no identifique el máximo global se debe, como se explicó anteriormente, a que éste no es un punto estacionario cuando se considera el bienestar social como función de P, T.

Si bien el ejercicio anterior habla a favor de la primera argumentación, el mismo no constituye una demostración formal, de modo que se toma éste resultado con cuidado. Considerar particiones de T más finas y de mayor rango naturalmente arrojarán resultados más precisos.

Referencias

Barabino, B., Salis, S., and Useli, B. (2013). A modified model to curb fare evasion and enforce compliance: Empirical evidence and implications. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 58:29–39.

Barabino, B., Salis, S., and Useli, B. (2015). What are the determinants in making people free riders in proof-of-payment transit systems? evidence from italy. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 80:184–196.

Batarce, M. (2016). Estimation of urban bus transit marginal cost without cost data. *Transportation Research Part B: Methodological*, 90:241–262.

Boyd, C., Martini, C., Rickard, J., and Russell, A. (1989). Fare evasion and non-compliance: A simple model. *Journal of Transport Economics and Policy*, pages 189–197.

Bucciol, A., Landini, F., and Piovesan, M. (2013). Unethical behavior in the field: Demographic characteristics and beliefs of the cheater. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 93:248–257.

Calvo Cortés-Monroy, M. F. (2015). Análisis desagregado del comportamiento de usuarios de transporte público utilizando datos masivos. *Memoria de título, Universidad de Chile.*

Carbajo, J. C. (1988). The economics of travel passes: non-uniform pricing in transport. *Journal of Transport Economics and Policy*, pages 153–173.

De Borger, B., Mayeres, I., Proost, S., and Wouters, S. (1996). Optimal pricing of urban passenger transport: a simulation exercise for belgium. *Journal of transport economics and policy*, pages 31–54.

Feldstein, M. S. (1972). Equity and efficiency in public sector pricing: the optimal two-part tariff. *The Quarterly Journal of Economics*, pages 176–187.

Guarda, P., Galilea, P., Paget-Seekins, L., and de Dios Ortúzar, J. (2016). What is behind fare evasion in urban bus systems? an econometric approach. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 84:55–71.

Jansson, J. O. (1979). Marginal cost pricing of scheduled transport services: a development and generalisation of turvey and mohring's theory of optimal bus fares. *Journal of Transport Economics and Policy*, pages 268–294.

Jansson, K. (1993). Optimal public transport price and service frequency. *Journal of Transport Economics and Policy*, pages 33–50.

Kooreman, P. (1993). Fare evasion as a result of expected utility maximisation: some empirical support. *Journal of Transport Economics and Policy*, pages 69–74.

Mohring, H. (1972). Optimization and scale economies in urban bus transportation. *The American Economic Review*, 62(4):591–604.

Negishi, T. (1960). Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy. *Metroeconomica*, 12(2-3):92–97.

Ng, Y.-K. and Weisser, M. (1974). Optimal pricing with a budget constraint–the case of the two-part tariff. *The Review of Economic Studies*, 41(3):337–345.

Oi, W. Y. (1971). A disneyland dilemma: Two-part tariffs for a mickey mouse monopoly. *The Quarterly Journal of Economics*, 85(1):77–96.

Parry, I. W. and Small, K. A. (2009). Should urban transit subsidies be reduced? *The American Economic Review*, 99(3):700–724.

Polinsky, A. M. and Shavell, S. (1979). The optimal tradeoff between the probability and magnitude of fines. *The American Economic Review*, 69(5):880–891.

Reddy, A., Kuhls, J., and Lu, A. (2011). Measuring and controlling subway fare evasion: improving safety and security at new york city transit authority. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, (2216):85–99.

Tirachini, A. and Hensher, D. A. (2012). Multimodal transport pricing: first best, second best and extensions to non-motorized transport. *Transport Reviews*, 32(2):181–202.

Tirole, J. (1988). *The theory of industrial organization*. MIT press.

Turvey, R. and Mohring, H. (1975). Optimal bus fares. *Journal of Transport Economics and Policy*, pages 280–286.