INSTITUTO DE ECONOMÍA

TESIS de MAGÍSTER

2017

Tarificación del transporte urbano y sus consecuencias en el mercado laboral

Nicolás Bozzo

www.economia.puc.cl

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

TESIS DE GRADO
MAGISTER EN ECONOMIA

Bozzo, Galleguillos, Nicolás Ignacio

Julio, 2017

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

Tarificación del transporte urbano y sus consecuencias en el mercado laboral

Nicolás Ignacio Bozzo Galleguillos

Comisión

Martín Besfamille, Francisco Silva y Hugo Silva

Santiago, Julio de 2017

Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Economía - Tesis de Magíster
Comisión: Martin Besfamille, Francisco Silva y Hugo Silva.
Tesista: Nicolás Bozzo
22 de Junio de 2017

Tarificación del transporte urbano y sus consecuencias en el mercado laboral*

Resumen

La literatura clásica de transporte argumenta que la provisión del transporte público debe ser subsidiada y la congestión del transporte privado, tarificada. Sin embargo, ignora los efectos que esto podría tener en el mercado laboral. Este trabajo crea un modelo con oferta laboral endógena, para así analizar los efectos que tiene la tarificación del transporte urbano sobre el mercado laboral y sus consecuencias en el bienestar de los individuos. El principal resultado es que aún si no se pueden cobrar impuestos por congestión el primer mejor puede ser descentralizado subsidiando el uso del transporte público, cobrando impuestos al trabajo y entregando transferencias de suma fija (las cuales pueden ser negativas significando así un impuesto de suma fija). Sin embargo, en caso de que el gobierno incurra en un gasto exógeno, el primer mejor no podrá ser descentralizado. En dicho caso, se plantea el sistema impositivo óptimo y aunque éste no tiene una solución analítica, se argumenta con un ejemplo numérico que para cubrir este gasto, existen tres posibilidades (con respecto al primer mejor): aumentar el impuesto de suma fija, aumentar los impuestos por congestión y disminuir los subsidios al transporte público, o bien, aumentar los impuestos al trabajo y reducir el subsidio al transporte público. Esta última alternativa es de especial interés, ya que, en la práctica se observa que los impuestos por congestión son difíciles de implementar.

*Trabajo realizado en el seminario de tesis de microeconomía, Instituto de Economía, Pontificia Universidad Católica de Chile. Quiero agradecer al Centro de Desarrollo Urbano Sustentable (CONICYT/FONDAP/15110020) y al BRT+ Centre of Excelence. Adémas, a Hugo Silva por su continuo acompañamiento y guía especialmente desde la economía de transporte, a Martin Besfamille por aportar su perspectiva desde la economía pública y a Francisco Silva por sus criticas y recomendaciones. A su vez agradezco a Nicolás Pastrián quien me ayudo a traspasar mis ideas a códigos en MatLab, y a mi familia y amigos por su incondicional apoyo. Todos los errores son de mi responsabilidad, email: nibozzo@uc.cl

1 Motivación

Estudios empíricos han mostrado que los costos de viaje afectan las decisiones laborales de las personas. Esto se debe a que en general éstas deben trasladarse a sus lugares de trabajo, y un aumento en los costos de viajar (por ejemplo mayor tiempo de viaje) reduce el atractivo de ir a trabajar con respecto a la opción de disfrutar de mayor ocio (pero con menos consumo).

Algunos ejemplos de estos estudios son Black et.al (2014) y Anderstig et.al (2016). El primero, muestra cómo las distintas participaciones laborales de mujeres en Estados Unidos pueden ser explicadas por las diferencias en los tiempos de viaje al trabajo (ciudades más congestionadas tienen menor participación laboral femenina). El segundo, estima que los impuestos por congestión de la ciudad de Estocolmo generaron un efecto positivo en la oferta laboral, ya que, aunque aumentó el costo monetario de ir a trabajar en transporte privado, se redujo el costo en tiempo.

En base a esta evidencia empírica se nota que la interacción entre trabajo y transporte no es insignificante; por lo tanto, un correcto análisis del sistema impositivo del transporte debe incluir los efectos que esto genera en el mercado laboral.

Sin tomar en consideración lo anterior, la literatura clásica de transporte ha argumentado que el uso del transporte público debe ser subsidiado y el transporte privado, tarificado. Esto se debe principalmente a la lógica de que un mayor número de usuarios en el primero hace aumentar su frecuencia, reduciendo así el tiempo de viaje (Efecto Mohring[1]), mientras que en el segundo genera congestión, y por consiguiente un mayor tiempo de viaje. Es decir, si se quiere representar los tiempo de viaje con una función, se observa que en el transporte público dicha función es decreciente en el número de usuarios, mientras que en el transporte privado es creciente en el número de usuarios. Los agentes no toman en cuenta estos efectos, dando origen a externalidades positivas y negativas respectivamente.

Además de la forma de la función de tiempos de viaje en cada modo, se han dado los siguientes argumentos adicionales en favor de los subsidios al transporte público:[2]

1. Función de producción del operador con rendimientos crecientes a escala. (Monopolio Natural)

2. La dificultad técnica en la implementación de impuestos por congestión.

Con respecto al primer argumento, se ha establecido que la función de costos del operador es cóncava y con forma de "U". Esto genera que para niveles bajos de provisión el costo marginal esté debajo del costo medio, provocando que en el óptimo el operador tendrá pérdidas. Luego, para que dicho óptimo sea implementado se debe entregar un monto fijo al operador de manera que éste decida entregar el servicio. Sin embargo, la evidencia empírica para este argumento es débil y escasa. Por ello no será incluido en este trabajo.

El segundo argumento tiene que ver con que para poder implementar impuestos por congestión es necesario crear tecnologías que midan el tiempo de viaje de cada usuario y su contribución marginal a la congestión; esto en la práctica significa tener que hacer un seguimiento a cada usuario, lo cual, es difícil de implementar. Si bien, han existido soluciones alternativas que han resultado exitosas, como por ejemplo, tarificación por cordón[3]; éstas no han sido políticamente muy populares pre-implementación resultando en que pocas ciudades del mundo las hayan adoptado. Luego, una manera de reducir el número de usuarios del transporte privado es haciendo más atractiva su alternativa: el transporte público[4]. Una manera de lograrlo es subsidiando dicho modo, lo cual es una práctica común en la mayoría de las grandes ciudades del mundo.

[1] Mohring (1972) muestra que al tomar en cuenta los costos de los usuarios la función de costos del transporte público es decreciente; esto se debe a que el operador del servicio ajusta óptimamente su provisión resultando en una mayor frecuencia y que por consiguiente disminuyan los tiempos de espera.

[2] Para un buen resumen de estos argumentos ver Elgar & Kennedy (2005).

[3] Una de las ciudades en donde esto se ha aplicado con éxito es Estocolmo, Suecia. Par un buen análisis de esta política y su aceptabilidad ver Börjesson el.al (2012)

[4] Ver Basso & Jara-Díaz (2012)

Todo lo anterior ha sido resultado de modelos tanto teóricos como empíricos, que ignoran los efectos del transporte en el mercado laboral; sin embargo, estos resultados pueden verse afectados al incluir a dicho mercado, ya que:

a. Disminuir los costos de los usuarios (tiempo de viaje) no sólo disminuye la des-utilidad que les provoca viajar, sino que también esto puede tener un efecto en la decisión de cuanto trabajar.

b. Los fondos necesarios para el subsidio deben ser obtenidos de alguna forma. En un mundo de segundo mejor, donde el planificador no tiene a su disposición transferencias de suma fija, la obtención de dichos fondos podría generar otras distorsiones en la economía. Por ejemplo, si se financian con impuestos al trabajo esto distorsionará la decisión ocio/consumo óptima.

Intuitivamente, estas dos consideraciones deberían ir en sentidos opuestos. Por un lado, en caso de que en equilibrio los usuarios trabajen una cantidad sub-óptima (por ejemplo, debido a la presencia de impuestos al trabajo), el disminuir los tiempos de viaje vía subsidios al transporte podría aliviar esta distorsión, ya que, disminuye los costos asociados a ir a trabajar. Por otro lado, si los fondos necesarios para poder implementar dicho subsidio son financiados con impuestos al trabajo, entonces los beneficios de la política se verán aminorados por la pérdida de bienestar ocurrida por el alza de los impuestos al trabajo.

Con todo lo anterior, los argumentos clásicos de la literatura de transporte deben ser extendidos a un modelo con oferta laboral endógena, en donde los resultados clásicos podrían no sostenerse. Es por ello que el objetivo de este trabajo es tomar en cuenta la interacción del transporte con la oferta laboral para así encontrar la tarificación óptima del transporte urbano.

Esta no es la primera contribución a la literatura en este tema. El artículo relacionado más cercano que se ha publicado con respecto a esta interacción es Parry & Bento (2001). En él los autores crean un modelo basado en un agente representativo que para ir a trabajar debe tomar algún medio de transporte. En él buscan evaluar la interacción de los impuestos por congestión y otros impuestos en la economía obteniendo que en el caso en que los impuestos por congestión sean utilizados para disminuir los impuestos al trabajo[5], se crea un doble dividendo en términos de bienestar: por un lado, se reduce la congestión, y por otro, se incentiva el trabajo. Otros artículos relacionados son: Van Dender (2003), De Palma & Lindsey (2004), Gutiérrez-i-Puigarnau & Ommeren (2009), Hirte & Tscharaktschiew (2015) y Russo (2015).

Van Dender (2003), De Palma & Lindsey (2004) y Russo (2015) crean modelos de transporte con interacción al trabajo similares al desarrollado por Parry & Bento (2001). El primero extiende el modelo hacia uno en donde no sólo existen viajes al trabajo, sino que también, viajes de placer. Si bien no llega a una solución analítica, muestra con simulaciones numéricas que si es que se pudieran llevar a cabo impuestos por congestión diferenciados por motivo de viaje, el óptimo será cobrar más por viajes de placer y menos por viajes laborales para así no distorsionar el mercado laboral. La segunda extensión, llevada a cabo por De Palma & Lindsey (2004), toma en cuenta que existe heterogeneidad en los agentes; con ello, argumentan que en caso de que se puedan hacer transferencias de suma fija diferenciadas para cada tipo de agente, se puede alcanzar el primer mejor con impuestos que cubran el costo marginal externo de cada tipo aún cuando los impuestos al trabajo sean independientes del tipo. Por último, la contribución de Russo (2015) consiste en que cuando el planificador social no es capaz de observar la habilidad de los agentes, el poder cobrar impuestos por congestión ayuda a identificar a aquellos individuos de mayor habilidad (los cuales tendrán un mayor valor del tiempo) y, por lo tanto, permite aumentar el impuesto agregado a dicho tipo sin que ellos eludan el impuesto haciéndose pasar por individuos de baja habilidad. .

Otra discusión que surge a partir del artículo de Parry & Bento (2001), es sobre si las personas escogen cuántos días trabajar, o bien cuántas horas trabajar en un día. Gutiérrez-i-Puigarnau & Ommeren (2009),

[5] En su modelo los autores suponen que el gobierno desea entregar una transferencia exógena financiada con impuestos.

explican con un modelo teórico como, en el caso en que los agentes escogen tanto los días como las horas a trabajar, los efectos de los impuestos por congestión sobre la oferta laboral pueden tener ser ambiguos. Esto se produce porque para poder reducir los costos de transporte es posible disminuir los días a trabajar (efecto negativo sobre la oferta laboral), pero al mismo tiempo aumentar las horas a trabajar en un día (efecto positivo sobre las oferta laboral), provocando así un efecto ambiguo. Sin embargo, Hirte & Tscharaktschiew (2015) muestran, con simulaciones numéricas, como en el caso de los impuestos por congestión es preferible asumir que la jornada laboral esté fija y no la cantidad de días a trabajar, esto porque con el número de horas fijas el resultado se aproxima bastante a uno en donde están tanto las horas como los días son variables.

Sin embargo, es importante señalar que ninguna de las contribuciones anteriormente señaladas ha modelado el transporte público como tal. Sino que más bien, han supuesto que éste es una alternativa con un costo de uso fijo e independiente de la cantidad de usuarios, es decir, han ignorado la existencia del efecto Mohring.[6] Por ello, el aporte de este trabajo es extender el modelo de Parry & Bento (2001) considerando la existencia de este fenómeno. Además, a diferencia de ellos, primero el foco estará en encontrar el primer mejor y como des-centralizarlo, para luego analizar distintos escenarios de segundo mejor, como por ejemplo, uno en donde no sea posible cobrar impuestos de suma fija. En la modelación los agentes serán capaces de escoger sólo cuántos días trabajar, mas no cuántas horas trabajar en un día. Con esto, el problema se simplifica considerablemente, pero los resultados no se deberían ver afectados significativamente (como argumentan Hirte & Tscharatschiew (2015)).

La siguiente tabla resume el posicionamiento de este trabajo con respecto a la literatura:

Autores	E.Mohring	Trabajo	Imp. Congestión	Subsidios	Decisión laboral
Parry & Bento (2001)	No	Sí	Sí	No	Días
De Palma & Lindsey (2004)	No	Sí	Sí	No	Horas
Van Dender (2003)	No	Sí	Si	No	Días
Hirte & Tscharaktschiew (2015)	No	Sí	Sí	No	Días/Horas
Gutiérrez-i-Puigarnau & Ommeren (2009)	No	Sí	Sí	No	Días/Horas
Russo (2015)	No	Sí	Sí	No	Días/Horas
Mi Propuesta	Sí	Sí	Sí/No	Sí/No	Días

Tabla 1: Posicionamiento en literatura

En síntesis, en un escenario con externalidades en cada modo de transporte (incluida la externalidad positiva en el transporte público) e interacción entre las decisiones laborales y el sistema de transporte, se busca la forma óptima de un sistema impositivo que incluye impuestos por congestión, subsidios al transporte público, impuestos al trabajo y transferencias de suma fija. Para ello, se crea un modelo similar al de Parry & Bento (2001), en donde, las decisiones laborales de los agentes son endógenas, pero a diferencia de ellos, el foco está tanto en el primer como en el segundo mejor y en la posibilidad de subsidiar el modo de transporte público.

2 Modelo Propuesto

2.1 Descripción del modelo y metodología

La población está compuesta por un continuo homogéneo de agentes de masa 1 que son personificados en un agente representativo[7]. Este agente obtiene utilidad a partir del ocio y el consumo. Para poder consumir

[6] Mohring, H. (1972), *Optimization and scale economies in urban bus transportation.* The American Economic Review 62(4), 591-604.

[7] La continuidad y masa 1 de consumidores es un supuesto que permite que las acciones de cualquier agente de esta economía sean iguales a las acciones que toma el agente promedio y, por tanto, igual también a la que lleva a cabo el agente representativo

necesita trabajar, lo cual requiere tiempo y viajes al trabajo, por lo tanto, le genera des-utilidad. Dichos viajes los puede hacer en alguno de los dos modos de transporte disponibles: privado o público. El transporte privado presenta congestión, es decir, cada viaje extra genera que el tiempo promedio de viaje aumente. En cambio, el tiempo de viaje en el transporte público es decreciente en el número de viajes que se tomen.

Su actuar libre presenta distorsiones, ya que, al estar representando a un número infinito de agentes no coordinados, no internaliza por sí sólo los efectos de un viaje extra en el tiempo promedio de cada medio de transporte, sino que, asume que los tiempos de viajes en cada modo son constantes.

Por parte del gobierno, se analizan dos escenarios:

(1) Es capaz de obligar a los agentes a hacer lo que considere óptimo sujeto a las restricciones de recursos.

(2) No es capaz de obligar a los agentes, pero puede hacer uso de instrumentos fiscales para poder incentivar a los agentes a tomar las decisiones que él considere óptimas.

Obviamente si en el primer caso el objetivo del gobierno es maximizar la utilidad de los agentes, el resultado obtenido es el primer mejor. Luego, una pregunta interesante de responder es si es que el gobierno puede descentralizar dicho resultado en una situación como la segunda, es decir, en donde, puede incentivar a los agentes, pero no obligarlos. En particular los instrumentos que puede utilizar son: impuestos lineales al trabajo, impuestos por congestión, subsidios al transporte público y transferencias de suma fija.

Posteriormente se agregan algunas restricciones sobre los instrumentos y se analiza cuáles aún permiten descentralizar el primer mejor. Una vez identificadas las restricciones que impiden la des-centralización se procede a encontrar el segundo mejor.

En particular, existen dos restricciones que son interesantes de analizar. En primer lugar, la literatura del segundo mejor hace la crítica de que las transferencias de suma fija son, en general, difíciles de implementar cuando suponen quitar recursos a los consumidores (en cuyo caso son más bien impuestos de suma fija). De esta manera, en caso de que el gobierno posea necesidades exógenas de financiamiento, éstas generan efectos en el bienestar de los consumidores. Es por ello que una de las restricciones que se abordan en este trabajo es restringir a que dichas transferencias sean mayores que cero y que el gobierno necesite de recursos extra. En segundo lugar, en la práctica observamos que en la gran mayoría de las grandes ciudades del mundo no se ha podido aplicar eficazmente impuestos por congestión. Esto se debe, en parte, a que la tecnología necesaria para poder ponerlos en funcionamiento no es fácil de implementar, y en parte, a su aceptabilidad política. Así la segunda restricción que se impone es la no implementabilidad de impuestos por congestión.

2.2 Planteamiento del Modelo

A continuación se describen básicamente las partes del modelo.

2.2.1 Consumidores

Se asume que existe un grupo homogéneo, continuo y de masa 1 de consumidores personificados en un agente representativo con una función de utilidad del tipo:

$$U = u(C, N) + T(R, P)$$

en donde,

C:	Consumo	R:	Número de viajes en transporte privado
N:	Ocio	P:	Número de viajes en transporte público

Así la función $u(C,N)$ es una función que representa la utilidad que obtiene el agente por el consumo de bienes y ocio. Se supone que dicha función es continua, creciente en cada uno de sus argumentos, diferenciable y cóncava. Por otro lado, la función $T(R,P)$ representa la utilidad generada al viajar. Dicha función es de valor negativo, continua, decreciente en cada uno de sus argumentos, diferenciable y cóncava.

La función de utilidad es separable entre ocio/consumo y transporte, para representar que no existe efecto sustitución entre el transporte y los otros bienes, es decir, no existe una interacción entre dichos bienes (males).

El agente representativo maximiza su función de utilidad sujeto a las siguientes restricciones:

$$\overline{L} = L + N + \pi R + \phi P \tag{RT}$$

$$G + (1-t)L = C + \tau R + sP \tag{RP}$$

$$L = R + P \tag{OT}$$

en donde,

$\overline{L}$:	Dotación de tiempo	L:	Oferta de trabajo
π:	Tiempo de viaje en transporte privado	ϕ:	Tiempo de viaje en transporte público
G:	Transferencia de suma fija	t:	Impuesto lineal al trabajo
τ:	Impuesto por congestión	s:	Impuesto (subsidio) al transporte público

Donde (RP) es la restricción presupuestaria y establece que el gasto en consumo e impuestos en cada modo no puede superar el ingreso neto laboral más las transferencias de gobierno; (RT) es la restricción de tiempo y describe que la suma del tiempo en el trabajo más el tiempo de viaje y ocio no puede superar la dotación total de tiempo; por ultimo, (OT) es la oferta laboral, en donde se ha supuesto que para ir a trabajar se debe viajar en alguno de los dos modos, siendo éste el único motivo de viaje. Cabe señalar que se han hecho tres normalizaciones: una unidad de trabajo equivale a un día trabajado, el precio del consumo es igual a 1 y la tasa salarial bruta es también igual a 1.

2.2.2 Gobierno

Existe un gobierno dirigido por un planificador benevolente que maximiza la función de utilidad del agente representativo. En caso en que pueda obligar a los agentes a hacer lo que le parezca, sus únicas restricciones son la restricción de recursos y la restricción de tiempo:

$$C = L \tag{RR}$$

$$\overline{L} = L + N + \pi R + \phi P \tag{RT}$$

En cambio, en el caso en que sólo pueda usar instrumentos para poder incentivar al agente en una u otra dirección, tiene además una restricción fiscal

$$\Delta + G = tL + \tau R + sP \tag{RF}$$

donde Δ es un gasto exógeno que debe financiar. Por supuesto, su objetivo es maximizar la función de utilidad indirecta del agente ocupando los instrumentos a disposición. Con ello busca cambiar las elecciones del consumidor en una manera conveniente, y además recaudar los fondos que sean necesarios.

2.2.3 Transporte

El tiempo que toma viajar en transporte privado al trabajo es una función del número total de usuarios de dicho modo, es decir,

$$\pi = \pi(R)$$

en donde $\pi'(R) > 0$ y $\pi''(R) > 0$[8]. Sin embargo, el agente no internaliza esto y asume π es exógeno al uso que él le dé al transporte privado.

Por otro lado, el tiempo necesario para ir a trabajar en transporte público se divide en dos partes:

$$\phi = \phi(P) = \phi_0 + \phi_1(P)$$

en donde ϕ_0 representa el tiempo en movimiento (el cual es independiente del número de usuarios) y $\phi_1(P)$ es una función que representa el tiempo de espera, la cual es decreciente y convexa en el número de usuarios que tomen este medio de transporte, con ello $\phi'(P) < 0$ y $\phi''(P) > 0$ [9]. Esta es la forma en que se incluye el efecto Mohring. Una manera simple de entenderlo es pensar en que los trenes de metro tienen todos una capacidad fija, a medida que más usuarios quieran ocupar el metro, ya no cabrán en un sólo tren, por lo cual, será necesario instalar un nuevo tren, como ahora habrán dos trenes la frecuencia aumenta y, por lo tanto, los tiempos de espera disminuyen. Sin embargo, al igual que en el transporte privado, los usuarios ignoran esto y suponen que el tiempo de espera es exógeno a sus decisiones.

2.2.4 Equilibrio

Si bien para los usuarios π y ϕ son parámetros exógenos, esto no es así para la modelación del sistema, ya que, se ha supuesto que las demoras y la congestión dependen del número de usuarios. Luego, si se define $\hat{R}$ y $\hat{P}$ como las elecciones del agente, tendremos que en equilibrio debe ser cierto que:

$$\hat{\pi} = \pi(\hat{R}(\hat{\pi})) \qquad \hat{\phi} = \phi(\hat{P}(\hat{\phi})) \tag{EQ}$$

2.2.5 Firmas

Para evitar la discusión sobre equidad y sobre quién es dueño de las firmas se asume que tanto los bienes de consumo como la provisión del transporte público son generados por firmas con tecnologías de producción con retornos constantes a escala.

3 Primer mejor y su des-centralización

3.1 Descripción del primer mejor

El problema de primer mejor es:

[8] Notación: $\pi'(R) = \dfrac{\partial \pi(R)}{\partial R}$ y $\pi''(R) = \dfrac{\partial^2 \pi(R)}{\partial R^2}$

[9] Notación: $\phi'(P) = \dfrac{\partial \phi(P)}{\partial P}$ y $\phi''(P) = \dfrac{\partial^2 \phi(P)}{\partial P^2}$.

$$\max_{C,N,R,P} u(C,N) + T(R,P)$$

s.a

$$\overline{L} = L + N + \pi R + \phi P \tag{RT}$$

$$L = C \tag{RR}$$

$$L = R + P \tag{OT}$$

El lagrangiano asociado a dicha maximización es:

$$\mathcal{L} : u(C,N) + T(R,P) + \lambda_1 \left(\overline{L} - N - (1+\pi)R - (1+\phi)P\right) + \lambda_2(R + P - C)$$

y las condiciones de primer orden para una solución interior:[10]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} : u_c - \lambda_2 = 0 \tag{P1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} : u_n - \lambda_1 = 0 \tag{P2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} : T_r - \lambda_1 \left((1+\pi) + \pi' R\right) + \lambda_2 = 0 \tag{P3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} : T_p - \lambda_1 \left((1+\phi) + \phi' P\right) + \lambda_2 = 0 \tag{P4}$$

De las condiciones de primer orden antes descritas se obtiene lo siguiente:

$$1 = \frac{u_n}{u_c}(1+\pi) + \frac{u_n}{u_c}\pi' R - \frac{T_r}{u_c} \tag{P3'}$$

$$1 = \frac{u_n}{u_c}(1+\phi) + \frac{u_n}{u_c}\phi' P - \frac{T_p}{u_c} \tag{P4'}$$

El costado izquierdo de ambas ecuaciones es el beneficio marginal de trabajar un día extra (recordar que el salario bruto está normalizado a 1), mientras que el costado derecho es el costo marginal social de ir a trabajar un día extra en cada modo respectivamente. Dicho costo marginal esta compuesto por (de izquierda a derecha):

- El valor del tiempo gastado en el trabajo (1) más el tiempo necesario para llegar al lugar de trabajo (π o ϕ según corresponda).
- El valor del tiempo extra que genera un usuario adicional en cada modo.
- Por último el costo en malestar marginal (T_i) de tener que viajar un día extra.

De las dos condiciones anteriormente mencionadas más la restricción de recursos, la restricción de tiempo y la oferta laboral, se obtiene cual es el número de días que debe trabajar óptimamente el agente representativo y la proporción de viajes en cada modo, es decir, con ello se determina: "la proporción ocio-consumo óptima" y la "distribución modal óptima".

Ahora, para su mejor interpretación (P3') y (P4') se pueden combinar de la siguiente manera:

$$\underbrace{\frac{u_n}{u_c}(1+\pi) + \frac{u_n}{u_c}\pi' R - \frac{T_r}{u_c}}_{\text{Costo marginal social transporte privado}} = \underbrace{\frac{u_n}{u_c}(1+\phi) + \frac{u_n}{u_c}\phi' P - \frac{T_p}{u_c}}_{\text{Costo marginal social transporte público}} \tag{O.I}$$

[10] Este trabajo asume siempre que el óptimo es una solución interior (las condiciones para que ello ocurra pueden ser encontradas en el apéndice). Además, como se muestra en el apéndice, las condiciones suficientes de segundo orden para una maximización se cumplen siempre que ϕ sea decreciente, convexa y satisfaga que $|\phi'' P| > |2\phi|'$ y que π sea creciente y convexa.

Ello dice que la distribución modal óptima es aquella en donde se iguala el costo marginal social de cada modo.

Todo lo anterior describe el primer mejor.

En resumen, el óptimo de primer mejor es un set $\Omega^* = \{R^*, P^*, L^*, C^*, N^*\}$, tal que, se cumplen (P3'), (P4'), (O.T), (RT) y (RR)

3.2 Elecciones del agente

El agente representativo asume que ϕ y π son exógenos, es decir, que sus decisiones de (P, R) no afectan los tiempos de viaje. Así el problema de maximización del agente es:

$$\max_{C,N,R,P} u(C, N) + T(R, P)$$

s.a

$$\overline{L} = L + N + \pi R + \phi P \tag{RT}$$

$$G + L(1-t) = C + \tau R + sP \tag{RP}$$

$$L = R + P \tag{OT}$$

El lagrangiano asociado al problema del agente es:

$$\mathcal{L} : u(C, N) + T(R, P) + \gamma_1 \left(\overline{L} - N - (1+\pi)R - (1+\phi)P\right) + \gamma_2 \left((1-t)(R+P) + G - C - \tau R - sP\right)$$

Las condiciones de primer orden para una solución interior de dicho problema son:[11]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} : u_c - \gamma_2 = 0 \tag{C1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} : u_n - \gamma_1 = 0 \tag{C2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} : T_r - \gamma_1 \left((1+\pi)\right) + \gamma_2 \left((1-t) - \tau\right) = 0 \tag{C3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} : T_p - \gamma_1 \left((1+\phi)\right) + \gamma_2 \left((1-t) - s\right) = 0 \tag{C4}$$

De las condiciones de primer orden anteriormente descritas se obtiene lo siguiente:

$$(1-t) = \frac{u_n}{u_c}(1+\pi) + \tau - \frac{T_r}{u_c} \tag{C3'}$$

$$(1-t) = \frac{u_n}{u_c}(1+\phi) + s - \frac{T_p}{u_c} \tag{C4'}$$

Esto establece que el beneficio marginal neto de impuestos de trabajar un día extra $(1-t)$ (salario neto de impuestos) en cada modo debe ser igual al costo marginal privado de ir a trabajar en dicho modo. Dicho costo marginal incorpora los mismos componentes que el costo marginal social, salvo que en vez de considerar

[11] Nótese nuevamente que, al igual que en el problema del primer mejor, se supone que la función objetivo es la suma de dos funciones cóncavas, pero en este caso como π y ϕ son exógenos para el consumidor, las restricciones son lineales y, por lo tanto, el dominio de la maximización es un conjunto convexo, de esta manera, se cumplen las condiciones de segundo orden. Por otra parte, la existencia de soluciones esquinas dependerá de las formas funcionales de $U(C, N)$ y $T(R, P)$.

el costo en tiempo extra que genera un usuario adicional en cada modo, incorpora el costo monetario de viajar en cada modo (τ o s respectivamente). Con ello más las restricción presupuestaria, la restricción de tiempo y las condiciones de equilibrio, se obtiene cuántos días escoge trabajar el agente representativo y la proporción de viajes que toma en cada modo, es decir, se obtiene tanto "la proporción ocio-consumo de equilibrio" como "la distribución modal de equilibrio"

Al igual que como se hizo con (P3') y (P4'), se pueden combinar (C3') y (C4') para obtener:

$$\underbrace{\frac{u_n}{u_c}(1+\pi)+\tau-\frac{T_r}{u_c}}_{\text{Costo marginal privado transporte privado}} = \underbrace{\frac{u_n}{u_c}(1+\phi)+s-\frac{T_p}{u_c}}_{\text{Costo marginal privado transporte público}} \tag{E.I}$$

Así esto se puede interpretar como que la elección modal del agente es aquella en donde se iguala el costo marginal privado de ir a trabajar en cada modo.

Hay que considerar que, en un escenario sin regulación (donde $t=0$, $\tau=0$ y $s=0$) el beneficio marginal de ir a trabajar en cada modo será igual al de primer mejor, sin embargo, el costo marginal privado de ir a trabajar en transporte privado será menor que el costo marginal social de ir a trabajar en dicho modo. En cambio, para el transporte público es exactamente lo opuesto. De esta manera, es de esperar que en un escenario sin regulación la distribución modal sea más intensiva en transporte privado que en el óptimo. No obstante, no se puede concluir que sin regulación el número total de viajes (que es lo mismo que la oferta laboral) sea mayor o menor que en el primer mejor, ya que, si bien es de esperar que existan mayores viajes en transporte privado, también es de esperar que existan menos viajes en transporte público.

> En resumen, la elección del agente es un set $\hat{\Omega}=\left\{\hat{R},\hat{P},\hat{L},\hat{C},\hat{N}\right\}$, tal que se cumplen (C3'), (C4') ,(O.T), (RT) y (RP)

3.3 Descentralizando el primer mejor

En esta sección se demuestra que un regulador que quiera descentralizar el primer mejor deberá implementar un sistema impositivo $B^*=\{G^*,\tau^*,s^*,t^*\}$ tal que:

$$t^*+\tau^* = \frac{u_n}{u_c}\pi' R\bigg|_{\Omega^*} \tag{\#1τ}$$

$$t^*+s^* = \frac{u_n}{u_c}\phi' P\bigg|_{\Omega^*} \tag{\#1s}$$

$$G^* = \frac{u_n}{u_c}\phi' P^2\bigg|_{\Omega^*} + \frac{u_n}{u_c}\pi' R^2\bigg|_{\Omega^*} \tag{\#2}$$

De modo tal que la elección del agente sea el argumento máximo de su función de utilidad sujeto a la restricción de recursos y tiempo.

$$\hat{\Omega} \quad = \quad \Omega^*$$

es decir, que en equilibrio la elección del agente sea el primer mejor. Obviamente, para que ello ocurra debe ser cierto que los tiempos de traslado en cada medio de transporte estén fijos en:

$$\pi=\pi(R^*) \qquad\qquad \phi=\phi(P^*)$$

y que además se cumpla que evaluado en Ω^*:

$$\overline{L} - N - (1+\pi)R - (1+\phi)P = 0 \tag{RT}$$

$$(1-t)L + G - C - \tau R - sP = 0 \tag{RP}$$

$$G = \tau R + sP + tL \tag{RF1}$$

$$L = C \tag{RR}$$

3.3.1 Internalización del costo (beneficio) marginal externo en cada modo

Se nota de (P3') y (P4') que en el primer mejor el costo marginal social de cada modo es igual al beneficio marginal social de ir a trabajar, el cual, dada la normalización del problema es igual a 1. Luego para que la oferta laboral del agente sea la misma que la de primer mejor, es necesario que se ajusten óptimamente los impuestos de manera que se internalice el costo marginal externo del transporte privado y el beneficio marginal externo del transporte público.

A continuación se demuestra que si $t^* + \tau^* = \frac{u_n}{u_c}\pi' R$ y $t^* + s = \frac{u_n}{u_c}\phi' P$ se logra descentralizar el primer mejor.

$$1 = \frac{u_n}{u_c}(1+\pi) + \frac{u_n}{u_c}\pi' R - \frac{T_r}{u_c} \tag{P3'}$$

$$1 = \frac{u_n}{u_c}(1+\phi) + \frac{u_n}{u_c}\phi' P - \frac{T_p}{u_c} \tag{P4'}$$

Lo cual se puede reescribir como:

$$1 - \frac{u_n}{u_c}(1+\pi) + \frac{T_r}{u_c} = \frac{u_n}{u_c}\pi' R \tag{P3''}$$

$$1 - \frac{u_n}{u_c}(1+\phi) + \frac{T_p}{u_n} = \frac{u_n}{u_c}\phi' P \tag{P4''}$$

Pero, para que esto sea implementable, debe ser cierto que el agente lo escoge, lo cual ocurre siempre y cuando:

$$(1-t) = \frac{u_n}{u_c}(1+\pi) + \tau - \frac{T_r}{u_c} \tag{C3'}$$

$$(1-t) = \frac{u_n}{u_c}(1+\phi) + s - \frac{T_p}{u_c} \tag{C4'}$$

Ello es lo mismo que:

$$\left(1 - \frac{u_n}{u_c}(1+\pi) + \frac{T_r}{u_c}\right) = t + \tau \tag{C3''}$$

$$\left(1 - \frac{u_n}{u_c}(1+\phi) + \frac{T_p}{u_c}\right) = t + s \tag{C4''}$$

Finalmente, los impuestos óptimos en cada modo de transporte son tales que:

$$t^* + \tau^* = \frac{u_n}{u_c}\pi' R\bigg|_{\Omega^*} \tag{\#1τ}$$

$$t^* + s^* = \frac{u_n}{u_c}\phi' P\bigg|_{\Omega^*} \tag{\#1s}$$

Esto establece que el costo monetario de ir a trabajar en cada modo debe ser igual al costo (o beneficio) marginal externo en dicho modo y de esta manera se corrigen las externalidades. Esto contrasta con el resultado de Parry & Bento (2001), en que ellos argumentan que en caso de que los impuestos por congestión sean utilizados para reducir el impuesto al trabajo, la regla de tarificación óptima para la congestión sería $\frac{u_n}{u_c}\pi' R$, lo cual, es sólo cierto si es que el impuesto al trabajo es reducido a cero. En ese sentido el error de ellos está en que sólo se preocupan de las diferencias y no de los niveles.

Por otra parte, ($\#1\tau$) y ($\#2s$) se pueden combinar para obtener:

$$\tau - s = \frac{u_n}{u_c}\pi' R\bigg|_{\Omega^*} - \frac{u_n}{u_c}\phi' P\bigg|_{\Omega^*} \tag{\#1'}$$

Lo cual, es similar a lo argumentado por Basso & Jara-Díaz (2012), en el sentido de que para alcanzar la distribución modal óptima lo que importa es que la diferencia de impuestos (subsidios) entre los modos refleje la diferencia de costos (beneficios) marginales externos. Pero, como en este caso el número de viajes es endógeno, se agrega que se debe ajustar también el impuesto al trabajo. De manera tal que, el número total de viajes no se vea afectado ($\hat{L} = L^*$).

3.3.2 Transferencias de suma fija

Un aspecto clave de esta modelación es que asume que cualquier superávit o déficit fiscal es compensado con una transferencia de suma fija a los agentes. Combinando la restricción presupuestaria de gobierno $G = tL + \tau R + sP$, notando que $L = R + P$ y reemplazando ($\#1\tau$) y ($\#1s$) se obtiene que la transferencia de suma fija del gobierno será:

$$G^* = \frac{u_n}{u_c}\phi' P^2\bigg|_{\Omega^*} + \frac{u_n}{u_c}\pi' R^2\bigg|_{\Omega^*} \tag{\#2}$$

De lo anterior, se concluye que la transferencia de suma fija será siempre igual a la suma del costo marginal externo generada por cada viaje en transporte privado más la suma del beneficio marginal externo generada por cada viaje en transporte público. Esto sucede porque con los instrumentos antes señalados se estarán cobrando a los usuarios dichas externalidades, generándose efectos sustitución entre los modos, el consumo y el ocio; pero a su vez, se generan efectos ingreso, los cuales serán cancelados con la transferencia.

Cabe señalar que si bien existe plena flexibilidad para escoger exógenamente t, τ o s (siempre y cuando los otros dos instrumentos se ajusten[12]) no existe flexibilidad alguna en la elección de la transferencia de suma fija G^*.

3.3.3 Equilibrio gobierno-hogares

Ya se obtuvo cuál es el set de instrumentos óptimos que descentralizan el primer mejor. Sin embargo, aún hace falta comprobar que con ese set de instrumentos se cumplan: la restricción de tiempo, la restricción de recursos, la restricción presupuestaria y la restricción fiscal.

La restricción de tiempo siempre se cumple, ya que dicha restricción está presente tanto en el problema del gobierno como en el problema del consumidor. Por otra parte, la restricción de recursos también siempre se cumple, ya que, como ésta no depende de los instrumentos, siempre que $\hat{L} = L^*$ y $\hat{C} = C^*$ ésta se verifica. La restricción fiscal se cumple, dado que, fue ocupada en el calculo de las transferencias óptimas.

De esta manera, sólo hace falta comprobar la restricción presupuestaria del agente, la cual es:

$$G + (1 - t)L = C + \tau R + sP \tag{RP}$$

[12] Esto se debe a que como el modelo presenta dos externalidades siempre serán necesario al menos dos instrumentos para poder corregirlas.

Notando de la oferta de trabajo que $L = R + P$ y evaluándola en Ω^* y en B^* se obtiene:

$$\frac{u_n}{u_c}\phi' P^2\bigg|_{\Omega^*} + \frac{u_n}{u_c}\pi' R^2\bigg|_{\Omega^*} + R^* + P^* = C^* + \frac{u_n}{u_c}\pi' R^2\bigg|_{\Omega^*} + t^* + s^* = \frac{u_n}{u_c}\phi' P^2\bigg|_{\Omega^*}$$

Reduciendo términos semejantes

$$R^* + P^* = C^*$$

Ocupando nuevamente la oferta de trabajo, llegamos a

$$L^* = C^* \tag{RR}$$

Esto es la restricción de recursos, la cual, ya sabemos que se cumple. Luego con el set de instrumentos B^* se descentraliza el primer mejor.

3.4 Discusión de resultados primer mejor

En esta sección se comparan los resultados del sistema de tarificación óptimo encontrado en este trabajo con las reglas clásicas de tarificación. Además, se discute su aplicabilidad en el mundo real y la recomendación de políticas públicas que ellos suponen.

3.4.1 Comparación con las reglas de tarificación clásicas

Las reglas de tarificación clásicas para cualquier externalidad son tarificar (o subsidiar) igual al costo (o beneficio) marginal externo. Los modos de transporte no son una excepción a esto y, por lo tanto, los argumentos clásicos establecen que se debe cobrar el costo marginal externo en el transporte privado y subsidiar al transporte público en un monto igual al beneficio marginal externo.

En este modelo estas reglas de tarificación se verían como:

$$\tau = \frac{u_n}{u_c}\pi' R \qquad\qquad s = \frac{u_n}{u_c}\phi' P$$

Hay que destacar que en caso de que estas tarifas sean implementadas, se verifica la condición ($\#1'$), lo cual quiere decir que dichas tarifas son inter-modalmente óptimas. Por otro lado, de las ecuaciones ($\#1\tau$) y ($\#1s$) se tiene que ellas lograrán alcanzar el primer mejor sólo en el caso de que se fije un impuesto al trabajo igual a $t = 0$. Esto se debe a que como ya se han corregido las externalidades, no existe ninguna otra razón en el mercado laboral que haga sentido cobrar algún impuesto.

3.4.2 No implentabilidad de impuestos por congestión

En la motivación fue mencionado que pocos países han logrado implementar los impuestos por congestión. Esto ha sido así por la dificultad tecnológica que suponen y también por su poca popularidad política. A partir de esto, la literatura ha argumentado que aun no habiendo ninguna externalidad positiva en el transporte público, éste debe ser subsidiado, como una medida alternativa para reducir la congestión.[13]

Ocupando (#1) y (#2) se ve que esto se mantiene en este trabajo. En caso en que $\tau = 0$ para que se descentralice el primer mejor, es necesario que

$$s = \frac{u_n}{u_c}\phi' P\bigg|_{\Omega^*} - \frac{u_n}{u_c}\pi' R\bigg|_{\Omega^*} < \frac{u_n}{u_c}\phi' P\bigg|_{\Omega^*} \qquad t = \frac{u_n}{u_c}\pi' R\bigg|_{\Omega^*} \qquad G = \frac{u_n}{u_c}\phi' P^2\bigg|_{\Omega^*} - \frac{u_n}{u_c}\pi' R^2\bigg|_{\Omega^*}$$

[13] Ver Elgar & Kennedy (2005)

Es decir, si es que el transporte privado no ha sido tarificado los subsidios al transporte público deben ser mayores y se debe implementar un impuesto al trabajo. Más aún, en caso de que no exista ninguna externalidad positiva en el transporte público ($\phi' = 0$) se obtendría que $s = -\frac{u_n}{u_c}\pi' R < 0$, es decir, se subsidia al transporte público para atraer a usuarios del transporte privado y así reducir la congestión.

En otras palabras, en caso de que no sean implementables los impuestos por congestión, la única manera de poder descentralizar el primer mejor es con subsidios al transporte público, impuestos al trabajo y transferencias de suma fija.

Esto se debe a que al no haber impuestos por congestión, el costo privado de ir a trabajar en transporte privado es ineficientemente bajo.Luego, para poder descongestionar dicho modo de transporte, es necesario que los costos del modo alternativo disminuyan. Sin embargo, todo ello hace que los costos asociados a ir a trabajar (independientemente del modo que se escoja) internalizados por el agente no reflejen el verdadero costo que ello supone para la economía (en cuanto a ocio). De esta manera, para que se internalice completamente el costo de ir a trabajar, se hace necesaria la implementación de impuestos al trabajo.

Otra forma de pensar el argumento anteriormente presentado, es que en caso de que existan impuestos al trabajo, se deben hacer un descuentos en las tarifas de ambos modos de transporte para que así el costo de ir a trabajar enfrentado por el consumidor no sea mayor al verdadero.

De hecho, note de (#1s) y de (#1τ) que

$$\left.\frac{\partial s}{\partial t}\right|_{B^*} < 0 \qquad \left.\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|_{B^*} < 0 \qquad \left.\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|_{B^*} = \left.\frac{\partial s}{\partial t}\right|_{B^*}$$

Es decir, los impuestos óptimos en cada modo son decrecientes en el impuesto al trabajo que se desee cobrar.

4 Problema del segundo mejor

En el análisis del primer mejor se obtuvo como resultado que para que éste pudiese ser descentralizado es necesario ocupar transferencias de suma fija iguales a:

$$G^* = \left.\frac{u_n}{u_c}\pi' R^2\right|_{\Omega^*} + \left.\frac{u_n}{u_c}\phi P^2\right|_{\Omega^*}$$

El problema es que en caso de que $\left|\frac{u_n}{u_c}\phi P^2\right| > \left|\frac{u_n}{u_c}\pi' R^2\right|$ (en el óptimo Ω^*) se tendría que la solución supondría cobrar un impuesto de suma fija a los agentes, lo cual como bien ha establecido la literatura de segundo mejor, es difícil de lograr.

Otro problema adicional que podría existir es que el gobierno podría tener además una necesidad exógena de financiamiento (Δ) la cual sólo pudiese ser financiada con impuestos (τ, s y t en este caso).

Luego:

¿Qué es lo mejor que se puede hacer tomando en cuenta estos problemas adicionales?

4.1 Recaudación exógena - solución *à-la-Ramsey*

Suponga que el planificador central además de querer financiar la transferencia G desea financiar un gasto de gobierno exógeno e igual a $\Delta > 0$, pero no tiene a su disposición impuestos de suma fija, sino que, esta transferencia debe ser financiada con impuestos a los modos de transporte y al trabajo.

Es decir, el planificador social conociendo la función de utilidad indirecta del agente representativo:

$$V(t, s, \tau, G, \phi(\hat{P}), \pi(\hat{R})) = u(\hat{C}, \hat{N}) + T(\hat{R}, \hat{P})$$

quiere lograr recabar Δ minimizando la pérdida en bienestar generada por la recaudación, fijando instrumentos que hagan que los agentes internalicen las externalidades, y cumpliendo la restricción presupuestaria de gobierno:

$$G + \Delta = t(R + P) + \tau R + sP \tag{RF2}$$

Es decir, este es un problema del tipo Ramsey (1927), pero en donde se considera que llegar al lugar de trabajo toma tiempo y genera externalidades, y además el bien no gravado es el consumo y el ocio en vez del trabajo.

De esta manera el problema de maximización del gobierno se puede escribir como:

$$max_{t,s,\tau,G} \quad V(t, s, \tau, G, \phi, \pi)$$

s.a

$$G + \Delta \geq tL + \tau R + sP \tag{RF2}$$

$$G \geq 0$$

$$\pi = \pi(\hat{R})$$

$$\phi = \phi(\hat{P})$$

El lagrangiano asociado a dicho problema es:

$$\mathcal{L}: \quad V(t, s, \tau, G, \phi(\hat{P}), \pi(\hat{R})) - \mu(G + \Delta - t(\hat{R} + \hat{P}) - \tau\hat{R} - s\hat{P})$$

Sin embargo, como existe una relación lineal entre la cantidad de viajes en cada modo y el trabajo, se puede definir convenientemente $\mathcal{T} = \tau + t$ y $S = s + t$. Con ello, se obtiene la misma flexibilidad que en el primer mejor con respecto a los instrumentos, es decir, se puede fijar exógenamente uno de los tres, siempre y cuando los otros dos se ajusten óptimamente.

De esta manera el lagrangiano del problema de optimización del gobierno queda como:

$$\mathcal{L}: V(\mathcal{T}, S, G, \phi(\hat{P}), \pi(\hat{R})) - \mu(G + \Delta - \mathcal{T}\hat{R} - S\hat{P})$$

Y las condiciones de primer orden para una solución interior son:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{T}}: \quad \frac{\partial V}{\partial\mathcal{T}} + \mu\left(\frac{d\hat{R}}{d\mathcal{T}}\mathcal{T} + \frac{d\hat{P}}{d\mathcal{T}}S + \hat{R}\right) = 0 \tag{SB1}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial S}: \quad \frac{\partial V}{\partial S} + \mu\left(\frac{d\hat{R}}{dS}\mathcal{T} + \frac{d\hat{P}}{dS}S + \hat{P}\right) = 0 \tag{SB2}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial G}: \quad \frac{\partial V}{\partial G} + \mu\left(\frac{d\hat{R}}{dG}\mathcal{T} + \frac{d\hat{P}}{dG}S\right) \leq 0 \tag{SB3}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu}: \quad G + \Delta - \mathcal{T}\hat{R} - S\hat{P} \geq 0 \tag{SB4}$$

Además, se sabe que:[14]

[14] Ver demostración en apéndice

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \mathcal{T}} &= \frac{dR}{d\mathcal{T}}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right)+\frac{dP}{d\mathcal{T}}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right)-u_c\hat{R}\\
\frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{dR}{dS}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right)+\frac{dP}{dS}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right)-u_c\hat{P}\\
\frac{\partial V}{\partial G} &= \frac{dR}{dG}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right)+\frac{dP}{dG}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right)
\end{aligned}
$$

Lo cual es similar a lo obtenido por Sandmo (1975). Con ello se obtiene:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}}: \quad \frac{dR}{d\mathcal{T}}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right)+\frac{dP}{d\mathcal{T}}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right)-u_c\hat{R}\;+\;\mu\left(\frac{d\hat{R}}{d\mathcal{T}}\mathcal{T}+\frac{d\hat{P}}{d\mathcal{T}}S+\hat{R}\right) \quad = \quad 0 \tag{SB1}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S}: \quad \frac{dR}{dS}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right)+\frac{dP}{dS}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right)-u_c\hat{P}\;+\;\mu\left(\frac{d\hat{R}}{dS}\mathcal{T}+\frac{d\hat{P}}{dS}S+\hat{P}\right) \quad = \quad 0 \tag{SB2}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G}: \quad \frac{dR}{dG}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right)+\frac{dP}{dG}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right)\;+\;\mu\left(\frac{d\hat{R}}{dG}\mathcal{T}+\frac{d\hat{P}}{dG}S\right) \quad \leq \quad 0 \tag{SB3}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}: \quad G+\Delta-\mathcal{T}\hat{R}-S\hat{P} \quad \geq \quad 0 \tag{SB4}
$$

Las condiciones de holgura complementaria serán $\frac{d\mathcal{L}}{d\mu}*\mu=0$ y $\frac{d\mathcal{L}}{dG}*G=0$. Sin embargo, se descarta el caso en que $\mu=0$, ya que, es esperable que la restricción no se cumpla con holgura. Esto se debe a que la utilidad marginal del ingreso del agente representativo es mayor que cero ($\gamma_2=u_c>0$). Luego si es que se recolectó dinero siempre conviene entregarlo al agente. No obstante, en cuanto a la segunda restricción, no se descarta el caso en que $G=0$, ya que, es justo el caso esquina en donde la restricción de que no se pueden cobrar impuestos de suma fija se hace activa, lo cual es un punto interesante de analizar.

Re-ordenando y ocupando las expresiones encontradas para las derivadas de la función de utilidad indirecta se puede llegar a:[15]

$$
\mathcal{T}^{**} \quad = \quad \left.\frac{\frac{u_n}{\mu}\pi'R+\frac{\epsilon_{PR}}{\epsilon_{RR}}\frac{P}{R}\left(\frac{u_n}{\mu}\phi'P-S\right)}{1-\theta\frac{1}{\epsilon_{RR}}}\right|_{\hat{\Omega}} \tag{\#3$\mathcal{T}$}
$$

$$
S^{**} \quad = \quad \left.\frac{\frac{u_n}{\mu}\phi'P+\frac{\epsilon_{RP}}{\epsilon_{PP}}\frac{R}{P}\left(\frac{u_n}{\mu}\pi'R-\mathcal{T}\right)}{1-\theta\frac{1}{\epsilon_{PP}}}\right|_{\hat{\Omega}} \tag{\#3S}
$$

$$
\frac{d\hat{R}}{dG}\left.\left(\frac{u_n}{\mu}\pi'R-\mathcal{T}\right)\right|_{\Omega^*}+\frac{d\hat{P}}{dG}\left.\left(\frac{u_n}{\mu}\phi'P-S\right)\right|_{\Omega^*}\geq 0 \tag{\#4}
$$

Donde $\theta=\frac{u_c-\mu}{\mu}$

Recordando que $\mathcal{T}=\tau+t$ y que $S=s+t$ se obtiene:

$$
t^{**}+\tau^{**} \quad = \quad \left.\frac{\frac{u_n}{\mu}\pi'R+\frac{\epsilon_{PR}}{\epsilon_{RR}}\frac{P}{R}\left(\frac{u_n}{\mu}\phi'P-(s^{**}+t^{**})\right)}{1-\theta\frac{1}{\epsilon_{RR}}}\right|_{\hat{\Omega}} \tag{\#3τ}
$$

[15]Notación: $\epsilon_{RR}=\frac{dR}{d\mathcal{T}}\frac{\mathcal{T}}{R}$, $\epsilon_{PP}=\frac{dP}{dS}\frac{S}{P}$, $\epsilon_{RP}=\frac{dR}{dS}\frac{S}{R}$ y $\epsilon_{PR}=\frac{dP}{d\mathcal{T}}\frac{\mathcal{T}}{P}$.

$$t^{**} + s^{**} \quad = \quad \left. \frac{\frac{u_n}{\mu}\phi' P + \frac{\epsilon_{RP}}{\epsilon_{PP}} \frac{R}{P} \left(\frac{u_n}{\mu}\pi' R - (t^{**} + \tau^{**}) \right)}{1 - \theta \frac{1}{\epsilon_{PP}}} \right|_{\hat{\Omega}} \tag{\#3s}$$

$$0 \leq \epsilon_{RG} \frac{R}{(\tau^{**} + t^{**})} \left(\frac{u_n}{\mu}\pi' R - (\tau^{**} + t^{**}) \right) \Bigg|_{\hat{\Omega}} + \epsilon_{PG} \frac{P}{(s^{**} + t^{**})} \left(\frac{u_n}{\mu}\phi' R - (s^{**} + t^{**}) \right) \Bigg|_{\hat{\Omega}} \tag{\#4'}$$

Esto describe el sistema impositivo óptimo. En donde, ir a trabajar en cada modo es tarificado según un impuesto en el lugar de trabajo e independiente del modo (t), y además por un impuesto específico para cada modo (τ o s según corresponda). El óptimo es que el costo monetario total de cada medio de transporte ($(\tau + t)$ o $(s + t)$ respectivamente) , estará compuesto por una parte relacionada al costo (o beneficio) marginal externo, más un extra relacionado a como esté tarificado el modo alternativo. Todo esto, ponderado por

$$\frac{1}{1 - \frac{\theta}{\epsilon_{ii}}}$$

(con $i = R, P$) que es un término que tiene que ver con las restricciones adicionales de financiamiento requeridas por el gobierno, y que usualmente en la literatura se le llama "componente de Ramsey"[16].

Resolviendo el sistema se llega a los siguientes impuestos óptimos (con respecto a las elasticidades y θ):

$$\tau^{**} + t^{**} = \left\{ \frac{u_n}{\mu}\pi' \hat{R} \left(1 - \frac{\epsilon_{RP}\epsilon_{PR}}{\epsilon_{RR}(\epsilon_{PP} - \theta)} \right) - \frac{\epsilon_{PR}}{\epsilon_{RR}(\epsilon_{PP} - \theta)} \theta \phi' \hat{R} \right\} \left\{ 1 - \frac{\theta}{\epsilon_{RR}} + \frac{\epsilon_{PR}\epsilon_{RP}}{\epsilon_{RR}(\epsilon_{PP} - \theta)} \right\}^{-1} \tag{\#3τ'}$$

$$s^{**} + t^{**} = \left\{ \frac{u_n}{\mu}\phi' \hat{P} \left(1 - \frac{\epsilon_{PR}\epsilon_{RP}}{\epsilon_{PP}(\epsilon_{RR} - \theta)} \right) - \frac{\epsilon_{RP}}{\epsilon_{PP}(\epsilon_{RR} - \theta)} \theta \pi' \hat{P} \right\} \left\{ 1 - \frac{\theta}{\epsilon_{PP}} + \frac{\epsilon_{RP}\epsilon_{PR}}{\epsilon_{PP}(\epsilon_{RR} - \theta)} \right\}^{-1} \tag{\#3s'}$$

4.2 Intertpretación y comparación con el primer mejor

Si bien la expresión para los impuestos óptimos planteados en la sección 4.1 es difícil de analizar sin asumir formas funcionales específicas, se pueden hacer algunas comparaciones con respecto a dicho sistema impositivo y el de primer mejor. En primer lugar, se debe notar que por definición, el primer mejor es aquel punto en donde se maximiza la utilidad. Luego, como los impuestos planteados en (#1τ) y en (#1s) alcanzan el primer mejor, estos deben ser también los impuestos que se encontrarían en el problema de optimización planteado para el segundo mejor, en el caso en particular de que $\Delta = 0$ y que no se restrinja a que $G \leq 0$ o bien que dicha condición se cumpla con holgura.[17] Luego, note que las reglas de tarificación presentadas en (#1τ) y en (#1s) son soluciones del sistema impositivo presentado en (#3τ) y (#3s) sólo en el caso de que $u_c = \mu$ (y por tanto $\theta = 0$). Así, cuando $\Delta = 0$ y no existe ninguna restricción adicional a las de primer mejor sobre G (o bien se cumplen con holgura) tenemos que $u_c = \mu$.

Asumiendo $\frac{dR}{d\tau} < 0$, $\frac{dP}{ds} < 0$, $\frac{dR}{ds} > 0$ y $\frac{dP}{d\tau} > 0$ y en caso en que $\theta < 0$ [18] y Ω^* es tal que se está al costado izquierdo de la curva de Laffer[19], es decir, cuando para aumentar la recaudación se deben subir los impuestos. Tendremos que la regla de tarificación para el transporte público de segundo mejor, dado un nivel de impuestos al trabajo, supone un subsidio menor a este medio de transporte y que el impuesto por congestión será mayor al del caso en que no se requiere financiar un gasto de gobierno exógeno. Esto se debe principalmente

[16] Esto es similar a lo obtenido por Van Dender (2003).

[17] Lo cual ocurriría si es que evaluado en Ω^*: $\left|\frac{u_n}{u_c}\phi P^2\right| > \left|\frac{u_n}{u_c}\pi' R^2\right|$.

[18] Lo cual, se puede asumir que ocurre cuando todos los bienes normales y cuando $\Delta > 0$, como es usual en los problemas del tipo Ramsey.

[19] La curva de Laffer representa la relación entre recaudación y tasas impositivas, notando que con una tasa de 0% la recaudación sería cero, pero que también será cero con una tasa de 100%, ya que, no habría incentivos a trabajar. Luego, debe existir una tasa impositiva que maximiza la recaudación, en donde a la izquierda de dicha tasa al aumentar los impuestos aumenta la recaudación, y a la derecha de ella, al aumentarlos reduce la recaudación. Lleva su nombre por el economista Arthur Laffer quien durante la década de los 70' la hizo conocida en el debate del alza de impuesto llevada a cabo por el presidente de EE.UU Gerald Ford.

a que la recolección de los fondos necesarios para Δ no pueden ser financiados únicamente con un alza al costo monetario de un solo modo, ya que esto generaría distorsiones mayores en la economía. En particular, se rompería la distribución modal óptima. La cual, si bien en caso de que $\Delta > 0$ no será igual a la encontrada en el primer mejor, debe seguir siendo tal que el costo marginal social de cada modo se iguale al de su alternativa; de lo contrario existiría espacio para que se aumente marginalmente el número de viajes en un modo reduciéndolo en el otro y que con ello aumente el bienestar.

Finalmente, cabe también destacar que la lógica de que como existen sólo dos distorsiones se requiere de sólo dos instrumentos, se sigue manteniendo en el problema del segundo mejor. Por consiguiente, al igual que en el primer mejor, si es que se requiere imponer la restricción adicional de que el sistema de transporte esté auto-financiado ($\tau^{**}\hat{R} + s^{**}\hat{P} \geq 0$) ella no cambiará el valor de la utilidad óptima de segundo mejor, si no que sólo subirán en paralelo τ^{**} y s^{**} y se reducirá t^{**}, tal que, el costo monetario de ir a trabajar en cada modo se vea inalterado. Esto además permite que el segundo mejor pueda ser alcanzado sin la necesidad de impuestos por congestión, siempre y cuando se subsidie en mayor medida el transporte público y se implementen impuestos al trabajo.

5 Ejemplo numérico

Debido a la dificultad del análisis del sistema impositivo planteado en 4.1, esta sección tiene por objetivo mostrar las implicancias del modelo presentado, para un caso particular con formas funcionales. Para ello, se asume que la función de utilidad del agente representativo es la siguiente:

$$U = C^{d_1} N^{1-d_1} - d_2 R^2 P^2 - d_3 R - d_4 P$$

donde, $0 \leq d_1 \leq 1$ y $d_2, d_3, d_4 \geq 0$.

Hay que destacar que el parámetro d_1 permite alterar la tasa marginal de sustitución entre consumo y ocio. Luego es un instrumento para que al momento de calibrar el modelo se tenga que el número de días de ocio en un mes sea razonable. Por otro lado, los parámetros d_2, d_3 y d_4 miden el grado de aversión al transporte; en particular, los parámetros d_3 y d_4 sirven para mostrar preferencias por uno u otro modo. Se asume que el tiempo de planificación del agente es un mes, compuesto de 30 días, en donde cada día consta de 24 horas.

Las funciones de tiempo de traslado en cada modo son respectivamente:

$$\pi(R) = a_1 + a_2 R^{a_3} \qquad\qquad \phi(P) = a_4 + a_5 P^{a_6}$$

Por un lado, el parámetro a_1 mide el tiempo de traslado de flujo libre en el transporte privado, a_2 representa el efecto de la congestión sobre los tiempos de traslado y el parámetro a_3 la concavidad de la función de congestión[20]. Por otro lado, a_4 es la suma del tiempo en movimiento más los tiempos de espera en transporte público en un escenario en donde se es el único usuario. Como se asume la existencia de efecto Mohring, dichos tiempos de espera se reducen a medida que aumenta el número de usuarios, lo cual se refleja en el parámetro a_5, sin embargo, se supone que dicha reducción ocurre a tasa marginal decreciente, por ello $a_6 \leq -1$.

Con lo anterior, la restricción de tiempo será:

$$30 \geq N + (1 + a_1 + a_2 R^{a_3})\, R + (1 + a_4 + a_5 P^{a_6})\, P$$

La restricción fiscal y presupuestaria son idénticas a las planteadas anteriormente dado que ellas no dependen de las formas funcionales de la utilidad, ni tampoco, de la de los tiempos de traslado en los medios de transporte.

[20] Se supone $a_3 > 1$ lo cual implica que la tasa marginal de congestión es creciente, esto es, la demora adicional que genera un usuario extra es mayor cuanto más congestionada esté la ruta.

5.1 Resolución

El modelo con las formas planteadas anteriormente no tiene una solución analítica. Por ello, se procede a analizar un ejemplo numérico ocupando algoritmos del tipo *Newton-Raphson* los cuales están implementados MatLab[21].

En primer lugar se buscó algún set de parámetros de manera que en un escenario en donde existe un impuesto laboral de 7%[22] se satisfagan los siguientes criterios:

- La participación modal del transporte privado sea similar a la documentada para viajes al trabajo en la ciudad de Santiago por la "Encuesta origen destino de viajes 2001" (EOD-2001)
- Los tiempos de viaje observados en cada modo sean similares a los observados, es decir, se encuentren entre 40 y 100 minutos.
- La cantidad de días dedicados a ocio en un mes sean aproximadamente 6.5 (lo cual reflejaría que las personas tienen todas las semanas al menos un día libre y semana por medio dos días libres).
- El uso de los medios de transporte provoque des-utilidad.
- Las preferencias indiquen que es más cómodo viajar en transporte privado que en transporte público.
- La función de tiempo de viaje en transporte privado sea creciente y convexa
- La función de tiempo de viaje en transporte público sea decreciente, convexa y satisfaga la condición $|\phi'' P| > |2\phi'|$

Así, primero se escogió que $d_1 = 0.78$ lo cual es $5.5/7$ truncado a la centésima, esto ya que en una función Cobb-Douglas tradicional se tiene que el parámetro d_1 representa la proporción del total de los recursos (en este caso días) que se gastaría en el bien C y $1 - d_1$ es la proporción que se gasta en el bien N; esto, si bien debido a la existencia de los costos de viaje, no se cumple exáctamente en este caso, ayuda a que las preferencias sean tales que el número de días de ocio sea aproximadamente 6.5. Luego, se escogió arbitrariamente $d_2 = 0.000001$ para mostrar que si bien viajar genera des-utilidad, esta des-utilidad es pequeña en comparación a la utilidad que genera el ocio y el consumo. Posteriormente, se buscó (con un método de prueba y error) algún set de parámetros $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, d_3, d_4\}$ tal que la participación modal del transporte privado sea 37.7% y se satisfagan los criterios anteriormente mencionados, lo cual entre otras cosas requiere que $a_2 > 0$, $a_3 \geq 1$, $a_6 < -1$, $a_5 > 0$, $0 < d_3 < d_4$. Cabe destacar que los parámetros encontrados no son los únicos que satisfacen los criterios mencionados y en ese sentido este ejercicio numérico es tan sólo un ejemplo y no una simulación de alguna ciudad en especial.

Luego, a partir de dichos parámetros se calculó el primer mejor, el equilibrio sin impuestos, y el sistema impositivo óptimo en caso de requerir un gasto exógeno adicional entre 0 y 2. Además, se verificó que con los impuestos propuestos en la sección 3 la elección del agente en este ejemplo es justamente el primer mejor.

5.2 Resultados

Los parámetros ocupados fueron los siguientes:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = (0.78, 0.000001, 0.01, 0.02) \quad ; \quad (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (0.0195, 0.0001, 2.6, 0.0234, 0.1, -1.1)$$

Los resultados del ejemplo son:

[21] ver código en anexo.
[22] Como el documentado para Chile por Bradbury et.al (2017)

	Utilidad	C	N	Dis.Modal	π	ϕ	G	$\tau + t$	$s + t$
Situación Inicial	15.9146	20.8683	6.7747	37.71%	65.2022	41.5375	0	0.07	0.07
Sin Impustos	16.8693	22.4606	6.7653	37.03%	63.5894	41.4361	0	0	0
Primer mejor	16.9344	22.6293	6.7633	19.56%	34.9699	39.5426	**	**	**
Imp. óptimos	16.9344	22.6293	6.7633	19.56%	34.9699	39.5426	-0.0257	0.0117	-0.0043
$\Delta = 0.5$	16.6354	22.2428	6.6474	19.41%	34.9193	39.4978	-0.5274	0.0117	-0.0043
$\Delta = 1.0$	16.3364	21.8552	6.5323	19.35%	34.9486	39.4610	-1.0251	0.0117	-0.0042
$\Delta = 1.5$	16.0374	21.4668	6.4183	19.22%	34.9150	39.4195	-1.5185	0.0120	-0.0038
$\Delta = 2.0$	15.7384	21.0787	6.3040	19.06%	34.8567	39.3764	-2.0122	0.0122	-0.0035
$\Delta = 0 \quad \wedge\ G = 0$	16.9344	22.6233	6.7694	19.59%	34.9898	39.5465	0	0.0129	-0.0031
$\Delta = 0.5\ \wedge\ G = 0$	16.6345	22.1205	6.7724	19.53%	34.9338	39.5425	0	0.0349	0.0190
$\Delta = 1.0\ \wedge\ G = 0$	16.3331	21.6174	6.7756	19.57%	34.9649	39.5464	0	0.0569	0.0411
$\Delta = 1.5\ \wedge\ G = 0$	16.0300	21.1145	6.7789	19.46%	34.8662	39.5387	0	0.0789	0.0633
$\Delta = 2.0\ \wedge\ G = 0$	15.7253	20.6109	6.7823	19.51%	34.9106	39.5439	0	0.1009	0.0854

Tabla 2: Resultados ejemplo numérico

De lo anterior, se nota que con los impuestos al trabajo observados, la participación modal del transporte privado es mayor a la de primer mejor, es decir, el equilibrio no es ínter-modalmente óptimo. Lo cual genera que los tiempos de viaje (expresados en minutos en la tabla) sean mayores que los socialmente óptimos. También, se verifica que con los impuestos obtenidos analíticamente en la sección 3, se logra descentralizar el primer mejor (de acuerdo a lo esperado). Sin embargo, dada la calibración, en este caso las transferencias son menores a cero ($G = -0.0257 < 0$), lo cual implica que para poder descentralizar el primer mejor es necesario implementar impuestos de suma fija. Por ello, se buscó además el resultado de segundo mejor, cuando se impone la restricción de $G \geq 0$. En dicho caso, se observa que dado algún nivel de impuestos al trabajo, el impuesto por congestión aumenta y el subsidio al transporte público se ve reducido, tal como se argumentó en la sección 4.2. Cabe notar que, en caso de que no se imponga la restricción que prohíbe el uso de impuestos de suma fija, el gasto exógeno de gobierno es prácticamente financiado en su totalidad con dicho tipo de impuestos. Sin embargo, tal como se argumentó en la sección 4, en caso de que se imponga dicha restricción, dado un nivel de impuesto al trabajo, los impuestos por congestión aumentan y los subsidios al transporte público se reducen, pudiendo incluso revertirse y transformarse en impuestos, lo cual hace sugerir que los impuestos de primer mejor se encuentran a la izquierda de la curva de Laffer.

Además, como se nota en la tabla 3, en caso de que no existan restricciones sobre G el costo monetario de viajar en cada modo (suma del impuesto específico del modo más el impuesto al trabajo) es similar al costo (beneficio) marginal externo en dicho modo. Sin embargo, nuevamente, en caso de no sea posible implementar impuestos de suma fija, el costo monetario de viajar en cada modo es mayor al costo (beneficio) marginal externo en dicho modo, esto se debe a que tarificar de acuerdo al costo (beneficio) marginal externo no genera la suficiente recaudación como para poder financiar el gasto exógeno de gobierno. Luego, como se justificó en la sección 4, ambos costo monetarios aumentan. De manera de cubrir la necesidad de financiamiento sin violar la condición de optimalidad inter-modal (que se iguale el costo marginal social entre los modos).

	$\frac{u_n}{u_c}\pi' R$	$\tau + t$	$\frac{u_n}{u_c}\phi' P$	$s + t$
Imp. óptimos	0.0117	0.0117	-0.0043	-0.0043
$\Delta = 0.5$	0.0117	0.0117	-0.0042	-0.0043
$\Delta = 1.0$	0.0117	0.00117	-0.0042	-0.0042
$\Delta = 1.5$	0.0116	0.0120	-0.0042	-0.0038
$\Delta = 2.0$	0.0115	0.0122	-0.0041	-0.0035
$\Delta = 0 \ \wedge \ G = 0$	0.0118	0.0129	-0.0043	-0.0031
$\Delta = 0.5 \ \wedge \ G = 0$	0.0114	0.0349	-0.0042	0.0190
$\Delta = 1.0 \ \wedge \ G = 0$	0.0112	0.0569	-0.0041	0.0411
$\Delta = 1.5 \ \wedge \ G = 0$	0.0108	0.0789	-0.0040	0.0633
$\Delta = 2.0 \ \wedge \ G = 0$	0.0106	0.1009	-0.0039	0.0854

Tabla 3: Comparación de impuestos (subsidios) de segundo mejor y costos (beneficios) marginal externo

Por otro lado, es interesante analizar el caso en que no existan impuestos por congestión $\tau = 0$ lo cual puede ser obtenido de la tabla 2 simplemente observando que la columna $\tau + t$ es en realidad t y con ello poder calcular por diferencia con $s + t$ el subsidio en cada caso. Tal como se muestra en la siguiente tabla:

	t	s	τ	$\frac{u_n}{u_c}\pi' R - \frac{u_n}{u_c}\pi' P$
$\Delta = 0 \quad \wedge \ G = 0$	0.0129	-0.0160	0	0.0161
$\Delta = 0.5 \ \wedge \ G = 0$	0.0349	-0.0159	0	0.0156
$\Delta = 1.0 \ \wedge \ G = 0$	0.0569	-0.0158	0	0.0153
$\Delta = 1.5 \ \wedge \ G = 0$	0.0789	-0.0156	0	0.0148
$\Delta = 2.0 \ \wedge \ G = 0$	0.1009	-0.0155	0	0.0145

Tabla 4: Impuestos óptimos en un escenario sin impuestos por congestión

De la tabla anterior se puede observar que cuando no es posible implementar ni impuestos por congestión ni impuestos de suma fija. El impuesto al trabajo es creciente en el requerimiento exógeno de gobierno, y al mismo tiempo, genera una leve disminución en el subsidio al transporte público. Sin embargo, se puede observar también que la diferencia de costo (beneficio) marginal externo entre los modos también va disminuyendo levemente. Por ende, se puede argumentar que la diferencia entre el impuesto por congestión (cero en este caso) y el subsidio al transporte público sigue reflejando aproximadamente (no exactamente) las diferencias entre el costo (beneficio) marginal externo entre los modos. Mientras que el requerimiento exógeno de gobierno es financiado con impuestos al trabajo, ya que como dicho impuesto es independiente del modo que se escoja, no afecta la optimalidad inter-modal.

6 Conclusión

Se desarrolló un modelo con oferta laboral endógena para analizar qué forma debe tomar la tarificación del transporte urbano. En un escenario en que exista congestión en el modo de transporte privado y efecto Mohring en el transporte público, la distribución modal sin regulación será mas intensiva en transporte privado que el óptimo de primer mejor. Sin embargo, en este trabajo se demuestra que si es posible hacer transferencias de suma fija y fijar al menos dos de los siguientes impuestos: laboral, impuestos por congestión y subsidios al transporte público; entonces, el primer mejor puede ser descentralizado. Más aún, en caso de que por alguna razón no sea posible cobrar impuestos por congestión, la única manera de descentralizar el primer mejor es con subsidios al transporte público, impuestos al trabajo y transferencias de suma fija. Este último resultado es robusto a la existencia o no de efecto Mohring. Además, es similar a lo obtenido por Basso & Jara-Diaz (2012), pero difiere de ellos en que como el número total de viajes no está fijo (es igual a la oferta laboral) es necesario ajustar también el impuesto al trabajo.

En un escenario de segundo mejor, en donde existan necesidades exógenas de financiamiento y de que se imponga la restricción de que no es posible implementar impuestos de suma fija, el costo monetario de ir a trabajar en ambos modos de transporte se verá alterado. En particular, si es que los impuestos y subsidios de primer mejor son lo suficientemente bajos para que se encuentren al costado izquierdo de la cura de Laffer; la necesidad exógena de financiamiento de gobierno será cubierta con un alza al costo monetario de ambos modos, pudiendo ello significar que el costo monetario del transporte público se revierta y se comiencen a cobrar impuestos en dicho modo. Sin embargo, cabe resaltar, que en el escenario de segundo mejor se sigue manteniendo la posibilidad de tener que fijar tan sólo dos de los tres instrumentos antes mencionados. Luego, al igual que en el escenario de primer mejor, la restricción de que se auto-financie el sistema de transporte es inocua desde un punto de vista de bienestar.

Además se desarrolló un ejemplo numérico, en donde se verifican las conclusiones de la parte analítica y se notó que independientemente del escenario que se plantee, la diferencia entre los impuestos (subsidios) en cada modo refleja aproximadamente la diferencia de costos (beneficios) marginales externos entre los modos, ello implica que en cualquier escenario en caso en que no sean implementables los impuestos por congestión, debe existir un subsidio al transporte público e impuestos al trabajo.

Existen dos limitaciones de este trabajo que podrían ser consideradas en investigaciones futuras, por una parte, el supuesto de usuarios homogéneos podría afectar los resultados encontrados, ya que, incorporaría la dificultad adicional de que los costos y beneficios marginales externos dependerían del tipo de usuario. Luego, sería necesario cobrar impuestos (subsidios) diferenciados por tipo o bien en un escenario de asimetrías de información, considerar restricciones de compatibilidad de incentivos[23] que podrían impedir la descentralización del primer mejor. Por otro lado, el ejemplo numérico, si bien fue calibrado para que la participación modal sea similar a la observada en la ciudad de Santiago, existen otros factores no observables (por ejemplo los tiempos de espera) que hacen que los resultados del ejemplo no deban ser considerados estrictamente para una reformulación del sistema impositivo de la ciudad.

[23]Como lo evalúa Russo (2015)

Referencias

- Anderstig, C. , Berglund, S. , Eliasson, J. & Andersson, M. (2016), *Congestion charges and labour market imperfections.* Journal of Transport Economics and Policy 50(2), 113-131.

- Basso, L. & Jara-Diaz, S. (2012), *Integrating congestion pricing, transit subsidies and mode choice.* Transportation Research 46(A), 890-900.

- Black, A. , Kolesinikova, N. & Taylor, L. (2014), *Why do few women work in New York (and so many in Minneapolis)? Labor supply of married woman across US cities.* Journal of Urban Economics 79, 59-71.

- Börjesson, M. , Eliasson, J. , Hugosson, M. & Brundell-Freij, K. (2012), *The Stockholm congestion charges - 5 years on. Effects, acceptability and lessons learnt.* Transport Policy 20, 1-12.

- Bradbury, D. , Harding, M. & Paturot, D. (2017), *Taxing wages 2017.* OECD, Centre for Tax Policy and Administration.

- Carter, M. (2001), *Foundations of mathematical economics.* Cambridge, The MIT Press.

- De Palma, A. & Lindsey, R. (2004), *Congestion pricing with heterogeneous travelers: A general-equilibrium welfare analysis.* Network and Spatial Economics 4, 135-160.

- Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontifica Universidad Católica de Chile (2001), *Encuesta origen destino de viajes.* Gobierno de Chile, SECTRA.

- Elgar, I. & Kennedy, C. (2005), *Review of optimal transit subsidies: Comparison between models.* Journal of Urban Planning and Development 131(2), 71-78.

- Gutiérrez-i-Puigarnau, E. & van Ommeren, J. (2009), *Labour supply and commuting.* Tinbergen Institute Discussion Paper 008/3.

- Hirte, G. & Tscharakschiew, S. (2015), *Why not to choose the most convenient labor supply model? An analysis of the consequences of different labor supply modeling approaches for policy evaluation.* 55th Congress of the European Regional Sciencie Association "World Renaissaince: changing the roles for people and places", 25-28.

- Mohring, H. (1972), *Optimization and scale economies in urban bus transportation.* The American Economic Review 62(4), 591-604.

- Parry, I. & Bento A. (2001), *Revenue recycling and the welfare effects of road pricing.* The Scandinavian Journal of Economics 103(4), 645-671.

- Ramsey, F. (1927), *A contribution to the theory of taxation.* The Economic Journal 37(145), 47-61.

- Russo, A. (2015), *Pricing of transport networks, redistribution, and optimal taxation.* The Journal of Public Economic Theory 17(5), 605-640.

- Sandmo, A. (1975), *Optimal taxation in the presence of externalities.* The Swedish Journal of Economics 77(1), 86-98.

- Van Dender, K. (2003), *Transport taxes with multiple trip purposes.* The Scandinavian Journal of Economics 105(2), 295-310.

A Apéndice

A.1 Condiciones para solución interior del problema de primer mejor

En la sección 3.1 se plantearon las condiciones de primer orden para una solución interior, y por ello, las condiciones de primer orden están están escritas con igualdad. Sin embargo, en un problema general en donde se admiten soluciones esquina. Las condicione son en realidad:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} : u_c - \lambda_2 \leq 0 \tag{P1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} : u_n - \lambda_1 \leq 0 \tag{P2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} : T_r - \lambda_1 \left(1 + \pi + \pi' R\right) + \lambda_2 \leq 0 \tag{P3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} : T_p - \lambda_1 \left(1 + \phi + \phi' P\right) + \lambda_2 \leq 0 \tag{P4}$$

Y en donde, también se cumplen las condiciones de holgura complementaria:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} * C = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} * N = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} * R = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} * P = 0$$

Luego, si es que la utilidad marginal del ocio o el consumo tiende a infinito cuando alguno de dichos bienes tiende a cero (como ocurre con funciones del tipo Cobb-Douglas), entonces se descartaría la solución esquina en donde $C = 0$ o $N = 0$. Ya que en dicho caso,

$$\left.(u_c \; - \lambda_2)\right|_{C=0} > 0 \qquad \vee \qquad \left.(u_n - \lambda_1)\right|_{N=0} > 0$$

y no se cumplirían las condiciones de primer orden.

Por otra parte, no se pueden descartar inmediatamente las soluciones esquina en donde $R = 0$ o $P = 0$, dado que en dichas situaciones puede ocurrir que:

$$\left.(T_r - \lambda_1 \left(1 + \pi + \pi' R\right) + \lambda_2)\right|_{R=0} < 0$$
$$\left.(T_p - \lambda_1 \left(1 + \phi + \phi' P\right) + \lambda_2)\right|_{P=0} < 0$$

En donde, $T_r < 0, T_p < 0$, $(1 + \pi) > 0$,$(1 + \phi) > 0$, $\pi' R \geq 0$ y $\phi' P \leq 0$. Notar también que en caso de que no exista solución esquina en el ocio o el consumo $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$.

En definitiva, la existencia o no de soluciones esquina en el ocio y el consumo dependerá de la forma funcional de $U(C, N)$. Y para el caso de los modos de transporte depende de las formas funcionales de π, ϕ y $T(R, P)$; así como también de si existe o no solución esquina en el ocio y el consumo.

A.2 Condiciones de segundo orden del problema de primer mejor

En esta sección se verifican las condiciones de segundo orden del problema de optimización del primer mejor. Se sabe que una condición suficiente para que las condiciones de primer mejor entregan un máximo global es que la función objetivo sea cóncava y que el dominio a maximizar sea un conjunto convexo. Esto último requiere que si las J restricciones funcionales se escriben de la forma $g_j(X) \leq 0$, entonces, las funciones $g_j(X)$ deben ser convexas y debe existir algún $\tilde{x}$ tal que $g(\tilde{x}) < 0$ (condición de Slater). [24]

En este caso, se requiere que la función objetivo $U(C,N) + T(R,P)$ sea una función cóncava, lo cual ocurre siempre dado que se ha supuesto que $U(C,N)$ y $T(R,P)$ son cóncavas y la suma de dos funciones cóncavas es siempre cóncava.

Por otro lado, las tres restricciones del problema pueden ser escritas como:

$$N + \pi R + \phi P + C - \overline{L} \leq 0 \tag{RT}$$

$$C - R - P \leq 0 \tag{RR}$$

En donde, la restricción $L = R + P$ ha sido colapsada en las otras dos.

Notar, por un lado, que la restricción (RR) es lineal, por lo tanto, también es convexa. Por otro lado, se deberá chequear la convexidad de (RT). Para ello se verificará bajo que condiciones el hessiano del inverso aditivo de la función es semi-definido negativo.

El hessiano de $-(N + \pi R + \phi P + C - \overline{L})$ es:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\pi'' R + 2\pi') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\phi'' P + 2\phi') \end{bmatrix}$$

Luego, se deben calcular los menores principales de dicha matriz. El primero (de orden 1) resulta de borrar $4 - 1 = 3$ filas y columnas de igual orden, es decir, en este caso puede tomar los valores

$$\Delta_1 = \{0; 0; -(\pi'' R + 2\pi'); -(\phi'' P + 2\phi')\}$$

El segundo (de orden 2) resulta de borrar $4 - 2 = 2$ filas y columnas de igual orden, y en este caso toma los valores

$$\Delta_2 = \{0, (\phi'' P + 2\phi')(\pi'' R + 2\pi')\}$$

El tercero (de orden 3) resulta de borrar $4 - 3 = 1$ fila y columna de igual orden, luego en este caso sólo puede tomar el valor 0.

$$\Delta_3 = \{0\}$$

Y el último (de orden 4) es el determinante de la matriz hessiana.

$$\Delta_4 = \{0\}$$

Finalmente, si se define a como el orden del menor principal, para que el matriz hessiana sea semi-definida negativa debe ser cierto que $(-1)^a \Delta_a \geq 0 \quad \forall a \in \{1,2,3,4\}$. En este caso, ello ocurre si

$$(\pi'' R + 2\pi') \geq 0 \qquad \wedge \qquad (\phi'' P + 2\phi') \geq 0$$

Notese que en caso de que la función π sea creciente y convexa (como usualmente supone la literatura) se tendrá que el lado izquierdo de la condición anterior será verdadero. Para que el lado derecho sea siempre verdadero y ϕ sea decreciente, debe ser cierto que ϕ es convexa y, además que $|\phi'' P| \leq |2\phi'|$.

[24] ver Teorema 5.6, Carter (2001)

A.3 Demostración derivadas de la utilidad indirecta con respecto a los impuestos

Primero recordar que del problema de optimización del agente se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C}: \quad u_c - \gamma_2 = 0 \tag{C1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N}: \quad u_n - \gamma_1 = 0 \tag{C2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R}: \quad T_r - \gamma_1 (1+\pi) + \gamma_2 ((1-t) - \tau) = 0 \tag{C3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P}: \quad T_p - \gamma_1 (1+\phi) + \gamma_2 ((1-t) - s) = 0 \tag{C4}$$

Luego, ocupando que $\tau + t = \mathcal{T}$ y que $s + t = S$ y combinando las dos primeras restricciones con las dós últimas se obtiene:

$$T_r - u_n (1+\pi) + u_c (1-\mathcal{T}) = 0 \tag{A1}$$

$$T_p - u_n (1+\phi) + u_c (1-S) = 0 \tag{A2}$$

Recordando que:

$$V(t,s,\tau,G,\phi(\hat{P}),\pi(\hat{R})) = u(\hat{C},\hat{N}) + T(\hat{R},\hat{P})$$

Y además se sabe que que tanto la restricción de tiempo como la restricción presupuestaria del agente representativo se cumple con igualdad. Luego, reemplazando dichas restricciones y las condiciónes de equilibrio en la función de utilidad indirecta se obtiene:

$$V(t,s,\tau,G,\phi(\hat{P}),\pi(\hat{R})) = u\Bigg(G + (1-(\tau+t))\,\hat{R} + (1-(s+t))\,\hat{P}\ ,\ \overline{L} - \Big(1+\pi(\hat{R})\Big) - \Big(1+\phi(\hat{P})\Big)\Bigg) + T(\hat{R}\ ,\ \hat{P})$$

reemplazando $s + t = s$ y $\tau + t = \mathcal{T}$,

$$V(t,s,\tau,G,\phi(\hat{P}),\pi(\hat{R})) = u\Bigg(G + (1-\mathcal{T})\,\hat{R} + (1-S)\,\hat{P}\ ,\ \overline{L} - \Big(1+\pi(\hat{R})\Big) - \Big(1+\phi(\hat{P})\Big)\Bigg) + T(\hat{R}\ ,\ \hat{P})$$

Derivando con respecto a S, $\mathcal{T}$ y G se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathcal{T}}: \quad u_c\left((1-\mathcal{T})\frac{d\hat{R}}{d\mathcal{T}} + (1-S)\frac{d\hat{P}}{d\mathcal{T}} - \hat{R}\right) - u_n\left((1+\pi+\pi'\hat{R})\frac{d\hat{R}}{d\mathcal{T}} + (1+\phi+\phi'\hat{P})\frac{d\hat{P}}{d\mathcal{T}}\right) + T_r\frac{d\hat{R}}{d\mathcal{T}} + T_p\frac{d\hat{P}}{d\mathcal{T}} \tag{A3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}: \quad u_c\left((1-\mathcal{T})\frac{d\hat{R}}{dS} + (1-S)\frac{d\hat{P}}{dS} - \hat{P}\right) - u_n\left((1+\pi+\pi'\hat{R})\frac{d\hat{R}}{dS} + (1+\phi+\phi'\hat{P})\frac{d\hat{P}}{dS}\right) + T_r\frac{d\hat{R}}{dS} + T_p\frac{d\hat{P}}{dS} \tag{A4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial G}: \quad u_c\left((1-\mathcal{T})\frac{d\hat{R}}{dG} + (1-S)\frac{d\hat{P}}{dG}\right) - u_n\left((1+\pi+\pi'\hat{R})\frac{d\hat{R}}{dG} + (1+\phi+\phi'\hat{P})\frac{d\hat{P}}{dG}\right) + T_r\frac{d\hat{R}}{dG} + T_p\frac{d\hat{P}}{dG} \tag{A5}$$

Finalmente ocupando (A1-A2) se reduce a:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathcal{T}} = \frac{dR}{d\mathcal{T}}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right) + \frac{dP}{d\mathcal{T}}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right) - u_c\hat{R} \tag{A6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{dR}{dS}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right) + \frac{dP}{dS}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right) - u_c\hat{P} \tag{A7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial G} \quad = \quad \frac{dR}{dG}\left(-u_n\pi'\hat{R}\right)+\frac{dP}{dG}\left(-u_n\phi'\hat{P}\right) \tag{A8}$$

A.4 Código Matlab

En esta sección se presenta el código utilizado para obtener los resultados numéricos en Matlab. El código consta de un "script" principal (master) y nueve funciones. Las cuales se enumeran a continuación:

- Master: este es el "script" principal en donde se fijan los parámetros y se obtienen los resultados.
- problem: esta es una función que describe las restricciones de primer orden del agente.
- fbproblem: esta función consta de las restricciones de primer orden del primer mejor.
- indutulity: función que a partir de los parámetros e impuestos entrega el valor de la función de utilidad evaluada en la elección del agente en equilibrio.
- time: función que a partir de la cantidad de viajes en cada modo entrega los tiempos de viaje expresados en minutos.
- govcon: es una función que consta de las restricciones presupuestaria de gobierno para un gasto exógeno (Δ) en caso de que no se restrinja a que $G \geq 0$
- govcon2: es una función idéntica a govcon, salvo que incluye la restricción de que $G = 0$
- external: calcula los costos y beneficios marginales en cada modo dada una elección de equilibrio.
- utility: es una función que calcula la utilidad del agente a partir de algún set de consumo.
- fbcon: son las restricciones de primer mejor

A.4.1 Master

```
clear
%Parameters
S0 = [20,10,5,15];
A0 = [0.0195,0.0001,2.6,0.02335,-0.1,-1.1,30];
D0 = [0.78,0.000001,0.01,0.02];

%Observed modal split and taxes
B0 = [0.07,0.07,0,0];
options = optimoptions('fsolve','MaxIterations',1e7,'MaxFunctionEvaluations',1
    e20);
[Sobs,valset] = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,B0),S0,options);
Obsval = Sobs(1)^D0(1)*Sobs(2)^(1-D0(1))-D0(2)*Sobs(3)^2*Sobs(4)^2 - D0(3)*Sobs
    (3)-D0(4)*Sobs(4);
ShObs = Sobs(3)/(Sobs(4)+Sobs(3));
Tobs=time(Sobs,A0);

D = D0;
A = A0;
R = 0:Sobs(1)/100:Sobs(1);
```

```
Pri = -((1-B0(1)) - (1-D(1))/D(1)*(Sobs(1)/Sobs(2))*(1+A(1)+A(2).*R.^A(3)) - (2*D(2).*R(3).*(Sobs(1)-R).^2 + D(3))/D(1)*(Sobs(1)/Sobs(2))^(1-D(1)));
Pub = -((1-B0(2)) - (1-D(1))/D(1)*(Sobs(1)/Sobs(2))*(1+A(4)-A(5).*(Sobs(1)-R).^A(6)) - (2*D(2).*R.^2.*(Sobs(1)-R) + D(4))/D(1)*(Sobs(1)/Sobs(2))^(1-D(1)));
afin = Pri;
plot(R,Pri,'b',R,Pub,'r');

[FBnumeric,FBnumericVal] = fmincon(@(S) utility(S,D),S0,[],[],[],[],...
          [],[], @(S) fbcon(S,A));


%Fisrt Best
FB = fsolve(@(S) fbproblem(S,A0,D0),S0,options);
FBval = FB(1)^D0(1)*FB(2)^(1-D0(1))-D0(2)*FB(3)^2*FB(4)^2 - D0(3)*FB(3)-D0(4)*FB(4);
TaxFB = (1-D0(1))/D0(1)*(FB(1)/FB(2))*(A0(2)*A0(3)*FB(3)^A0(3));
TFB1 = time(FB,A0);
%First Best descentralization
SubFB = -(1-D0(1))/D0(1)*(FB(1)/FB(2))*(A0(5)*A0(6)*FB(4)^A0(6));
BFB = [TaxFB , SubFB, TaxFB*FB(3) + SubFB*FB(4) ,0];
FBC = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,BFB),FB,options);
ShFB=FB(3)/(FB(3)+FB(4));
ExtFB = external(FB,A0,D0);
%No goverment scenario
BNG = [0,0,0,0];
NG = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,BNG),S0,options);
NGval = NG(1)^D0(1)*NG(2)^(1-D0(1))-D0(2)*NG(3)^2*NG(4)^2 - D0(3)*NG(3)-D0(4)*NG(4);
TNG = time(NG,A0);
ShNG=NG(3)/(NG(3)+NG(4));
ExtNG = external(NG,A0,D0);
%Taxes from indirect utility
g=0;
%Non extra expenditure
d=0;
    %Unrestrined
    [GovFB,GovVal] = fmincon(@(B) indutility(FB,A0,D0,B),BFB,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,FB,d));
    Ch0 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovFB),FB,options);
    T0 = time(Ch0,A0);
    Sh0=Ch0(3)/(Ch0(3)+Ch0(4));
    ExtGovFB = external(Ch0,A0,D0);
    %Restrined
    [GovR,GovValR] = fmincon(@(B) indutility(FB,A0,D0,B),BFB,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,FB,d,g));
    ChR0 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR),FB,options);
```

```
    TR0 = time(ChR0,A0);
    ShR0=ChR0(3)/(ChR0(3)+ChR0(4));
    ExtGovR = external(ChR0,A0,D0);
    difR=GovR(1)-GovR(2);
%Some extra expenditure
d=0.1;
Gov0=BFB;
Gov0(4)=0.1;
Gov0(3)=BFB(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov1,GovVal1] = fmincon(@(B) indutility(FB,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,FB,d));
    Ch1 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov1),FB,options);
    T1 = time(Ch1,A0);
    Sh1=Ch1(3)/(Ch1(3)+Ch1(4));
    ExtGov1 = external(Ch1,A0,D0);
    %Restrined
    Gov0=GovR;
    Gov0(4)=0.1;
    [GovR1,GovValR1] = fmincon(@(B) indutility(ChR0,A0,D0,B),Gov0
       ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR0,d,g));
    ChR1 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR1),ChR0,options);
    TR1 = time(ChR1,A0);
    ShR1=ChR1(3)/(ChR1(3)+ChR1(4));
    ExtGovR1 = external(ChR1,A0,D0);
    difR1=GovR1(1)-GovR1(2);

%Some extra expenditure
d=0.2;
Gov0=Gov1;
Gov0(4)=0.2;
Gov0(3)=Gov1(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov2,GovVal2] = fmincon(@(B) indutility(Ch1,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch1,d));
    Ch2 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov2),Ch1,options);
    T2 = time(Ch2,A0);
    Sh2=Ch2(3)/(Ch2(3)+Ch2(4));
    ExtGov2 = external(Ch2,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR1;
    GovR0(4)=0.2;
    [GovR2,GovValR2] = fmincon(@(B) indutility(ChR1,A0,D0,B),GovR0
       ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR1,d,g));
```

```
    ChR2 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR2),ChR1,options);
    TR2 = time(ChR2,A0);
    ShR2=ChR2(3)/(ChR2(3)+ChR2(4));
    ExtGovR2 = external(ChR2,A0,D0);
    difR2=GovR2(1)-GovR2(2);

%Some extra expenditure
d=0.3;
Gov0=Gov2;
Gov0(4)=0.3;
Gov0(3)=Gov2(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov3,GovVal3] = fmincon(@(B) indutility(Ch2,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch2,d));
    Ch3 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov3),Ch2,options);
    T3 = time(Ch3,A0);
    Sh3=Ch3(3)/(Ch3(3)+Ch3(4));
    ExtGov3 = external(Ch3,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR2;
    GovR0(4)=0.3;
    [GovR3,GovValR3] = fmincon(@(B) indutility(ChR2,A0,D0,B),GovR0
       ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR2,d,g));
    ChR3 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR3),ChR2,options);
    TR3 = time(ChR3,A0);
    ShR3=ChR3(3)/(ChR3(3)+ChR3(4));
    ExtGovR3 = external(ChR3,A0,D0);
    difR3=GovR3(1)-GovR3(2);

%Some extra expenditure
d=0.4;
Gov0=Gov3;
Gov0(4)=0.4;
Gov0(3)=Gov3(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov4,GovVal4] = fmincon(@(B) indutility(Ch3,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch3,d));
    Ch4 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov4),Ch3,options);
    T4 = time(Ch4,A0);
    Sh4=Ch4(3)/(Ch4(3)+Ch4(4));
    ExtGov4 = external(Ch4,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR3;
    GovR0(4)=0.4;
    [GovR4,GovValR4] = fmincon(@(B) indutility(ChR3,A0,D0,B),GovR0
```

```
    ,[] ,[] ,[] ,[] ,...
        [] ,[] , @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR3,d,g));
    ChR4 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR4),ChR3,options);
    TR4 = time(ChR4,A0);
    ShR4=ChR4(3)/(ChR4(3)+ChR4(4));
    ExtGovR4 = external(ChR4,A0,D0);
    difR4=GovR4(1)-GovR4(2);

%Some extra expenditure
d=0.5;
Gov0=Gov4;
Gov0(4)=0.5;
Gov0(3)=Gov4(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov5,GovVal5] = fmincon(@(B) indutility(Ch4,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch4,d));
    Ch5 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov5),Ch4,options);
    T5 = time(Ch5,A0);
    Sh5=Ch5(3)/(Ch5(3)+Ch5(4));
    ExtGov5 = external(Ch5,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR4;
    GovR0(4)=0.5;
    [GovR5,GovValR5] = fmincon(@(B) indutility(ChR4,A0,D0,B),GovR0
    ,[] ,[] ,[] ,[] ,...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR4,d,g));
    ChR5 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR5),ChR4,options);
    TR5 = time(ChR5,A0);
    ShR5=ChR5(3)/(ChR5(3)+ChR5(4));
    ExtGovR5 = external(ChR5,A0,D0);
    difR5=GovR5(1)-GovR5(2);

%Some extra expenditure
d=0.6;
Gov0=Gov5;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov5(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov6,GovVal6] = fmincon(@(B) indutility(Ch5,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch5,d));
    Ch6 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov6),Ch5,options);
    T6 = time(Ch6,A0);
    Sh6=Ch6(3)/(Ch6(3)+Ch6(4));
    ExtGov6 = external(Ch6,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR5;
```

```
    GovR0(4)=d;
    [GovR6,GovValR6] = fmincon(@(B) indutility(ChR5,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR5,d,g));
    ChR6 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR6),ChR5,options);
    TR6 = time(ChR6,A0);
    ShR6=ChR6(3)/(ChR6(3)+ChR6(4));
    ExtGovR6 = external(ChR6,A0,D0);
    difR6=GovR6(1)-GovR6(2);

%Some extra expenditure
d=0.7;
Gov0=Gov6;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov6(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov7,GovVal7] = fmincon(@(B) indutility(Ch6,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch6,d));
    Ch7 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov7),Ch6,options);
    T7 = time(Ch7,A0);
    Sh7=Ch7(3)/(Ch7(3)+Ch7(4));
    ExtGov7 = external(Ch7,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR6;
    GovR0(4)=d;
    [GovR7,GovValR7] = fmincon(@(B) indutility(ChR6,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR6,d,g));
    ChR7 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR7),ChR6,options);
    TR7 = time(ChR7,A0);
    ShR7=ChR7(3)/(ChR7(3)+ChR7(4));
    ExtGovR7 = external(ChR7,A0,D0);
    difR7=GovR7(1)-GovR7(2);

%Some extra expenditure
d=0.8;
Gov0=Gov7;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov7(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov8,GovVal8] = fmincon(@(B) indutility(Ch7,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch7,d));
    Ch8 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov8),Ch7,options);
    T8 = time(Ch8,A0);
    Sh8=Ch8(3)/(Ch8(3)+Ch8(4));
    ExtGov8 = external(Ch8,A0,D0);
```

```
    %Restrined
    GovR0=GovR7;
    GovR0(4)=d;
    [GovR8,GovValR8] = fmincon(@(B) indutility(ChR7,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR7,d,g));
    ChR8 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR8),ChR7,options);
    TR8 = time(ChR8,A0);
    ShR8=ChR8(3)/(ChR8(3)+ChR8(4));
    ExtGovR8 = external(ChR8,A0,D0);
    difR8=GovR8(1)-GovR8(2);

%Some extra expenditure
d=0.9;
Gov0=Gov8;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov8(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov9,GovVal9] = fmincon(@(B) indutility(Ch8,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch8,d));
    Ch9 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov9),Ch8,options);
    T9 = time(Ch9,A0);
    Sh9=Ch9(3)/(Ch9(3)+Ch9(4));
    ExtGov9 = external(Ch9,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR8;
    GovR0(4)=d;
    [GovR9,GovValR9] = fmincon(@(B) indutility(ChR8,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR8,d,g));
    ChR9 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR9),ChR8,options);
    TR9 = time(ChR9,A0);
    ShR9=ChR9(3)/(ChR9(3)+ChR9(4));
    ExtGovR9 = external(ChR9,A0,D0);
    difR9=GovR9(1)-GovR9(2);

%Some extra expenditure
d=1;
Gov0=Gov9;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov9(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov10,GovVal10] = fmincon(@(B) indutility(Ch9,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch9,d));
    Ch10 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov10),Ch9,options);
    T10 = time(Ch10,A0);
```

```
    Sh10=Ch10(3)/(Ch10(3)+Ch10(4));
    ExtGov10 = external(Ch10,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR9;
    GovR0(4)=d;
    [GovR10,GovValR10] = fmincon(@(B) indutility(ChR9,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR9,d,g));
    ChR10 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR10),ChR9,options);
    TR10 = time(ChR10,A0);
    ShR10=ChR10(3)/(ChR10(3)+ChR10(4));
    ExtGovR10 = external(ChR10,A0,D0);
    difR10=GovR10(1)-GovR10(2);

%Some extra expenditure
d=1.1;
Gov0=Gov10;
Gov0(4)=1.1;
Gov0(3)=BFB(3)-1.1;
    %Unrestrined
    [Gov11,GovVal11] = fmincon(@(B) indutility(Ch10,A0,D0,B),Gov0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch10,d));
    Ch11 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov11),Ch10,options);
    T11 = time(Ch11,A0);
    Sh11=Ch11(3)/(Ch11(3)+Ch11(4));
    ExtGov11 = external(Ch11,A0,D0);
    %Restrined
    Gov0=GovR;
    Gov0(4)=1.1;
    [GovR11,GovValR11] = fmincon(@(B) indutility(ChR10,A0,D0,B),Gov0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR10,d,g));
    ChR11 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR1),ChR10,options);
    TR11 = time(ChR11,A0);
    ShR11=ChR11(3)/(ChR11(3)+ChR11(4));
    ExtGovR11 = external(ChR11,A0,D0);
    difR11=GovR11(1)-GovR11(2);

%Some extra expenditure
d=1.2;
Gov0=Gov11;
Gov0(4)=1.2;
Gov0(3)=Gov11(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov12,GovVal12] = fmincon(@(B) indutility(Ch11,A0,D0,B),Gov0
```

```
        ,[] ,[] ,[] ,[] ,...
        [] ,[] , @(B) govcon(A0,D0,B,Ch11,d));
    Ch12 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov2),Ch11,options);
    T12 = time(Ch12,A0);
    Sh12=Ch12(3)/(Ch12(3)+Ch12(4));
    ExtGov12 = external(Ch12,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR11;
    GovR0(4)=1.2;
    [GovR12,GovValR12] = fmincon(@(B) indutility(ChR11,A0,D0,B),GovR0
        ,[] ,[] ,[] ,[] ,...
        [] ,[] , @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR11,d,g));
    ChR12 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR12),ChR11,options);
    TR12 = time(ChR12,A0);
    ShR12=ChR12(3)/(ChR12(3)+ChR12(4));
    ExtGovR12 = external(ChR12,A0,D0);
    difR12=GovR12(1)-GovR12(2);

%Some extra expenditure
d=1.3;
Gov0=Gov12;
Gov0(4)=1.3;
Gov0(3)=Gov12(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov13,GovVal13] = fmincon(@(B) indutility(Ch12,A0,D0,B),Gov0
        ,[] ,[] ,[] ,[] ,...
        [] ,[] , @(B) govcon(A0,D0,B,Ch12,d));
    Ch13 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov13),Ch12,options);
    T13 = time(Ch13,A0);
    Sh13=Ch13(3)/(Ch13(3)+Ch13(4));
    ExtGov13 = external(Ch13,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR12;
    GovR0(4)=1.3;
    [GovR13,GovValR13] = fmincon(@(B) indutility(ChR12,A0,D0,B),GovR0
        ,[] ,[] ,[] ,[] ,...
        [] ,[] , @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR12,d,g));
    ChR13 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR13),ChR12,options);
    TR13 = time(ChR13,A0);
    ShR13=ChR13(3)/(ChR13(3)+ChR13(4));
    ExtGovR13 = external(ChR13,A0,D0);
    difR13=GovR13(1)-GovR13(2);

%Some extra expenditure
d=1.4;
Gov0=Gov13;
```

```
Gov0(4)=1.4;
Gov0(3)=Gov13(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov14,GovVal14] = fmincon(@(B) indutility(Ch13,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch13,d));
    Ch14 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov14),Ch13,options);
    T14 = time(Ch14,A0);
    Sh14=Ch14(3)/(Ch14(3)+Ch14(4));
    ExtGov14 = external(Ch14,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR13;
    GovR0(4)=1.4;
    [GovR14,GovValR14] = fmincon(@(B) indutility(ChR13,A0,D0,B),GovR0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR13,d,g));
    ChR14 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR14),ChR3,options);
    TR14 = time(ChR14,A0);
    ShR14=ChR14(3)/(ChR14(3)+ChR14(4));
    ExtGovR14 = external(ChR14,A0,D0);
    difR14=GovR14(1)-GovR14(2);

%Some extra expenditure
d=1.5;
Gov0=Gov14;
Gov0(4)=1.5;
Gov0(3)=Gov14(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov15,GovVal15] = fmincon(@(B) indutility(Ch14,A0,D0,B),Gov0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch14,d));
    Ch15 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov15),Ch14,options);
    T15 = time(Ch15,A0);
    Sh15=Ch15(3)/(Ch15(3)+Ch15(4));
    ExtGov15 = external(Ch15,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR14;
    GovR0(4)=1.5;
    [GovR15,GovValR15] = fmincon(@(B) indutility(ChR14,A0,D0,B),GovR0,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR14,d,g));
    ChR15 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR15),ChR14,options);
    TR15 = time(ChR15,A0);
    ShR15=ChR15(3)/(ChR15(3)+ChR15(4));
    ExtGovR15 = external(ChR15,A0,D0);
    difR15=GovR15(1)-GovR15(2);
```

```
%Some extra expenditure
d=1.6;
Gov0=Gov15;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov15(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov16,GovVal16] = fmincon(@(B) indutility(Ch15,A0,D0,B),Gov0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch15,d));
    Ch16 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov16),Ch15,options);
    T16 = time(Ch16,A0);
    Sh16=Ch16(3)/(Ch16(3)+Ch16(4));
    ExtGov16 = external(Ch16,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR15;
    GovR0(4)=d;
    [GovR16,GovValR16] = fmincon(@(B) indutility(ChR15,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR15,d,g));
    ChR16 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR16),ChR15,options);
    TR16 = time(ChR6,A0);
    ShR16=ChR16(3)/(ChR16(3)+ChR16(4));
    ExtGovR16 = external(ChR16,A0,D0);
    difR16=GovR16(1)-GovR16(2);

%Some extra expenditure
d=1.7;
Gov0=Gov16;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov16(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov17,GovVal17] = fmincon(@(B) indutility(Ch16,A0,D0,B),Gov0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch16,d));
    Ch17 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov17),Ch16,options);
    T17 = time(Ch17,A0);
    Sh17=Ch17(3)/(Ch17(3)+Ch17(4));
    ExtGov17 = external(Ch17,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR16;
    GovR0(4)=d;
    [GovR17,GovValR17] = fmincon(@(B) indutility(ChR16,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR16,d,g));
    ChR17 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR17),ChR16,options);
```

```
    TR17 = time(ChR17,A0);
    ShR17=ChR17(3)/(ChR17(3)+ChR17(4));
    ExtGovR17 = external(ChR17,A0,D0);
    difR17=GovR17(1)-GovR17(2);

%Some extra expenditure
d=1.8;
Gov0=Gov17;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov17(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov18,GovVal18] = fmincon(@(B) indutility(Ch17,A0,D0,B),Gov0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch17,d));
    Ch18 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov18),Ch17,options);
    T18 = time(Ch18,A0);
    Sh18=Ch18(3)/(Ch18(3)+Ch18(4));
    ExtGov18 = external(Ch18,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR17;
    GovR0(4)=d;
    [GovR18,GovValR18] = fmincon(@(B) indutility(ChR17,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR17,d,g));
    ChR18 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR18),ChR17,options);
    TR18 = time(ChR18,A0);
    ShR18=ChR18(3)/(ChR18(3)+ChR18(4));
    ExtGovR18 = external(ChR18,A0,D0);
    difR18=GovR18(1)-GovR18(2);

%Some extra expenditure
d=1.9;
Gov0=Gov18;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov18(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov19,GovVal19] = fmincon(@(B) indutility(Ch18,A0,D0,B),Gov0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch18,d));
    Ch19 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov19),Ch18,options);
    T19 = time(Ch19,A0);
    Sh19=Ch19(3)/(Ch19(3)+Ch19(4));
    ExtGov19 = external(Ch19,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR18;
    GovR0(4)=d;
```

```
    [GovR19,GovValR19] = fmincon(@(B) indutility(ChR18,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
         [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR18,d,g));
    ChR19 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR19),ChR18,options);
    TR19 = time(ChR19,A0);
    ShR19=ChR19(3)/(ChR19(3)+ChR19(4));
    ExtGovR19 = external(ChR19,A0,D0);
    difR19=GovR19(1)-GovR19(2);

%Some extra expenditure
d=2;
Gov0=Gov19;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov19(3)-0.1;
    %Unrestrined
    [Gov20,GovVal20] = fmincon(@(B) indutility(Ch19,A0,D0,B),Gov0
        ,[],[],[],[],...
         [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch19,d));
    Ch20 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov20),Ch19,options);
    T20 = time(Ch20,A0);
    Sh20=Ch20(3)/(Ch20(3)+Ch20(4));
    ExtGov20 = external(Ch20,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR19;
    GovR0(4)=d;
    [GovR20,GovValR20] = fmincon(@(B) indutility(ChR19,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
         [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR19,d,g));
    ChR20 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR20),ChR19,options);
    TR20 = time(ChR20,A0);
    ShR20=ChR20(3)/(ChR20(3)+ChR20(4));
    ExtGovR20 = external(ChR20,A0,D0);
    difR20=GovR20(1)-GovR20(2);

    %Some extra expenditure
d=3;
Gov0=Gov20;
Gov0(4)=d;
Gov0(3)=Gov20(3)-1;
    %Unrestrined
    [Gov30,GovVal30] = fmincon(@(B) indutility(Ch20,A0,D0,B),Gov0
        ,[],[],[],[],...
         [],[], @(B) govcon(A0,D0,B,Ch20,d));
    Ch30 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,Gov30),Ch20,options);
    T30 = time(Ch30,A0);
    Sh30=Ch30(3)/(Ch30(3)+Ch30(4));
```

```
    ExtGov30 = external(Ch30,A0,D0);
    %Restrined
    GovR0=GovR20;
    GovR0(4)=d;
    [GovR30,GovValR30] = fmincon(@(B) indutility(ChR20,A0,D0,B),GovR0
        ,[],[],[],[],...
        [],[], @(B) govcon2(A0,D0,B,ChR20,d,g));
    ChR30 = fsolve(@(S) problem(S,A0,D0,GovR20),ChR19,options);
    TR30 = time(ChR30,A0);
    ShR30=ChR30(3)/(ChR30(3)+ChR30(4));
    ExtGovR30 = external(ChR30,A0,D0);
    difR30=GovR30(1)-GovR30(2);
```

A.4.2 problem

```
function P = problem(S,A,D,B)
P(1) = (1-B(1)) - (1-D(1))/D(1)*(S(1)/S(2))*(1+A(1)+A(2)*S(3)^A(3)) - (2*D(2)*S
    (3)*S(4)^2 + D(3))/D(1)*(S(1)/S(2))^(1-D(1));
P(2) = (1-B(2)) - (1-D(1))/D(1)*(S(1)/S(2))*(1+A(4)-A(5)*S(4)^A(6)) - (2*D(2)*S
    (3)^2*S(4) + D(4))/D(1)*(S(1)/S(2))^(1-D(1));
P(3) = B(3) + (1-B(1))*S(3) + (1-B(2))*S(4) - S(1);
P(4) = A(7) - (1+A(1)+A(2)*S(3)^A(3))*S(3) - (1+A(4)-A(5)*S(4)^A(6))*S(4) - S(2)
    ;
end
```

A.4.3 fbproblem

```
function P = fbproblem(S,A,D)
P(1) = 1 - (1-D(1))/D(1)*(S(1)/S(2))*(1+A(1)+A(2)*S(3)^A(3)+A(2)*A(3)*S(3)^A(3))
     - (2*D(2)*S(3)*S(4)^2 + D(3))/D(1)*(S(1)/S(2))^(1-D(1));
P(2) = 1 - (1-D(1))/D(1)*(S(1)/S(2))*(1+A(4)-A(5)*S(4)^A(6)-A(5)*A(6)*S(4)^A(6))
     - (2*D(2)*S(3)^2*S(4) + D(4))/D(1)*(S(1)/S(2))^(1-D(1));
P(3) = S(3) + S(4)-S(1);
P(4) = A(7) - (1+A(1)+A(2)*S(3)^A(3))*S(3) - (1+A(4)-A(5)*S(4)^A(6))*S(4) - S(2)
    ;
end
```

A.4.4 indutility

```
function v = indutility(S0,A,D,B)
options = optimoptions('fsolve','MaxIterations',1e7,'MaxFunctionEvaluations',1
    e20);
C = fsolve(@(S) problem(S,A,D,B),S0,options);
v= -(C(1)^D(1)*C(2)^(1-D(1))-D(2)*C(3)^2*C(4)^2-D(3)*C(3)-D(4)*C(4));
end
```

A.4.5 time

```
function T = time(S,A)
```

```
T(1) = (A(1)+A(2)*S(3)^A(3))*24*60;
T(2) = (A(4)-A(5)*S(4)^A(6))*24*60;
end
```

A.4.6 govcon

```
function [c,ceq] = govcon(A,D,B,S0,d)
% Inequality Constraints
c = [];
% Equality Constraints
options = optimoptions('fsolve','MaxIterations',1e7,'MaxFunctionEvaluations',1
    e20);
C = fsolve(@(S) problem(S,A,D,B),S0,options);
ceq = [B(4)+B(3) - B(1)*C(3)-B(2)*C(4),B(4)-d];
end
```

A.4.7 govcon2

```
function [c,ceq] = govcon2(A,D,B,S0,d,g)
% Inequality Constraints
c = [];
% Equality Constraints
options = optimoptions('fsolve','MaxIterations',1e7,'MaxFunctionEvaluations',1
    e20);
C = fsolve(@(S) problem(S,A,D,B),S0,options);
ceq = [B(4)+B(3) - B(1)*C(3)-B(2)*C(4),B(4)-d,B(3)-g];
end
```

A.4.8 external

```
function E=external(S,A,D)
E(1) = (1-D(1))/D(1)*(S(1)/S(2))*(A(2)*A(3)*S(3)^A(3));
E(2) = -(1-D(1))/D(1)*(S(1)/S(2))*(A(5)*A(6)*S(4)^A(6));
end
```

A.4.9 utility

```
function U = utility(S,D)
U= -(S(1)^D(1)*S(2)^(1-D(1))-D(2)*S(3)^2*S(4)^2-D(3)*S(3)-D(4)*S(4));
end
```

A.4.10 fbcon

```
function [c,ceq] = fbcon(S,A)
% Inequality Constraints
c = [];
% Equality Constraints
ceq = [S(3)+S(4)-S(1) , A(7) - (1+A(1)+A(2)*S(3)^A(3))*S(3) - (1+A(4)-A(5)*S(4)^
    A(6))*S(4) - S(2)];
end
```