INSTITUTO DE ECONOMÍA

TESIS de MAGÍSTER

2018

Información Conjuntamente Verificable en un Problema de Agencia

Juan Andrés Croquevielle Rendic

www.economia.puc.cl

Información Conjuntamente Verificable en un Problema de Agencia

Juan Andrés Croquevielle

Entrega Final Tesis

Resumen

Un principal posee un objeto, y puede dárselo a un agente. Este último desea obtenerlo, y conoce la utilidad que obtendría su contraparte si decide entregarlo, mientras que esto es incierto para el principal. No obstante, existe un test que revela información significativa para este último. Dicha prueba es costosa para estos individuos, y su realización requiere de la aprobación de ambos. Se muestra que, si el test es *infalible*, el mecanismo óptimo depende del costo que significa la verificación para el principal, así como de sus creencias a priori acerca del *tipo* del agente. Si la verificación es defectuosa, las decisiones óptimas del principal están fuertemente ligadas a la magnitud del ruido, y al costo en que incurre el agente al realizar el test. En base a estos elementos, puede convenirle dar el objeto a todo evento, sin hacer el test; o bien puede ser óptimo informarse siempre antes de entregar el bien.

1. Introducción

Imaginemos el problema entre un gobierno central y el alcalde de un pueblo. El primero está evaluando la posibilidad de invertir en una nueva carretera en las cercanías del pueblo; pero no sabe con certeza en qué medida será utilizada. Dicha información la posee el experimentado alcalde, a quien lo único que le interesa es que este bien público sea construido, para incrementar su prestigio político.

Podemos pensar que el alcalde tiene conversaciones con el gobierno, en las cuales le detalla el uso que tendría esta carretera. Evidentemente, podría mentirle. Para protegerse contra esta última posibilidad, el gobierno puede proponerle verificar, de algún modo, la veracidad de lo que está diciendo. Es razonable pensar que la información privada del alcalde es constatable, mediante algún estudio o informe, cuya realización y examinación es costosa para ambos individuos. El alcalde, quien tiene contactos y recursos que se necesitan para llevar a cabo dicho análisis, podría eventualmente oponerse a la propuesta hecha por el gobierno. Sin embargo, la decisión sobre el levantamiento del bien público sigue estando en manos de la administración central. ¿Qué le conviene hacer, pues, al gobierno? ¿Invertir en la carretera, a ojos cerrados? ¿Supeditar su construcción a un nivel de uso mínimo, apoyándose en evidencia?

Esta tesis analiza el problema de un principal que posee un objeto, pudiendo dárselo a un agente interesado. Este último individuo siempre se ve beneficiado al obtener el bien, mientras que al primero le gustaría entregárselo solamente en ciertos escenarios. Básicamente, la utilidad que obtiene el principal al dar el objeto depende del *tipo* del agente, que es información privada de este último. Dicho tipo se resume en una variable θ, que el principal no conoce con exactitud. Supondremos, además, que no pueden efectuarse pagos monetarios para intercambiar el bien; y que ambos individuos son neutrales al riesgo.

Claramente, los objetivos de ambos individuos no están alineados: al principal le gustaría entregar el bien sólo para ciertos valores de θ, mientras que el agente siempre está interesado en obtenerlo. En el ejemplo dado previamente, el principal sería el gobierno central. El objeto sería el bien público, que puede ser construido o no. El alcalde del pueblo es el agente, al que solamente le interesa que la carretera sea construida, sin importarle si será utilizada mucho, poco o nada. Evidentemente, el grado de utilización de la carretera corresponde a θ.

Por otra parte, existe un test que revela información relevante acerca del tipo del agente. Dicha prueba es costosa para los dos individuos, y requiere de la aprobación de ambas partes para ser llevada a cabo. Nos situamos, entonces, en un contexto de información *conjuntamente* verificable, y en el que no es posible hacer transferencias monetarias. El principal debe determinar si entregar o no el bien al agente; y la única herramienta que tiene a su disposición es un test, que se lleva a cabo con el consentimiento de ambos individuos.

En la especificación principal, se considera un test que revela perfectamente el tipo del agente. En este escenario, se ha diseñado el mecanismo que maximiza la utilidad esperada del principal. Dicho mecanismo especifica la probabilidad con que este último invita al agente a rendir el test, y la probabilidad con que le entrega el objeto.

Los resultados muestran que el principal tiende a adoptar posiciones extremas: si el costo de verificar al agente es demasiado alto en relación a lo que arriesga dándole el bien "a ciegas”, entonces lo óptimo es entregar el objeto *siempre*, sin evidencia alguna. Si el costo de verificar a su contraparte es bajo en relación a lo que espera perder al darle el bien, el principal prefiere “jugar sobre seguro”: solamente entrega el bien tras haber verificado que el agente tiene un θ lo suficientemente alto.

En una segunda instancia, se ha levantado el supuesto de infalibilidad del test. En particular, se plantea un escenario en que la verificación falla con una cierta probabilidad. Si el ruido que se genera es lo suficientemente bajo en relación al costo en que incurre el agente al realizar el test, se tiene que el mecanismo óptimo no cambia. La utilidad esperada del principal se mantiene intacta en dicho caso. Si la verificación es muy costosa para el agente, se tiene que el test puede fallar la mayoría de las veces, y aún así mantenerse los resultados iniciales.

Si el ruido que se genera es alto en relación al costo del agente, el principal es menos propenso que antes a levantar evidencia. Mientras más defectuoso sea el test, es menos probable que la verificación tenga lugar, y el principal entregará el bien sin recabar información adicional. Lo mismo ocurre si disminuye el costo en que incurre el agente al rendir el test. Un aumento en el costo de verificación para el principal, trae la misma consecuencia.

Una diferencia interesante entre ambos contextos, es que, cuando el test es infalible, el principal no toma en cuenta el costo que significa la verificación para el agente. Si la prueba es ruidosa, en cambio, dicho parámetro juega un rol crucial. Por otra parte, el principal se ve casi siempre perjudicado en el escenario de una prueba errática.

Hasta donde sabemos, no existe literatura que explore un escenario de estas características. En la mayoría de los problemas de agencia, las transferencias monetarias juegan un rol fundamental. En papers más recientes, se han estudiado contextos sin transferencias; introduciendo evidencia en los distintos modelos. Pero, en aquellos problemas similares al estudiado en este trabajo, la decisión de verificar la información es siempre unilateral. Esa es, justamente, una contribución de este trabajo: abrir la posibilidad de que una de las partes se oponga al levantamiento de evidencia.

¿Por qué excluir la posibilidad de realizar transferencias? Este supuesto parece bastante fuerte, pero tiene sentido en muchas ocasiones. Volviendo al ejemplo planteado al inicio, quizás un pago entre el alcalde y el gobierno podría considerarse un acto de corrupción. O bien, compartir el costo de la carretera podría ser contraproducente, en caso de que el pueblo carezca de los recursos para levantar un bien público de este tipo. Como en estos casos, son muchas las situaciones en que, por razones prácticas o éticas, las transferencias monetarias dejan de ser una componente razonable para solucionar problemas de este tipo.

Esta tesis se estructura como sigue. En la sección 2, se hace una revisión de literatura previa relacionada. Después, se expone el modelo. En la sección 4, se reduce de manera general el problema que enfrenta el principal. En la sección 5, se analiza el caso de un test infalible. Luego, se estudia el problema suponiendo verificación imperfecta. La sección 7 concluye y discute extensiones sugestivas. Por último, se deja un apartado bibliográfico y 17 anexos, dedicados a demostraciones.

2. Literatura Previa

Hay 3 papers íntimamente ligados al ámbito de estudio de esta tesis. El primero es Ben-Porath et al. (2014), en el cual se estudia el mecanismo óptimo a diseñar por un principal que puede asignar un objeto entre múltiples agentes. La utilidad que obtiene al dárselo a un agente cualquiera es información privada de dicho individuo; mientras que la obtención del bien conlleva un premio predeterminado e idéntico para cada agente. El principal puede verificar, a un cierto costo que difiere entre los participantes, el tipo de cualquier individuo. Este trabajo difiere no sólo en la reducción del problema a un agente, sino en la naturaleza de la verificación; conceptualmente son muy distintas. Aquí, la verificación es costosa tanto para el principal como para el agente, y solamente tiene lugar bajo la aprobación de ambas partes.

Otro estudio, bastante similar en cuanto al escenario planteado en Ben-Porath et al. (2014), es el de Ginzburg (2018). Se diferencia en que ahora son los agentes quienes toman la decisión de dar o no el test, el cual es costoso y perfectamente informativo de su tipo. El principal, observando los resultados, determina simplemente a quién entregar el bien en cuestión. Se diferencia, tanto con el trabajo mencionado como con la idea de esta tesis, en que se plantea el problema como un juego bayesiano con reglas pre-establecidas; no hay diseño de un mecanismo realmente. Además, nuevamente la decisión respecto de la realización de la prueba es unilateral.

Por último, Halac and Yared (2017) estudian el problema entre un principal y un delegado que debe tomar una acción. El delegado está mejor informado, pero sesgado a tomar ciertas decisiones que se alejan de lo que haría el principal, óptimamente. El principal puede verificar la información relevante, acción que es costosa para ambos individuos, acotando luego el campo de acción del otro agente. Claramente, en este caso es el jugador informado quien toma la decisión, lo cual difiere de la idea en este trabajo, pero un elemento en común es que, una vez el principal decide verificar, el delegado puede oponerse a esta acción.

Refiriéndonos a otras áreas relacionadas, tenemos la literatura sobre señalización, iniciada por Spence (1973). En ella, se estudia el problema entre un agente y un principal, donde el tipo del agente es información privada, y puede ser señalizada tomando acciones costosas. En estos modelos, se condiciona el costo de enviar cada señal, al tipo del individuo. En este estudio, sin embargo, el test revela información (ya sea completa o incompleta) relacionada con el verdadero tipo del agente; así, un individuo de un cierto tipo no puede imitar deliberadamente el resultado que obtendría un agente de otro tipo. Por otro lado, la realización del test depende de ambas partes; y ambos incurren en un costo determinado.

Alejándonos de señalización, Townsend (1979) y otros (Gale and Hellwig (1985), Border and Sobel (1987) y Mookherjee and Png (1989)) estudian problemas donde el tipo del agente puede ser verificado, a un cierto costo que depende del tipo del agente. Estos papers difieren acerca de quién incurre en el costo, quién decide si se lleva o no a cabo la verificación y del enfoque que se da al problema, pero todos permiten transferencias monetarias entre los individuos; lo cual constituye una diferencia fundamental con el tipo de situaciones que se plantean en este estudio.

Este trabajo se relaciona, asimismo, con la literatura sobre diseño de mecanismos en que se excluyen transferencias monetarias al principal, introduciendo en cambio evidencia como una componente fundamental a considerar. Green and Laffont (1986) plantean un modelo en que los mensajes que les es posible enviar a cada individuo, están acotados por su propio tipo. Kartik and Tercieux (2012) generalizan dicho modelo. Pero ambos papers (junto con Bull and Watson (2007) y Ben-Porath et al. (2017)) se enfocan en cuestiones muy generales; tales como analizar el tipo de *Social Choice Functions* (deseos del principal) que son implementables distintos caso. No resuelven problemas concretos, con mecanismos concretos.

3. Modelo

Supongamos un principal, dueño de un objeto, y un agente, interesado en obtenerlo. Entregándole el bien, el principal obtiene una utilidad $\theta \in \Theta \equiv [a, b]$, con $-\infty < a < 0$, con $0 < b < \infty$, y donde el valor que toma θ es información privada del agente. A priori, lo único que sabe el principal sobre dicha variable es que sigue una distribución acumulada $F(\theta)$, con una función de densidad continua $f(\theta) = F'(\theta)$; donde $f(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \Theta$.

El agente, en cambio, obtiene un pago fijo igual a 1 en caso de recibir el bien. Como veremos, esta normalización no incide en ningún resultado; se ha dispuesto por simplicidad solamente. De esta forma, la probabilidad esperada de que el agente se quede con el objeto se interpreta directamente como su ganancia esperada.

Supondremos, por otra parte, que no es posible realizar transferencias monetarias entre estos individuos. Lo único que se tranza es el objeto; con una cierta probabilidad. Ahora bien, existe un test que desvela información relevante respecto de θ. La realización de esta prueba tiene un costo de c_p para el principal, y de c_a para el agente, donde $0 < c_p < b$, y $0 < c_a < 1$. De llevarse a cabo, el test arroja un resultado $s \in S$, donde $S \equiv [s_0, s_1]$, con $-\infty < s_0 < a$ y $b < s_1 < \infty$. Dicha variable es aleatoria, y sigue una distribución de probabilidad condicional en el tipo del agente. Esto es, s proviene de una distribución acumulada $G(\cdot|\theta)$, con una función de densidad asociada que denotaremos por $g(\cdot|\theta)$.

El timing con el que se suceden los hechos es el siguiente: primero, el agente conoce su propio tipo. En base al mismo, envía un mensaje $m \in M$. Tras recibir este mensaje, el principal puede proponerle o no hacer el test. Si le llega esta propuesta, el agente debe tomar la decisión $t \in T \equiv \{0, 1\}$, donde $t = 0$ indica que rechaza la propuesta, y $t = 1$ indica que acepta realizar la prueba. Por último, tomando en cuenta el mensaje inicial y el (eventual) resultado del test, el principal decide si darle o no el objeto.

Teniendo esto en cuenta, el principal debe determinar 3 cosas. En primer lugar, debe establecer el conjunto M del cual el agente escogerá el mensaje a enviar, una vez conozca su tipo. En segundo lugar, debe definir una función $q : M \to [0, 1]$ que determine la probabilidad con que invitará al agente a realizar el test, en base al mensaje recibido. Por último, tiene que definir la probabilidad con que entregará el objeto al agente. Esto implica, en realidad, definir 3 funciones distintas, según los distintos escenarios con los que se puede encontrar el principal.

Primero, puede ocurrir que no se efectúe la invitación a rendir el test. Dado un mensaje m cualquiera, esto acontece con probabilidad $(1 - q(m))$. En dicho caso, el principal debe especificar una función $\pi_1 : M \to [0,1]$ que disponga, en base al mensaje recibido, la probabilidad con que dará el objeto.

En un segundo escenario, el principal sí invita al agente a rendir el test, y este último acepta dicha propuesta. Dado un mensaje m cualquiera, esto acontece con probabilidad $q(m)$, condicional en que el agente escoja $t = 1$. En dicho caso, la verificación tiene lugar, y el principal observa el resultado del test. Luego, debe definir una función $\pi_2 : M \times \Theta \to [0,1]$ que determine, en base al mensaje recibido y al resultado del test, la probabilidad con que dará el bien. El resultado del test corresponde a s, recordemos, y sigue una distribución condicional en el tipo del agente.

En un tercer escenario, el principal invita al agente a rendir el test, y este último rechaza la invitación. Esto ocurre con probabilidad $q(m)$, y en caso de que $t = 0$. Luego, el principal debe definir una función $\pi_3 : M \to [0,1]$ que disponga, en base al mensaje recibido, la probabilidad con que entregará el objeto a su contraparte. Notemos que $\pi_1(m)$ y $\pi_3(m)$ no son redundantes, puesto que aplican en escenarios mutuamente excluyentes.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos escribir la utilidad esperada del agente. Supongamos el agente es de tipo θ. Luego, denotaremos la utilidad esperada de este individuo como $EU_A(\theta, m, t)$. Esa es la utilidad que espera este agente al enviar un mensaje m y tomar una decisión t respecto de la realización del test, en caso de que le propongan hacerlo. Dado un mecanismo $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$ cualquiera, y suponiendo que el agente es neutral al riesgo, dicha utilidad viene dada por

$$EU_A(\theta, m, t) = (1 - q(m))\pi_1(m) + q(m)\pi_3(m)(1-t) + q(m)\,\mathbb{E}[\,\pi_2(m,s)\,|\,\theta\,]\,t - q(m)c_a\,t.$$

Notemos que esta es la forma general de expresar la utilidad esperada del agente; y puede ser más fácil de entender al descomponerla según t. Si $t = 0$, tendríamos

$$EU_A(\theta, m, t = 0) = (1 - q(m))\pi_1(m) + q(m)\pi_3(m).$$

Básicamente, al tomar la decisión $t = 0$, el agente jamás incurre en el costo asociado a la realización del test. De este modo, su utilidad viene dada por la probabilidad de que le entreguen el objeto. ¿Cuál es la probabilidad de llevárselo? Dado el mensaje m enviado, hay una probabilidad $(1 - q(m))$ de que el principal no proponga hacer el test, en cuyo caso le entrega el bien con probabilidad $\pi_1(m)$. Por otra parte, si es que la propuesta tiene lugar (lo que sucede con probabilidad $q(m)$), el agente rechazará la oferta, y la probabilidad de llevarse el objeto en dicho caso está dada por $\pi_3(m)$.

Por otro lado,

$$EU_A(\theta, m, t = 1) = (1 - q(m))\pi_1(m) + q(m)\Big(\,\mathbb{E}[\,\pi_2(m,s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big).$$

Al escoger $t = 1$, el agente está tomando la decisión de hacer la prueba, en caso de una eventual invitación. En dicha ciscunstancia, que ocurre con probabilidad $q(m)$, la probabilidad esperada de llevarse el objeto está dada por $\mathbb{E}[\pi_2(m,s)\,|\,\theta]$. Recordemos que la función $\pi_2(m,s)$ toma en cuenta tanto el mensaje enviado, como el resultado del test. Pero, dado un tipo θ, el test puede arrojar infinitos resultados diferentes, en principio. Por tanto, el agente toma en cuenta la probabilidad esperada de llevarse el objeto, que depende de cómo esté definida la función $\pi_2(m,s)$, y de la distribución de probabilidad asociada al resultado del test. Esta última, como dijimos, está condicionada por el verdadero tipo del agente. Por otra parte, el agente incurre en el costo c_a al realizar la prueba. Tal como ocurría antes, existe la posibilidad de que el principal no lo invite a hacer el test, en cuyo caso el agente se lleva el objeto con probabilidad $\pi_1(m)$, sin ningún costo.

Hemos establecido la utilidad del agente al enviar un mensaje m cualquiera, y tomando una decisión t cualquiera. Sin embargo, vamos a suponer que este invididuo maximiza su utilidad esperada. Esto significa que siempre enviará un mensaje $m^*(\theta)$, el cual, en conjunto con una decisión óptima respecto de la realización del test, $t^*(\theta)$, maximice $EU_A(\theta,m,t)$. Denominaremos a la combinación $m^*(\theta)$, $t^*(\theta)$ como la estrategia óptima del agente, o funciones de mejores respuestas.

Dichas funciones $m^* : \Theta \to M$ y $t^* : \Theta \to T$, están definidas de tal forma que, para cualquier $\theta \in \Theta$, se cumpla la condición

$$EU_A(\theta, m^*(\theta), t^*(\theta)) \geq EU_A(\theta, m, t),$$

para todo $m \in M, t \in T$.

Caractericemos ahora la utilidad esperada del principal, que denotaremos por EU_P. Esta depende, evidentemente, de cómo haya sido diseñado el mecanismo. Vamos a suponer que el principal también maximiza su utilidad esperada, de modo que el diseño de $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$ tendrá ese objetivo. Ahora bien, debe anticiparse al hecho de que el agente, para un θ cualquiera, actuará según su estrategia óptima. Luego, sabe que el agente enviará un mensaje $m^*(\theta)$, y tomará una decisión $t^*(\theta)$ en caso de que lo invite a dar el test. Teniendo esto en cuenta, y suponiendo que el principal también es neutral al riesgo, tenemos que su utilidad esperada está dada por

$$\begin{aligned} EU_P = \int_a^b \Bigg(\theta \Big[&(1 - q(m^*(\theta)))\pi_1(m^*(\theta)) + q(m^*(\theta))\pi_3(m^*(\theta))(1 - t^*(\theta)) \\ &+ q(m^*(\theta))\, \mathbb{E}[\, \pi_2(m^*(\theta), s) \,|\, \theta \,]\, t^*(\theta) \Big] - \, c_p q(m^*(\theta)) t^*(\theta) \Bigg) f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Básicamente, cada $\theta \in [a,b]$, tiene una probabilidad de ocurrencia, dada por $f(\theta)$. En dicho evento, la utilidad que obtiene el principal está subordinada a θ y al mecanismo diseñado; que determinará la probabilidad de entregarle el objeto al agente, y la de realizar el test. Ambas dependen, finalmente, de las funciones $q(m)$, $\pi_1(m)$, $\pi_2(m,s)$, y $\pi_3(m)$; de $G(\cdot|\theta)$; del conjunto M; y de las funciones de mejor respuesta del agente.

En este trabajo, se analizará el problema de maximización de la utilidad esperada del principal, al que llamaremos, por simplicidad, *problema del principal*. Este último, como ya se ha dicho, consiste en el diseño de un mecanismo $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$ que maximice la utilidad esperada del principal.

4. Reducción General

En este sección se reduce el problema que enfrenta el principal, acotando sistemáticamente –y sin perder generalidad– la búsqueda del mecanismo $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$ óptimo. Dicha reducción se realiza en 2 pasos.

Principio de la Revelación

En un primera instancia, hemos demostrado que es posible utilizar un argumento análogo al clásico *Principio de la Revelación*. De este modo, podemos enfocarnos en mecanismos directos –aquellos en que $M \equiv \Theta$–; y en los cuales la estrategia óptima del agente es revelar su tipo.

Principio de la Revelación: Dado un mecanismo cualquiera, $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$; siempre existe un mecanismo directo, $\langle \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$, donde

$$\sigma(\theta) \equiv q(m^*(\theta)),$$

$$\varpi_1(\theta) \equiv \pi_1(m^*(\theta)),$$

$$\varpi_2(\theta, s) \equiv \pi_2(m^*(\theta), s),$$

$$\varpi_3(\theta) \equiv \pi_3(m^*(\theta));$$

y tal que:

(i) La utilidad esperada del principal y la del agente son iguales a las que obtenían originalmente.

(ii) La estrategia óptima del agente está conformada por $\theta_m^*(\theta) = \theta$ y por $t^*(\theta)$, donde θ_m corresponde al mensaje que entrega el agente en un mecanismo directo, y donde $t^*(\theta)$ corresponde a la misma función de mejor respuesta que en el mecanismo original.

La demostración formal se encuentra en el Anexo 1, pero la intuición es la misma que en la versión clásica de este principio[1]: el principal define las funciones $\sigma(\theta)$, $\varpi_1(\theta)$, $\varpi_2(\theta, s)$ y $\varpi_3(\theta)$ de forma tal que *simulen* lo que hubiera ocurrido en el mecanismo original. Luego, el principal está pidiéndole directamente su tipo al agente, comprometiéndose a "jugar por él". Por tanto, a este último le conviene simplemente revelar su verdadero tipo, de modo que el equilibrio del juego nuevo es el mismo que antes; manteniéndose inalteradas las utilidades

[1] En dicha versión, el agente debe determinar solamente un mensaje a enviar, sin existir una segunda decisión como en este modelo. Debido a lo anterior, se realizó la demostración, adecuándola a las características específicas de este modelo.

esperadas respectivas.

En lo que sigue del trabajo, nos restringiremos a estudiar mecanismos directos, de la forma $\langle \boldsymbol{\Theta}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$. Desde ahora, denotaremos dichos mecanismos simplemente como $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$, dado que no hay pérdida de generalidad en definir siempre $M \equiv \Theta$. Asimismo, denotaremos los mensajes del agente por θ_m, dejando claro que el mensaje del agente consiste en enunciar su tipo. Puede mentir, obviamente, enviando algún $\theta_m \neq \theta$, pero sabemos que no hay pérdida de generalidad en incluir una restricción de compatibilidad de incentivos; según la cual $\theta^*_m(\theta) = \theta$.

Principio del Acuerdo

Se ha demostrado que podemos restringirnos a mecanismos en los cuales el agente jamás rechaza una invitación del principal a rendir el test. Por esta razón, el que sigue ha sido llamado *Principio del Acuerdo*.

Principio del Acuerdo: Supongamos un mecanismo directo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$ cualquiera, en el cual $\theta^*_m(\theta) = \theta$, y en el que $t^*(\theta)$ corresponde a la función de mejor respuesta referente a la realización del test. Luego, siempre existe un mecanismo directo $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$, definido como

$$\sigma(\theta_m) = \begin{cases} q(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 1 \\ \\ 0 & si \quad t^*(\theta_m) = 0 \end{cases},$$

$$\varpi_1(\theta_m) = \begin{cases} \pi_1(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 1 \\ \\ \pi_1(\theta_m)(1 - q(\theta_m)) + \pi_3(\theta_m)q(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 0 \end{cases},$$

$$\varpi_2(\theta_m, s) \equiv \pi(\theta_m, s),$$

$$\varpi_3(\theta_m) \equiv 0;$$

y tal que:

(i) Las utilidades esperadas del principal y el agente son iguales a las que obtenían en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$.

(ii) La estrategia óptima del agente respecto al mensaje a enviar sigue siendo $\theta^*_m(\theta) = \theta$.

(iii) El agente jamás rechaza una invitación del principal a realizar el test. Es decir, el nuevo mecanismo induce $t^*(\theta) \equiv 1$.

La demostración de este principio se encuentra en el Anexo 2. Intuitivamente, lo que hace el mecanismo $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$ es tomar aquellos equilibrios en que $t^*(\theta) =$ era igual a 0, y reformular las funciones $q(\theta)$, $\pi_1(\theta)$ y $\pi_3(\theta)$ para que se produzca el mismo resultado que antes; pero en ausencia de una invitación del principal a realizar el test. Básicamente, el principal se está ahorrando invitaciones que sabe serán rechazadas.

Respecto del inciso (*iii*), notemos que, justamente, ahora puede haber ocasiones en que el principal jamás le propone al agente realizar el test. En esos casos, la decisión respecto de t se vuelve irrelevante, obviamente. Debido a lo anterior, justamente, podemos imponer que $t^*(\theta) = 1$ en dichos escenarios. Cuando la probabilidad de recibir una invitación del principal es positiva, hemos demostrado que $t^*(\theta) = 1$.

Recopilando, hay varias conclusiones que podemos sacar de los 2 principios mostrados. Además de fijar $M \equiv \Theta$, podemos definir 3 elementos de una forma específica, la cual simplificará el problema, y no nos hace perder generalidad. Estos son,

$$\theta_m^*(\theta) \equiv \theta, \tag{1}$$
$$\pi_3(\theta_m) \equiv 0, \tag{2}$$
$$t^*(\theta_m) \equiv 1; \tag{3}$$

donde (1) se deduce del *principio de la revelación*, mientras que (2) y (3) se derivan del *principio del acuerdo*. Lo que haremos será incluir las 3 identidades dentro del problema de maximización de utilidad que enfrenta el principal. Evidentemente, una restricción de compatibilidad de incentivos (RCI) debe ser impuesta, para que (1) y (3) *efectivamente* se cumplan.

Dicha condición requiere que

$$\begin{aligned} EU_A(\theta, \theta_m = \theta, t = 1) &= (1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta, s)\,|\,\theta\,]\theta - c_a\Big), \\ &\geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\, t\,\Big(\mathbb{E}[\pi_2(\theta_m, s)\,|\,\theta] - c_a\Big), \\ &= EU_A(\theta, \theta_m, t) \end{aligned}$$

donde esto debe cumplirse para cualquier $\theta \in \Theta$, y para todo $\theta_m \in \Theta$, $t \in T$.

Dado que $T \equiv \{0, 1\}$, es fácil ver que (RCI) puede ser descompuesta en 2 restricciones, dadas por el valor de t. Si el agente quisiera mentir y rechazar el test ($t = 0$), nuestra restricción queda como

$$(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta, s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) \tag{RCI.1}$$

Si, en cambio, el agente opta por mentir y aceptar una eventual invitación, nos queda

$$(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta, s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\pi_2(\theta_m, s)\,|\,\theta] - c_a\Big). \tag{RCI.2}$$

Por tanto, el problema a resolver puede plantearse como:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^b \left((1-q(\theta))\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_p\Big)\right) f(\theta)d\theta$$

sujeto a:

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big) \geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m), \tag{RCI.1}$$

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big) \geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\pi_2(\theta_m,s)\,|\,\theta] - c_a\Big), \tag{RCI.2}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

En adelante, nos referiremos al precedente como el *problema reducido* del principal. Notemos que este último se resume en diseñar un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, puesto que M y $\pi_3(\theta)$ ya han sido definidos, sin perder generalidad. En las secciones siguientes, se plantearán distintas especificaciones respecto de los posibles resultados que puede arrojar el test. Cada una de ellas tendrá el problema reducido, pues, como punto de partida.

5. Test Infalible

En una primera instancia, resolveremos el problema de maximización de utilidad esperada que enfrenta el principal; suponiendo que el test es *infalible*. Es decir, si la verificación se lleva a cabo, el principal aprende perfectamente el tipo del agente. En términos del modelo, este supuesto equivale a decir que, si el agente es de tipo θ, entonces el test siempre arrojará $s = \theta$. No hay otro resultado posible. Ello significa, pues, que

$$G(s|\theta) = \begin{cases} 0 & si \quad s < \theta \\ \\ 1 & si \quad s \geq \theta \end{cases}.$$

Notemos que, en este contexto, no tiene sentido caracterizar π_2 para otros resultados que no sean $s = \theta$. Esto, porque

$$\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta_m, s)\,|\,\theta\,] = \pi_2(\theta_m, \theta).$$

En esta especificación, por tanto, denotaremos la expresión $\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta_m, s)\,|\,\theta\,]$ simplemente por $\pi_2(\theta_m, \theta)$.

Teniendo esto en cuenta, vamos a plantear el problema a resolver. Queremos diseñar un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ que maximice la utilidad esperada del principal. Escribiendo esta última como se hizo al final de la sección pasada, tendremos el siguiente problema de optimización:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^b \left((1-q(\theta))\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta,\theta)\,\theta - c_p\Big)\right) f(\theta)d\theta$$

sujeto a:

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta)+q(\theta)\Big(\pi_2(\theta,\theta)-c_a\Big)\geq(1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m), \tag{RCI.1}$$

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta)+q(\theta)\Big(\pi_2(\theta,\theta)-c_a\Big)\geq(1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m)+q(\theta_m)\Big(\pi_2(\theta_m,\theta)-c_a\Big), \tag{RCI.2}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta,\theta_m\in\Theta$.

Resolución del Problema

Parte fundamental del análisis del problema reducido, es ir dando forma al mecanismo óptimo, lo que se traduce en derivar conclusiones generales acerca de las formas funcionales de $q(\theta)$, $\pi_1(\theta)$, $\pi_2(\theta_m,\theta)$. En este apartado, se exponen 5 lemas, que irán moldeando las funciones mencionadas. Finalmente, se enuncia una proposición que resume la solución al problema del principal en este escenario. Dejaremos aquí la intuición subyacente en cada lema; la demostración formal de cada uno se encuentra entre los anexos 3 y 7.

Notemos que, en caso de realizarse el test, el principal puede determinar con certeza si el agente mintió o fue honesto. Esto se debe, justamente, a que la verificación es perfecta. El lema que sigue toma en cuenta este fenómeno.

Lema 1: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_2(\theta_m,\theta)$ de la forma

$$\pi_2(\theta_m,\theta)=0 \quad si \quad \theta_m\neq\theta.$$

Es decir, el agente jamás se queda con el objeto en caso de que el test sea realizado, y el principal descubra alguna diferencia entre el mensaje recibido, y el verdadero tipo del agente. En el Anexo 4 se demuestra este lema. La intuición es simple: definir $\pi_2(\theta_m,\theta)$ de esa forma pone incentivos a que, si el agente miente, al menos no realice el test. Con esto, (RCI.2) se vuelve irrelevante. Si el agente quisiera mentir al anunciar su tipo, ahora siempre le conviene rechazar una eventual invitación a dar el test. Supongamos un $\theta_m\in\Theta$ cualquiera, tal que $\theta_m\neq\theta$. Sabemos que $\pi_2(\theta_m,\theta)=0$. Entonces,

$$\begin{aligned} EU_A(\theta,\theta_m,t=0) &= (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m),\\ &\geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m)+q(\theta_m)\Big(\pi_2(\theta_m,\theta)-c_a\Big),\\ &= (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m)-q(\theta_m)c_a,\\ &= EU_A(\theta,\theta_m,t=1). \end{aligned}$$

lo cual siempre se cumple, pues $q(\theta_m)$ es una probabilidad, mientras que c_a es un término positivo. Así, en caso de mentir, el agente siempre obtiene una utilidad esperada mayor al escoger $t=0$. Esto significa, pues, que (RCI.2) deja de ser relevante.

En adelante, no volveremos a referirnos a $\pi_2(\theta_m,\theta)$ para los casos en que $\theta_m\neq\theta$; quedando caracterizada del modo ya señalado en el lema. Asimismo, desde ahora denotaremos $\pi_2(\theta_m,\theta)$ simplemente como $\pi_2(\theta,\theta)$, explicitando que falta caracterizar dicha función sólo para los casos en que $\theta_m = \theta$. Entonces, al principal le queda escoger las formas funcionales de $\pi_1(\theta)$, $q(\theta)$, y $\pi_2(\theta, \theta)$.

La única restricción a considerar, en adelante, será (RCI.1), que renombraremos como (RCI), simplemente. Según esta, debe cumplirse que

$$(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m), \qquad \text{(RCI)}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

En un segundo avance, se ha reducido el problema para aquellos $\theta \in [a, c_p]$. En particular, se define $q(\theta)$ de manera que el principal jamás propone hacer el test al recibir un mensaje en este intervalo.

Lema 2: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $q(\theta)$ de la forma

$$q(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p].$$

Como dijimos, el principal jamás verificará al agente si este afirma ser de un tipo menor o igual a c_p. Recordemos que c_p es el costo en el que incurre el principal si se realiza el test. Luego, el intervalo $[a, c_p]$ incluye aquellos θ que no son lo suficientemente grandes como para que el principal, tras verificar al agente; se quede con una utilidad positiva. La demostración formal de este lema se encuentra en el anexo 4.

Es evidente que al principal no le conviene verificar al agente en caso de que tenga un tipo igual o menor a c_p. Por ese lado, se está ahorrando el costo de verificación al definir $q(\theta)$ de esta forma. Por otra parte, invitar a dar el test a un agente en ese intervalo podría servir para asignar una probabilidad $\pi_1(\theta)$ que varíe según θ. Por ejemplo, para no darle el objeto al agente si $\theta < 0$, y dárselo si $\theta \in [0, c_p]$. De este modo, imponer $q(\theta) = 0$ quita esa libertad al principal, lo cual es costoso.

Sin embargo, lo que gana el principal asignando $q(\theta) > 0$ para ciertos $\theta \in [a, c_p]$, pudiendo "separar" la función $\pi_1(\theta)$ según θ, siempre es menor o igual al costo de tener que realizar la verificación. Por ello, no hay pérdida de generalidad en ahorrarse cualquier tipo de propuesta, al recibir un mensaje $\theta \leq c_p$.

Hay dos implicancias importantes de este lema. La primera es trivial: si $q(\theta) = 0$ para un cierto θ, es irrelevante cómo sea $\pi_2(\theta, \theta)$ para ese tipo en particular. Ello, porque el principal jamás le propone hacer el test, y la función mencionada determina la probabilidad de darle el objeto al agente, condicional en que el test haya sido realizado. Luego, dicha probabilidad podría ser una constante, independiente de s, o depender del resultado; es intrascendente. La definición de $\pi_2(\theta, \theta)$, en ese intervalo, equivale a especificar una regla que nunca aplica. Por simplicidad, vamos a definir

$$\pi_2(\theta, \theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p].$$

La segunda implicancia de este lema es que $\pi_1(\theta)$ debe ser una constante en el intervalo $[a, c_p]$. ¿Por qué ocurre esto? Recordemos que, por (RCI), el agente no debe tener incentivos a mentir. Supongamos, pues, que el agente tiene un tipo $\theta_1 \in [a, c_p]$. Si revela su verdadero tipo, sabemos que $q(\theta_1) = 0$, de modo que su utilidad esperada sería

$$EU_A(\theta_1, \theta_m = \theta_1, t = 1) = \pi_1(\theta_1).$$

Sea $\theta_2 \in [a, c_p]$, tal que $\pi_1(\theta_2) > \pi_1(\theta_1)$. En dicho caso, es evidente que, siendo de tipo θ_1, al agente jamás le convendrá ser honesto. Esto, porque

$$\begin{aligned} EU_A(\theta_1, \theta_m = \theta_2, t = 1) &= \pi_1(\theta_2), \\ &> \pi_1(\theta_1), \\ &= EU_A(\theta_1, \theta_m = \theta_1, t = 1). \end{aligned}$$

De este modo, el agente siempre preferirá mentir, afirmando ser de tipo θ_2, a revelar su verdadero tipo. Por otra parte, si $\pi_1(\theta_2) < \pi_1(\theta_1)$, ocurrirá lo contrario. El agente, siendo de tipo θ_2, le conviene mentir; afirmando ser de tipo θ_1. Esto, porque nuevamente sabemos que $q(\theta_2) = 0$. El único caso en que el agente prefiere (débilmente) ser honesto, ya sea de tipo θ_1 o θ_2, es cuando $\pi_1(\theta_2) = \pi_1(\theta_1)$.

Notemos que el análisis anterior aplica para cualquier θ_1, θ_2 en dicho intervalo. Por tanto, para que se cumpla (RCI), debe ser cierto que

$$\pi_1(\theta) = \overline{\pi}_1 \quad \forall \quad \theta \in [a, c_p],$$

donde $\overline{\pi}_1$ es una constante en el intervalo $[0, 1]$.

Teniendo en cuenta los lemas 1 y 2, así como las conclusiones discutidas previamente; vamos a replantear el problema que enfrenta el principal. Analicemos (RCI). Sabemos que debe cumplirse

$$(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m),$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Supongamos un $\theta \in [a, c_p]$ cualquiera. De ser honesto, el agente obtendría una utilidad esperada igual a

$$\begin{aligned} EU_A(\theta \in [a, c_p], \theta_m = \theta, t = 1) &= (1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big), \\ &= \overline{\pi}_1. \end{aligned}$$

El agente, si revela su tipo, sabe que el principal no lo invitará a rendir la prueba. Luego, su utilidad esperada viene dada directamente por la probabilidad de que le den el objeto, $\overline{\pi}_1$. Según esta restricción, debe ser cierto que este individuo no tenga incentivos a enviar un mensaje $\theta_m \in \Theta$, y rechazar una eventual invitación a dar el test.

Por un lado, tenemos que θ_m podría estar en el intervalo $[a, c_p]$. En dicho caso, sabemos que la utilidad esperada que obtendría sería justamente $\overline{\pi}_1$. Por tanto, el agente estaría indiferente entre revelar su tipo o mentir, enviando un mensaje de ese tipo. De este modo, concluimos que existe una preferencia débil por actuar honestamente, lo que implica que

(RCI) se satisface.

Por otro lado, pensemos en $\theta_m \in \,]c_p, b]$. En este caso, (RCI) se escribe de la forma

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m), \tag{RCI.1}$$

para todo $\theta_m \in \,]c_p, b]$. Si este agente afirma ser de un tipo superior a c_p, existe una probabilidad $(1 - q(\theta_m))$ de que no lo inviten hacer el test, en cuyo caso se queda con el objeto con probabilidad $\pi_1(\theta_m)$. Si el principal sugiere realizar una verificación, sabemos que el agente se opondrá a la misma.

Supongamos ahora un $\theta \in \,]c_p, b]$ cualquiera. De ser honesto y aceptar una eventual invitación, el agente obtendría una utilidad esperada igual a

$$EU_A(\theta \in \,]c_p, b], \theta_m = \theta, t = 1) = (1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big).$$

Debe ser cierto que no tenga incentivos a enviar un mensaje $\theta_m \in \Theta$, y rechazar una eventual invitación a dar el test. Por un lado, tenemos que θ_m podría estar en el intervalo $[a, c_p]$. Para este intervalo, sabemos que la utilidad esperada que obtendría sería $\overline{\pi}_1$. En este caso, (RCI) se escribe de la forma

$$(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq \overline{\pi}_1, \tag{RCI.2}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Por otro lado, pensemos en $\theta_m \in \,]c_p, b]$. En este caso, (RCI) se escribe de la forma

$$(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m),$$

para todo $\theta, \theta_m \in \,]c_p, b]$. Ahora bien, si (RCI.1) y (RCI.2) se satisfacen, notemos que siempre se cumple esta última condición, pues tendríamos

$$\begin{aligned}(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big) &\geq \overline{\pi}_1, \\ &\geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m),\end{aligned}$$

donde las desigualdades anteriores se cumplen para todo $\theta, \theta_m \in \,]c_p, b]$.

Concluimos, entonces, que las condiciones (RCI.1) y (RCI.2) aseguran que (RCI) se cumpla, para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Teniendo eso en cuenta, podemos plantear el problema del principal del siguiente modo:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \Big((1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta)\, \theta - c_p\Big)\Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - q(\theta))\pi_1(\theta), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big), \tag{RCI.2}$$

donde ambas restricciones deben cumplirse para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Apoyados en el último planteamiento, es posible demostrar lo siguiente:

Lema 3: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_2(\theta, \theta)$ de la forma

$$\pi_2(\theta, \theta) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in \,]c_p, b].$$

Esto significa que, de realizarse la verificación para aquellos tipos lo suficientemente altos, lo óptimo es entregarle el objeto siempre al agente. La demostración formal del lema se encuentra en el anexo 5, pero la intuición es directa. Sin importar como sea $q(\theta)$ para $\theta > c_p$, una vez se haga el test y el principal haya constatado la veracidad del mensaje entregado por el agente; un mayor $\pi_2(\theta, \theta)$ siempre aumenta la utilidad esperada del primer individuo.

Por otra parte, dado que estamos aumentando $\pi_2(\theta, \theta)$ para estos tipos, sin tocar $q(\theta)$ ni $\pi_1(\theta)$, es fácil ver que (RCI.1) se sigue cumpliendo. Por último, notemos que estamos contribuyendo a que (RCI.2) se satisfaga. Ello, por medio de aumentar la utilidad esperada del agente en caso de que $\theta \in \,]c_p, b]$; siempre y cuando sea honesto y acepte una eventual invitación a rendir el test.

Notemos que $\pi_2(\theta, \theta)$ ya ha sido definida en el único tramo relevante; puesto que para aquellos $\theta \in [a, c_p]$, el principal jamás propone una verificación al agente. Por tanto, en adelante vamos a excluir $\pi_2(\theta, \theta)$ como una variable a seguir considerando en la resolución del problema.

Lema 4: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_1(\theta)$ de la forma

$$\pi_1(\theta) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in \,]c_p, b].$$

Esto significa que, si el agente afirma ser de un tipo superior a c_p, el principal le dará el objeto *siempre*, sin requerir test alguno. La demostración formal se encuentra en el anexo 6, pero nuevamente es posible captar la intuición subyacente.

Notemos que el aumento en $\pi_1(\theta)$ dificulta el cumplimiento de (RCI.1). Pero, aumentando $q(\theta)$ lo suficiente, siempre podemos dejar $(1 - q(\theta))\,\pi_1(\theta)$ intacto, de modo que se satisfaga dicha restricción. A su vez, el aumento en $q(\theta)$ facilita el cumplimiento de (RCI.2).

Mirando la función objetivo, observamos que el aumento en $q(\theta)$ estaría *anulando*, de alguna forma, el beneficio de incrementar $\pi_1(\theta)$. Pero, por otro lado, un mayor $q(\theta)$ acrecenta la utilidad esperada del principal, dado que es más probable llevarse un beneficio $(\theta - c_p)$, donde sabemos que $\theta > c_p$.

Tomando en cuenta lo enunciado en el lema, el programa queda como:

$$\underset{q:,\overline{\pi}_1}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1 \, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \Big(\theta - q(\theta) c_p\Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - q(\theta), \tag{RCI.1}$$
$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - q(\theta)c_a. \tag{RCI.2}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta \in]c_p, b]$. Notemos que $\pi_1(\theta)$ ya ha sido definido para aquellos θ superiores a c_p. Para los tipos restantes, sabemos que $\pi_1(\theta) = \overline{\pi}_1$. De este modo, desde ahora incluiremos en el problema la elección de la constante $\overline{\pi}_1$, en lugar de $\pi_1(\theta)$.

Dando un último paso en la reducción del problema, tenemos el siguiente lema:

Lema 5: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $q(\theta)$ de la forma

$$q(\theta) = \overline{q} \quad \text{si} \quad \theta \in]c_p, b];$$

donde $\overline{q}$ es una constante, que toma un valor en el intervalo $[0, 1]$.

De este modo, el principal invita con la misma probabilidad al agente a dar el test, cualquiera sea el mensaje recibido; siempre y cuando éste se encuentre en el intervalo mencionado. La demostración formal se encuentra en el anexo 7, pero incluimos aquí el argumento central.

Notemos, por un lado, que la utilidad esperada del principal es decreciente en $q(\theta)$. Por otro lado, es el menor $q(\theta)$ el que realmente restringe al principal, ya que tanto $1 - q(\theta)$ como $1 - q(\theta)c_a$ son decrecientes en dicha variable. Luego, no tiene sentido que $q(\theta)$ varíe según θ; siempre conviene nivelar esta función. De otro modo, estamos disminuyendo la utilidad esperada del principal, inútilmente.

Tomando en cuenta el lema enunciado, nos queda que el principal enfrenta el siguiente problema:

$$\underset{\overline{q}, \overline{\pi}_1}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1 \, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \Big(\theta - \overline{q} c_p\Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - \overline{q}, \tag{RCI.1}$$
$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \overline{q} c_a. \tag{RCI.2}$$

donde $\overline{q}$ y $\overline{\pi}_1$ son constantes en el intervalo $[0, 1]$. Notemos que $q(\theta)$ ya está definida en el intervalo $[a, c_p]$. Para aquellos $\theta > c_p$, sabemos que $q(\theta) = \overline{q}$. Luego, hemos incluido en el problema la elección de la constante $\overline{q}$, en lugar de $q(\theta)$.

En este punto, notemos que el problema se ha reducido enormemente, resumiéndose en la elección de dos probabilidades. Esto último, notemos, impone que $\overline{q}$ y $\overline{\pi}_1$ deben estar en el intervalo $[0, 1]$.

Supongamos que se cumplen (RCI.1) y (RCI.2). En ese caso, tendremos que, si $0 \leq \overline{q} \leq 1$, entonces será cierto que[2]

$$0 \leq \overline{\pi}_1 \leq 1.$$

[2]Esto se muestra en el anexo 8, en el cual se desarrolla formalmente este problema.

Teniendo esto en mente, basta incluir en el problema las restricciones necesarias para que $\overline{q} \in [0,1]$; ello asegura que $\overline{\pi}_1$ se encuentre en los mismos márgenes.

El problema a resolver, finalmente, queda como:

$$\underset{\overline{\pi}_1, \overline{q}}{\text{Max}} \quad \overline{\pi}_1 \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \theta\, f(\theta) d\theta - \overline{q}\, c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 &\geq 1 - \overline{q}, && \text{(R.1)} \\ \overline{\pi}_1 &\leq 1 - \overline{q} c_a, && \text{(R.2)} \\ \overline{q} &\geq 0, && \text{(R.3)} \\ \overline{q} &\leq 1. && \text{(R.4)} \end{aligned}$$

Notemos que (R.1) y (R.2) aseguran que el mecanismo satisfaga compatibilidad de incentivos, mientras que (R.3) y (R.4) garantizan que $\overline{q} \in [0,1]$. Como señalamos, el cumplimiento de las 4 condiciones anteriores asegura que $\overline{\pi}_1$ también pertenezca a dicho intervalo.

El desarrollo formal de este problema se encuentra en el anexo 8 de esta entrega. La proposición 1, que exponemos a continuación, resume los valores óptimos de $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$. Como veremos, estos últimos dependen de

$$I_a = \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta$$

y

$$C_1 = c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta.$$

Proposición 1: El mecanismo que maximiza la utilidad esperada del principal, si el test es infalible, está conformado por un vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$, donde:

(i) Si

$$I_a > -C_1,$$

la solución la constituye $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (0, 1)$.

(ii) Si

$$I_a < -C_1,$$

la solución la constituye $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (1, 0)$.

(iii) Si

$$I_a = -C_1,$$

la solución la constituye $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$ tal que $\overline{q} \in [0,1]$ y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}$.

Analicemos, en primer lugar, las expresiones I_a y C_1. Por un lado,

$$\begin{aligned} I_a &= \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \mathbb{E}(\theta | \theta \leq c_p) \int_a^{c_p} f(\theta) d\theta, \\ &= \mathbb{E}(\theta | \theta \leq c_p) F(c_p), \\ &= \mathbb{E}(\theta | \theta \leq c_p) Pr(\theta \leq c_p). \end{aligned}$$

De este modo, I_a corresponde a la esperanza de θ, condicional en que $\theta \in [a, c_p]$; por la probabilidad de que θ caiga dentro de dicho intervalo. Es una medida, pues, de lo que espera ganar (o perder) el principal al aumentar la probabilidad $\overline{\pi}_1$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} C_1 &= c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta, \\ &= c_p \,(1 - F(c_p)), \\ &= c_p \, Pr(\theta > c_p). \end{aligned}$$

Así, tenemos que C_1 corresponde al costo de verificar al agente, por la probabilidad de que θ sea superior a c_p. Es una medida, por tanto, de lo que espera perder el principal al aumentar el valor de $\overline{q}$.

Dicho esto, revisemos el primer caso especificado en la proposición. Cuando $I_a > -C_1$, al principal le conviene definir $\overline{q} = 0$ y $\overline{\pi}_1 = 1$. Esto, en conjunto con los lemas enunciados anteriormente, significa que el principal no propone *jamás* al agente la realización del test; y le entrega el objeto *siempre*, sin importar el mensaje recibido.

Esto ocurre, básicamente, porque sus expectativas acerca de θ para el intervalo $[a, c_p]$; no son tan pesimistas en relación al costo esperado de verificar al agente. Esto incluye el escenario en que I_a es mayor o igual a 0, notemos. Esto es obvio: si se espera obtener beneficios (en promedio) entre aquellos tipos inferiores, es beneficioso entregar el objeto certeza. Eso, además, permite dar el bien con probabilidad 1 al agente si este es de un tipo superior a c_p, lo cual siempre es deseable.

Sin embargo, notemos que el principal está dispuesto a sufrir ciertas pérdidas, siempre que no sean "excesivas", con tal de entregar el bien con certeza para aquellos θ altos, y ahorrarse el costo esperado de verificar al agente en estos casos.

Es directo apreciar que la utilidad esperada que obtiene, en este escenario, está dada por

$$EU_P(\overline{\pi}_1 = 1, \overline{q} = 0) = \mathbb{E}(\theta).$$

En el segundo caso, el principal toma la actitud opuesta: *jamás* da el objeto sin verificar antes el tipo del individuo. Recordemos que, por el lema 2, podemos definir $q(\theta) = 0$ para aquellos $\theta \leq c_p$. Esto implica, por tanto, que si el agente tiene un tipo en dicho rango nunca se llevará el bien. Para aquellos θ superiores a ese umbral, el principal siempre propone hacer el test; el agente acepta la propuesta, y el objeto es entregado con probabilidad 1.

Lo anterior es óptimo porque el costo esperado de realizar el test, es menor a lo que perdería entregando el bien a individuos en el rango $[a, c_p]$. La utilidad esperada del principal, en estas circunstancias, queda como

$$EU_P(\overline{\pi}_1 = 0, \overline{q} = 1) = \int_{c_p}^{b} \Big(\theta - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

El último caso es trivial. El costo de verificar al agente, por la probabilidad de que sea de tipo alto, es igual a lo que se espera perder entregando el objeto al agente, siendo de un tipo bajo. Luego, imponiendo $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}$, las expresiones I_a y C_1 se netean, cualquiera sea el $\overline{q}$ escogido. La utilidad esperada del principal, en este escenario, viene dada por

$$EU_P(\overline{\pi}_1 = 1, \overline{q} = 0) = \mathbb{E}(\theta).$$

Examinemos los factores del modelo que contribuyen a la elección de uno u otro mecanismo. Sabemos que, si se satisface la condición $I_a > -C_1$, el principal entregará siempre el objeto al agente, sin verificarlo previamente. ¿Cuándo es más probable que esto ocurra? ¿Qué elementos contribuyen a que el principal escoja este mecanismo?

Notemos que I_a es creciente en $\mathbb{E}(\theta | \theta \leq c_p)$ y en $Pr(\theta \leq c_p)$. Luego, un mayor valor esperado de θ dentro del intervalo $[a, c_p]$ contribuye a la elección del mecanismo mencionado.

Por otro lado, tenemos que C_1 es creciente en c_p y en $Pr(\theta > c_p)$. Esto significa que un aumento en el costo de verificación c_p, así como una probabilidad mayor de que θ sea superior a dicho parámetro; contribuyen igualmente a la elección del mecanismo ya mencionado.

Lo contrario ocurre cuando disminuyen los términos mencionados. Ello contribuye a que se satisfaga la condición $I_a < -C_1$, en cuyo caso el principal decide "jugar sobre seguro".

Es interesante notar, por otra parte, que la decisión óptima no depende en absoluto del costo en el que incurre el agente al llevarse a cabo el test. El valor del término c_a es irrelevante para el principal, a la hora de diseñar el mecanismo.

6. Test Ruidoso

Ahora bien, podríamos pensar que el test es ruidoso, esto es, no entrega perfectamente la información que pretende recabar el principal. Levantar el supuesto de infalibilidad del test parece razonable en muchas situaciones. Por ejemplo, la evidencia podría conformarse de una cantidad enorme de archivos; entre los que el principal examina solamente algunos. O bien, la variable que mide el test es difícil de calcular con precisión; de manera que el resultado entrega una valoración cercana a θ, con un margen de error.

En esta sección, se introduce una noción particular de ruido. Vamos a suponer que, con probabilidad p, el test revela el verdadero tipo del agente. Con probabilidad $1-p$, en cambio, la verificación no es informativa en absoluto. Esta aproximación abstrae, de una forma muy simple, las deficiencias que puede exhibir una prueba en contextos de información asimétrica. Y la interpretación es directa: el test es perfectamente preciso, pero hay ocasiones en que los resultados se pierden, o el proceso de recolección de información falla completamente.

En términos del modelo, este supuesto equivale a decir que, si un agente es de tipo θ, el test arrojará un resultado $s = \theta$ con probabilidad p. Tal como se enunció en el modelo, el conjunto al que pertenece s es $S \equiv [s_0, s_1]$. Sabemos que $s_0 < a$, y que $b < s_1$. Luego, supondremos que con probabilidad $1-p$ el test resulta en una constante s_n, cualquiera sea el tipo del agente; donde $s_0 < s_n < a$. Esto resume bastante bien la idea de que, en ocasiones, la verificación no revela nada: si la prueba se lleva a cabo y el principal observa $s = s_n$, no aprende nada; ya que ese resultado podría haber sido generado por cualquier $\theta \in [a, b]$. Solamente se da cuenta de que el test falló. En cuanto a la forma de $G(s|\theta)$, lo anterior equivale a decir que

$$G(s|\theta) = \begin{cases} 0 & si \quad s < s_n \\ 1-p & si \quad s_n \leq s < \theta \\ 1 & si \quad s \geq \theta \end{cases} .$$

En este contexto, dado que hay solamente 2 resultados posibles, tenemos que

$$\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta_m, s)\,|\,\theta\,] = (1-p)\pi_2(\theta_m, s_n) + p\,\pi_2(\theta_m, \theta).$$

Escribiremos la expresión $\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta_m, s)\,|\,\theta\,]$ simplemente de esa forma. Notemos, por tanto, que el principal debe definir dos funciones en caso de que el test sea realizado: $\pi_2(\theta_m, s_n)$ y $\pi_2(\theta_m, \theta)$.

Teniendo en cuenta lo anterior, el problema reducido en este caso queda como:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^b \left((1-q(\theta))\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\Big([(1-p)\,\pi_2(\theta, s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta)]\,\theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\,\pi_2(\theta, s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m), \quad \text{(RCI.1)}$$

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\,\pi_2(\theta, s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big)$$
$$\geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big((1-p)\,\pi_2(\theta_m, s_n) + p\,\pi_2(\theta_m,\theta) - c_a\Big), \quad \text{(RCI.2)}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Resolución del Problema

Parte fundamental del análisis del problema reducido, es ir dando forma al mecanismo óptimo, lo que se traduce en derivar conclusiones generales acerca de las formas funcionales de $q(\theta)$, $\pi_1(\theta)$, $\pi_2(\theta_m, \theta)$ y $\pi_2(\theta_m, s_n)$. En este apartado, se exponen 8 lemas, que irán moldeando las funciones mencionadas. Asimismo, se exponen 3 proposiciones, las cuales resumen, según distintos supuestos sobre los parámetros del modelo, la solución al problema, tomando en cuenta las condiciones que entregan los lemas mencionados.

En este escenario, como veremos, la solución al problema del principal contempla muchos más casos que cuando el test era infalible. Estos últimos se vinculan directamente con la magnitud del ruido p al hacerse el test, y con los costos en que incurre cada individuo al producirse la verificación. Dejaremos aquí la intuición subyacente en cada lema; la demostración formal de cada uno se encuentra entre los anexos 9 y 17.

Si el test se realiza, el principal puede observar el verdadero tipo del agente con probabilidad p; y compararlo con el mensaje recibido. Teniendo esto en cuenta, nuevamente podemos aplicar el lema 1[3].

Lema 1: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_2(\theta_m, \theta)$ de la forma

$$\pi_2(\theta_m, \theta) = 0 \quad si \quad \theta_m \neq \theta.$$

Esto se demuestra formalmente en el anexo 9, pero la intuición es directa: $\pi_2(\theta_m, \theta)$ no aparece en la función objetivo si $\theta_m \neq \theta$. Esto es así por el principio de la revelación, justamente. De esta forma, la definición de esta función no incide en absoluto en la utilidad esperada del principal. Pero minimizando $\pi_2(\theta_m, \theta)$, el principal está disminuyendo la utilidad que esperaría el agente al mentir y aceptar una eventual invitación a dar el test.

En lo que queda de esta sección, nos referiremos a la función $\pi_2(\theta_m, \theta)$ como $\pi_2(\theta, \theta)$, simplemente. Esto, para enfatizar que el caso en que $\theta_m \neq \theta$ ya está cubierto, y falta dar forma a esta función solamente cuando se observe $\theta_m = \theta$.

Igual que en el contexto en que el test es infalible, vamos a definir la función $q(\theta)$ de forma que el principal nunca verifique al agente en caso de recibir un mensaje $\theta_m \leq c_p$.

Lema 2: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $q(\theta)$ de la forma

$$q(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p].$$

La demostración de este lema considerando el test ruidoso se deja en el anexo 10, y la intuición subyacente es igual a la explicada anteriormente.

Recordemos que una implicancia de esta consigna, es que la elección de $\pi_2(\theta, \theta)$ es irrelevante para el intervalo $[a, c_p]$. Definiremos, por simplicidad,

$$\pi_2(\theta, \theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p].$$

Una segunda conclusión es que $\pi_1(\theta)$ debe definirse de la forma

$$\pi_1(\theta) = \overline{\pi}_1 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p],$$

[3] La demostración se ha adecuado para este nuevo escenario; pero es esencialmente la misma que cuando el test es infalible. Lo mismo es cierto para los lemas 2 y 3, que también serán considerados en esta sección.

donde $\overline{\pi}_1$ es una constante en el intervalo $[0,1]$.

En la sección pasada, se discutió que el cumplimiento de (RCI.1) se resumía en 2 condiciones, a saber,

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta_m)), \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big), \tag{2}$$

las que se deben satisfacer para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. En el contexto actual, sin embargo, la restricción (RCI.2) sigue siendo relevante. ¿Qué condiciones garantizan que esta se cumpla?

Sabemos que debe cumplirse

$$\begin{aligned}(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\,\pi_2(\theta,s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big)\\ \geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big((1-p)\,\pi_2(\theta_m,s_n) - c_a\Big),\end{aligned}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Supongamos un $\theta \in [a, c_p]$ cualquiera. De ser honesto y aceptar una eventual invitación, el agente obtendría una utilidad esperada igual a

$$\begin{aligned}EU_A(\theta \in [a,c_p], \theta_m = \theta, t = 1) &= (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\,\pi_2(\theta,s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big),\\ &= \overline{\pi}_1.\end{aligned}$$

Debe ser cierto que no tenga incentivos a enviar un mensaje $\theta_m \in \Theta$, y aceptar una eventual invitación a dar el test. Por un lado, tenemos que θ_m podría estar en el intervalo $[a, c_p]$. Para este intervalo, sabemos que la utilidad esperada que obtendría sería justamente $\overline{\pi}_1$, pues jamás le propondrían realizar la prueba. En ese caso, (RCI.2) se cumple con igualdad. Por otro lado, pensemos en $\theta_m \in \,]c_p, b]$. En este caso, (RCI.2) se escribe de la forma

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big((1-p)\,\pi_2(\theta_m,s_n) - c_a\Big), \tag{3}$$

para todo $\theta_m \in \,]c_p, b]$.

Supongamos ahora un $\theta \in \,]c_p, b]$ cualquiera. De ser honesto y aceptar una eventual invitación, el agente obtendría una utilidad esperada igual a

$$EU_A(\theta \in \,]c_p,b], \theta_m = \theta, t = 1) = (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\,\pi_2(\theta,s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big).$$

Debe ser cierto que no tenga incentivos a enviar un mensaje $\theta_m \in \Theta$, y aceptar una eventual invitación a dar el test. Por un lado, tenemos que θ_m podría estar en el intervalo $[a, c_p]$. Para este intervalo, sabemos que la utilidad esperada que obtendría sería justamente $\overline{\pi}_1$. En este caso, (RCI.2) se escribe de la forma

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big) \geq \overline{\pi}_1,$$

para todo $\theta \in\,]c_p, b]$. Esta última condición es idéntica a (2), como podemos ver. Esto ocurre porque, al enviar θ_m en dicho intervalo, jamás se produce la verificación. Por otro lado, pensemos en $\theta_m \in\,]c_p, b]$. En este caso, (RCI.2) se escribe de la forma

$$(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta, s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\pi_2(\theta_m, s)\,|\,\theta] - c_a\Big),$$

para todo $\theta, \theta_m \in\,]c_p, b]$. Ahora bien, si (2) y (3) se satisfacen, notemos que siempre se cumple esta última condición, pues tendríamos

$$\begin{aligned}(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta, s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big) &\geq \overline{\pi}_1, \\ &\geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\pi_2(\theta_m, s)\,|\,\theta] - c_a\Big),\end{aligned}$$

donde las desigualdades anteriores se cumplen para todo $\theta, \theta_m \in\,]c_p, b]$.

De este modo, las condiciones (1), (2) y (3) aseguran que (RCI.1) y (RCI.2) se cumplan. Renombrándolas como (RCI.1), (RCI.3) y (RCI.2) respectivamente, el problema del principal puede plantearse de la forma

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \bigg((1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta)\Big([(1 - p)\pi_2(\theta, s_n) + p\, \pi_2(\theta, \theta)]\, \theta - c_p\Big)\bigg) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - q(\theta))\pi_1(\theta), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1 - p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \tag{RCI.2}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1 - p)\pi_2(\theta, s_n) + p\, \pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big); \tag{RCI.3}$$

donde estas restricciones deben cumplirse para todo $\theta \in\,]c_p, b]$.

El lema que sigue toma en cuenta, nuevamente, que hay casos en los que el principal aprende con seguridad el tipo del agente.

Lema 3: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_2(\theta, \theta)$ de la forma

$$\pi_2(\theta, \theta) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in\,]c_p, b].$$

La demostración se encuentra en el anexo 11; pero la intuición no ha cambiado: la utilidad esperada del principal es creciente en $\pi_2(\theta, \theta)$ en el intervalo mencionado. Por otra parte, si θ es igual o menor a c_p, el agente jamás puede *falsificar* un resultado que muestre un tipo superior a c_p. De esta forma, (RCI.1) y (RCI.2) se mantienen intactas. Por último, se está facilitando la observancia de (RCI.3).

En este punto, es directo ver que la utilidad esperada del principal es creciente en $\pi_2(\theta, s_n)$.

Dado que nos hemos restringido a mecanismos que induzcan honestidad y en los que el test es realizado al enviar una propuesta; dicha función solamente se ocupa (potencialmente) para aquellos θ superiores a c_p. Por tanto, es evidente que un mayor $\pi_2(\theta, s_n)$ siempre es preferible.

¿Por qué no definir, entonces, $\pi_2(\theta, s_n) = 1$? Lo que ocurre es que esta probabilidad aumenta la utilidad esperada que tiene el agente al ser de un tipo menor o igual a c_p, y mentir; afirmando tener un θ alto. Eso nos obliga, para que se satisfaga compatibilidad de incentivos; a incrementar $\overline{\pi}_1$, lo cual no siempre es deseable.

Ahora bien, para ciertos valores de p, podemos aumentar $\pi_2(\theta, s_n)$ hasta su máximo; sin afectar las restricciones. En particular, si se tiene

$$p \geq 1 - c_a; \tag{4}$$

entonces el cumplimiento de (RCI.1) asegura siempre la observancia de (RCI.2). Esto ocurre porque, si se satisface (4), para cualquier valor de $\pi_2(\theta, s_n)$ se tiene

$$(1 - q(\theta))\pi_1(\theta) \geq (1 - q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1 - p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big),$$

lo cual equivale a decir que

$$0 \geq q(\theta)\Big((1 - p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big).$$

Pongámonos en el mayor $\pi_2(\theta, s_n)$ posible. Si el valor de dicha función fuese igual a 1, la desigualdad anterior quedaría como

$$0 \geq q(\theta)\Big(1 - p - c_a\Big);$$

donde, tomando en cuenta (4), siempre se tiene que esta inecuación se cumple. Por tanto, se concluye que (RCI.2) se vuelve irrelevante; pues (RCI.1) garantiza que dicha condición se satisfaga.

Lo que ocurre, en el fondo, es que la probabilidad de que el test se ejecute correctamente es demasiado grande en relación al costo en que incurre el agente al hacer el test. Es muy probable que una mentira sea descubierta, en cuyo caso tendrá que enfrentar un costo c_a inútilmente. Por tanto, en caso de planear un engaño, prefiere rechazar la propuesta de verificación.

Teniendo esto en cuenta, es posible demostrar el siguiente lema:

Lema 6: Si $p \geq 1 - c_a$, podemos definir la función $\pi_2(\theta, s_n)$ de la forma

$$\pi_2(\theta, s_n) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in]c_p, b];$$

sin pérdida de generalidad.

Tal como dijimos antes, la utilidad esperada del principal es creciente en $\pi_2(\theta, s_n)$. Luego, la condición enunciada sobre p asegura que (RCI.2) siempre se cumpla, condicional en que (RCI.1) se satisfaga. De este modo, no hay ningún inconveniente en incrementar $\pi_2(\theta, s_n)$ lo más posible; esto dará holgura a (RCI.3), y además aumentará la función objetivo. La demostración formal del lema se encuentra en el anexo 12.

Suponiendo, por tanto, que $p \geq 1 - c_a$, y tomando en cuenta el lema enunciado, el problema que enfrenta el principal puede escribirse como

$$\underset{q:,\pi_1:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1 \, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \Big((1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \big(\theta - c_p\big) \Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - q(\theta))\pi_1(\theta), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta) \big(1 - c_a\big); \tag{RCI.3}$$

donde (RCI.1) y (RCI.3) deben cumplirse para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Ahora bien, ya conocemos la solución a este problema. Es equivalente al que teníamos en el caso del test infalible, considerando los lemas 1 y 2. La proposición 2 resume la solución a este problema.

Proposición 2: Si $p \geq 1 - c_a$, el mecanismo que maximiza la utilidad del principal está conformado por las funciones

$$q(\theta) = \begin{cases} \overline{q} & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases} ,$$

$$\pi_1(\theta) = \begin{cases} 1 & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases} ,$$

donde $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$ son constantes en el intervalo $[0, 1]$. La elección óptima de las variables $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$, viene dada por la proposición 1.

Hemos llegado a un resultado importante. La introducción de ruido en la verificación, siempre y cuando sea lo suficientemente pequeño en relación a c_a, no afecta en absoluto al principal. El mecanismo óptimo sigue siendo el mismo (más allá de definir $\pi_2(\theta, s_n) = 1$) que cuando el test es infalible, y la utilidad esperada se mantiene intacta.

Notemos que, mientras mayor sea el costo en que incurre el agente al dar la prueba, se requiere un p menor para que se satisfaga la condición (4). Esto significa que se permite un test más defectuoso. A medida que c_a se aproxima a 1, podemos tener un p cercano a 0; esto es, una verificación que falla la gran mayoría de las veces; y aún así mantener la solución que teníamos en el escenario de un test infalible.

Supongamos (4) no se cumple. Esto es, tenemos $p < 1 - c_a$. Notemos, por un lado, que la posibilidad de un test perfecto ($p = 1$) queda excluida. Por otra parte, la relevancia de (RCI.2) depende crucialmente de cómo definamos $\pi_2(\theta, s_n)$. El lema que sigue es un primer paso en la resolución del problema, en este nuevo contexto.

Lema 7: Si $p < 1 - c_a$, podemos restringirnos, sin pérdida de generalidad, a la búsqueda de mecanismos en los cuales

$$\pi_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p} \quad \text{si} \quad \theta \in]c_p, b].$$

La demostración de este lema se encuentra en el anexo 13. Recordando que la utilidad esperada del principal es creciente en $\pi_2(\theta, s_n)$, la demostración es intuitiva. Básicamente, tiene sentido aumentar $\pi_2(\theta, s_n)$ lo más posible, sin llegar a afectar las restricciones de compatibilidad de incentivos. Imponiendo esta condición sobre esa función, estamos asegurando que (RCI.1) se vuelva irrelevante. Luego, si el agente es de tipo $\theta \in [a, c_p]$ y decide mentir, sabemos que realizará el test en caso de que se lo propongan. Eso está asegurado porque

$$\begin{aligned} & (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta), \\ \Leftrightarrow \qquad & q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) \geq 0; \end{aligned}$$

donde sabemos que esto se cumple siempre. Esto, ya que $q(\theta) \in [0, 1]$, y, por el lema 7, tenemos que

$$(1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a \geq 0.$$

De este modo, el problema del principal puede ser escrito como

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \left((1-q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta)\Big([(1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \qquad \text{(RCI.1)}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big), \qquad \text{(RCI.2)}$$

$$\pi_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p}; \qquad \text{(RCI.3)}$$

donde (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3) deben cumplirse para todo $\theta \in]c_p, b]$. Nótese que hemos intercambiado los nombres de las restricciones.

Recordemos que el lema 2 imponía $q(\theta) = 0$ para aquellos tipos iguales o menores a c_p. En el caso del test infalible, efectivamente esto hacía mucho sentido: el principal jamás verificaba si su ganancia era menor al costo de llevar a cabo el test. Pero ahora el test es defectuoso. Intuitivamente, pensaríamos que, para ciertos θ superiores a c_p, verificar al agente sigue constituyendo un costo demasiado alto en relación a la ganancia derivada de esta acción. Bajo esta hipótesis, las falencias del test se estarían interpretando como un costo adicional en el que incurre el principal al examinar el tipo del agente. Dicha intuición es correcta, tal como muestra el lema que se enuncia a continuación.

Lema 8: Si $p < 1 - c_a$, podemos definir, sin pérdida de generalidad,

$$q(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in]c_p, \theta^*],$$

donde $\theta^* = min\Big\{b, \frac{c_p}{c_a+p}\Big\}$.

La demostración formal se encuentra en el anexo 14. La intuición ya fue delineada: como el test es inexacto, la verificación deja de ser tan provechosa como antes. Por tanto, se requiere que el agente tenga un tipo lo sificientemente alto para que convenga examinarlo. De hecho, como veremos ahora, hay ocasiones en que jamás conviene verificar al agente. Ni siquiera para un tipo $\theta = b$.

Una implicancia directa de este lema es que

$$\pi_1(\theta) = \overline{\pi}_1 \quad \text{si} \quad \theta \in]c_p, \theta^*].$$

De otra forma, no se cumplirían (RCI.1) y (RCI.2). Una segunda implicancia es que, en este intervalo de tipos, la definición de $\pi_2(\theta, s_n)$ se vuelve irrelevante. Solamente por simplicidad, y considerando (RCI.3), vamos a imponer

$$\pi_2(\theta, s_n) = \frac{c_a}{1-p} \quad \text{si} \quad \theta \in]c_p, \theta^*].$$

Notemos que se ha introducido el parámetro θ^*, el cual puede tomar dos valores. Básicamente, tendremos $\theta^* = \frac{c_p}{c_a+p}$ cuando

$$b > \frac{c_p}{c_a + p}.$$

Dado que todos los términos en esta desigualdad son positivos, esto equivale a que

$$\begin{aligned} c_a + p &> \frac{c_p}{b}, \\ \Leftrightarrow \quad p &> \frac{c_p}{b} - c_a. \end{aligned}$$

De este modo, si la probabilidad de que el test funcione es lo suficientemente grande en relación a c_p, b y c_a, tendremos $\theta^* < b$. Notemos que, como estamos en el caso en que $p < 1 - c_a$, sabemos que

$$c_a + p < 1,$$

lo cual asegura que $c_p < \theta^*$. Concluimos, entonces, que

$$c_p < \frac{c_p}{c_a + p} < b.$$

Por otra parte, θ^* puede tomar el valor b. Esto ocurrirá cuando

$$\begin{aligned} & b \leq \frac{c_p}{c_a + p}, \\ \Leftrightarrow \quad & c_a + p \leq \frac{c_p}{b}, \\ \Leftrightarrow \quad & p \leq \frac{c_p}{b} - c_a. \end{aligned} \tag{5}$$

Notemos, por tanto, que si p es lo suficientemente pequeño, el lema 9 aplicará para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto es natural: si el test es excesivamente defectuoso, jamás valdrá la pena verificar al agente. Reparemos en que la condición (5) implica el cumplimiento de (4). Esto, porque $c_p < b$.

Entonces, si se cumple (5), el problema del principal es trivial. Básicamente, se resume en resolver el programa

$$\underset{\overline{\pi}_1}{\text{Max}} \quad \overline{\pi}_1 \int_a^b \theta f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 0, \tag{R.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq 1, \tag{R.2}$$

donde estas últimas restricciones fueron agregadas para asegurar que $\overline{\pi}_1 \in [0,1]$. Esto, evidentemente, recoge el hecho de que dicha variable es una probabilidad. La proposición que sigue entrega la solución al problema del principal, para este caso en particular. Como veremos, el diseño del mecanismo óptimo depende crucialmente del valor de

$$\mathbb{E}(\theta) = \int_a^b \theta f(\theta) d\theta.$$

Proposición 3: Si $p \leq \frac{c_p}{b} - c_a$, el mecanismo que maximiza la utilidad esperada del principal está conformado por la variable $\overline{\pi}_1$, donde:

(i) Si $\mathbb{E}(\theta) < 0$, la solución la constituye $\overline{\pi}_1 = 0$.

(ii) Si $\mathbb{E}(\theta) > 0$, la solución la constituye $\overline{\pi}_1 = 1$.

(iii) Si $\mathbb{E}(\theta) = 0$, la solución la constituye cualquier $\overline{\pi}_1 \in [0,1]$.

La intuición es directa: dado que el test jamás será utilizado, el principal toma su decisión en base a sus creencias a priori acerca del tipo del agente, las cuales están dadas por la distribución de probabilidad $F(\theta)$.

Si el valor esperado de θ es positivo, le conviene entregar el objeto al agente con seguridad, obteniendo una utilidad esperada igual a $\mathbb{E}(\theta)$, justamente. Si dicha esperanza fuese negativa, lo óptimo es no darle el bien. Por último, si el valor esperado de θ es 0, la decisión es irrelevante. De cualquier modo, el principal obtendría una utilidad esperada igual a 0.

Vamos al caso no trivial, en que (5) no se cumple. Recordemos que estamos en el caso en que (4) tampoco se satisface. De este modo, queremos resolver el problema que enfrenta el principal, dado que

$$\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a.$$

En este escenario, y reacomodando algunos términos, el problema mencionado queda como

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{\theta^*} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^b \Big(\theta \left[(1-q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)(1-p)\pi_2(\theta, s_n) \right] + q(\theta)(\theta\, p - c_p) \Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a \Big), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p - c_a \Big), \tag{RCI.2}$$

$$\pi_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p}; \tag{RCI.3}$$

donde (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3) deben cumplirse para todo $\theta \in]\theta^*, b]$. Recordemos que, en este caso, $\theta^* = \frac{c_p}{c_a+p}$, donde

$$c_p < \frac{c_p}{c_a + p} < b.$$

Con un fin expositivo, dejaremos θ^* expresado de esa forma; ocupando su verdadero valor sólo en ciertas ocasiones.

Notemos que la utilidad esperada del principal es creciente en

$$(1-q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)(1-p)\pi_2(\theta, s_n),$$

y que dicha expresión juega un rol directo en (RCI.1) y (RCI.2). De este modo, nos gustaría incrementarla lo más posible, sin llegar a afectar las restricciones. El lema que sigue formaliza esta intuición.

Lema 9: Si $\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a$, podemos definir, sin pérdida de generalidad,

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a \Big) = \overline{\pi}_1 \quad \text{si} \quad \theta \in \left] \frac{c_p}{c_a + p}, b \right].$$

La demostración formal se encuentra en el anexo 15. La intuición, como mencionamos, es aumentar

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)(1-p)\pi_2(\theta, s_n)$$

lo más posible, sin llegar a perder generalidad. Luego, es posible hacer que (RCI.1) se cumpla con igualdad. Revisemos cómo quedan las restricciones de compatibilidad de incentivos. Por una parte, (RCI.1) queda como

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_1 &\geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big),\\ &= \overline{\pi}_1.\end{aligned}$$

De este modo, para cualquier $\theta \in \,]\theta^*, b]$, tenemos que esta restricción se satisface con igualdad. Por tanto, dejaremos de considerarla como una restricción al problema. Lo que ocurre es que, si el agente tiene un tipo en el intervalo $[a, \theta^*]$, su mejor alternativa a ser honesto lo deja con una utilidad esperada igual a $\overline{\pi}_1$. Y esto es igual a lo que obtiene al revelar su verdadero tipo.

Por su parte, (RCI.2) queda de la forma

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_1 &\leq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big),\\ &= (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) + q(\theta)\, p,\\ &= \overline{\pi}_1 + q(\theta)\, p.\end{aligned}$$

Dado que $q(\theta)$ y p son mayores o iguales a 0, tenemos que (RCI.2) siempre se satisface. Lo que ocurre es que, si el agente tiene un tipo en el intervalo $]\theta^*, b]$, mentir lo dejaría con una utilidad igual a $\overline{\pi}_1$, lo cual es menor o igual a lo que obtiene siendo honesto.

Por último, este lema implica que (RCI.3) también se cumple. Dado que $\overline{\pi}_1$ es una constante en el intervalo $[0, 1]$, siempre se tiene

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) \geq 0,$$

para todo $\theta \in \,]\theta^*.b]$. Dado que $q(\theta) \in [0,1]$, que $\pi_1(\theta) \in [0,1]$ y que $p \in [0,1]$; esta desigualdad requiere, justamente, que

$$\pi_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p},$$

para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$. Así, (RCI.3) se cumple de manera implícita en este lema.

Concluimos, entonces, que es innecesario seguir imponiendo las restricciones previas. En cambio, el hecho de que $\overline{\pi}_1$ y $q(\theta)$, $\pi_1(\theta)$ y $\pi_2(\theta, s_n)$ sean probabilidades, y de que

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) = \overline{\pi}_1;$$

puede reflejarse en dos condiciones.

Por una parte, si es que $\pi_1(\theta)$ y $\pi_2(\theta, s_n)$ toman los menores valores posibles, estos son

$$\pi_1(\theta) = 0$$

y

$$\pi_2(\theta, s_n) = \frac{c_a}{1-p},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big) &= (1-q(\theta))\,0 + q(\theta)\Big((1-p)\,\frac{c_a}{1-p} - c_a\Big),\\ &= 0.\end{aligned}$$

En dicho caso, tendríamos $\overline{\pi}_1 = 0$. Notemos, pues, que esto impone una cota inferior para $\overline{\pi}_1$. Dicha cota es igual a la que teníamos originalmente, dado que esta variable es una probabilidad.

Pero si fijáramos $\pi_1(\theta)$ y $\pi_2(\theta, s_n)$ en sus máximos, definiendo

$$\pi_1(\theta) = \pi_2(\theta, s_n) = 1,$$

tendríamos

$$\begin{aligned}(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big) &= (1-q(\theta))\,1 + q(\theta)\Big((1-p)\,1 - c_a\Big),\\ &= 1 - q(\theta) + q(\theta) - q(\theta)(p + c_a),\\ &= 1 - q(\theta)(p + c_a).\end{aligned}$$

De este modo, tendríamos $\overline{\pi}_1 = 1 - q(\theta)(p + c_a)$. Así, los valores que puede tomar $\overline{\pi}_1$ están restringidos por $q(\theta)$. Si se escoge $q(\theta) > 0$ para algún θ, el principal está obligado a definir $\overline{\pi}_1 < 1$. Si $q(\theta) = 0$ para todo $\theta \in]\theta^*, b]$, entonces $\overline{\pi}_1 = 1$ sería factible.

Por último, vamos a modificar la función objetivo. Notemos que

$$\begin{aligned}& & (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) = \overline{\pi}_1,\\ &\Leftrightarrow & (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)(1-p)\pi_2(\theta, s_n) = \overline{\pi}_1 + q(\theta)\,c_a.\end{aligned}$$

Reemplazando esto en la utilidad esperada del principal, y reacomodando términos, tenemos que

$$\begin{aligned}EU_P &= \int_a^{\theta^*} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,\Big[(1-q(\theta))\,\pi_1(\theta) + q(\theta)(1-p)\pi_2(\theta, s_n)\Big] + q(\theta)(\theta\,p - c_p)\Big) f(\theta)d\theta,\\ &= \int_a^{\theta^*} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(\overline{\pi}_1 + q(\theta)\,c_a) + q(\theta)(\theta\,p - c_p)\Big) f(\theta)d\theta,\\ &= \int_a^{\theta^*} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,\overline{\pi}_1 + q(\theta)\Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big)\Big) f(\theta)d\theta,\\ &= \int_a^b \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{\theta^*}^b q(\theta)\Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los argumentos expuestos, el problema que enfrenta el principal puede ser planteado como

$$\underset{\overline{\pi}_1, q:}{\text{Max}} \quad \int_a^b \overline{\pi}_1 \, \theta f(\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^b q(\theta) \Big(\theta \, (c_a + p) - c_p \Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 0, \tag{R.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - q(\theta)(p + c_a), \tag{R.2}$$

donde (R.2) debe cumplirse para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$.

Es posible apreciar que la utilidad esperada del principal es creciente en $q(\theta)$. De este modo, no tiene sentido que $q(\theta)$ varíe según θ, ya que el tipo que realmente restringe la elección de $\overline{\pi}_1$, será aquel que que maximice $q(\theta)$. Luego, es posible demostrar que:

Lema 10: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $q(\theta)$ de la forma

$$q(\theta) = \overline{q} \quad \text{si} \quad \theta \in \left] \frac{c_p}{c_a + p}, b \right],$$

donde $\overline{q}$ es una constante que toma un valor en el intervalo $[0, 1]$.

Este lema se demuestra en el anexo 16. De este modo, (R.2) queda como

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \overline{q} \, (p + c_a).$$

El problema se ha reducido enormemente. Solamente falta escoger las variables $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$, las que, al ser probabilidades, deben estar entre 0 y 1. Vamos a agregar, por tanto, dos restricciones que aseguren que $\overline{q} \in [0, 1]$.

Así, el programa a resolver puede escribirse como

$$\underset{\overline{\pi}_1, \overline{q}}{\text{Max}} \quad \overline{\pi}_1 \int_a^b \theta f(\theta) d\theta + \overline{q} \int_{\theta^*}^b \Big(\theta \, (c_a + p) - c_p \Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 0, \tag{R.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \overline{q} \, (p + c_a), \tag{R.2}$$

$$\overline{q} \geq 0, \tag{R.3}$$

$$\overline{q} \leq 1. \tag{R.4}$$

Es directo ver que estas 4 restricciones aseguran, a su vez, que $\overline{\pi}_1 \leq 1$.

El desarrollo de este problema se encuentra en el anexo 17, y la proposición que sigue resume los valores óptimos de $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$. Como veremos, estos últimos dependen de

$$\mathbb{E}(\theta) = \int_a^b \theta f(\theta) d\theta,$$
$$I_b = \int_{\frac{c_p}{c_a+p}}^b \theta f(\theta) d\theta,$$

y de

$$C_2 = \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\frac{c_p}{c_a+p}}^b f(\theta) d\theta.$$

Proposición 4: Si $\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a$, el mecanismo que maximiza la utilidad esperada del principal está conformado por un vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$, donde:

(i) Si

$$\mathbb{E}(\theta) < 0,$$

la solución la constituye $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (1, 0)$.

(ii) Si

$$\mathbb{E}(\theta) = 0,$$

la solución la constituye $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$ tal que $\overline{q} = 1$ y $0 \leq \overline{\pi}_1 \leq 1 - \overline{q}(p + c_a)$.

(iii) Si

$$0 < \mathbb{E}(\theta) < I_b - C_2,$$

la solución la constituye $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (1, 1 - p - c_a)$.

(iv) Si

$$\mathbb{E}(\theta) = I_b - C_2,$$

la solución la constituye $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$ tal que $0 \leq \overline{q} \leq 1$ y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}(p + c_a)$.

(v) Si

$$\mathbb{E}(\theta) > I_b - C_2,$$

la solución la constituye $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (0, 1)$.

Analicemos, en primer lugar, las expresiones I_b y C_2. Por un lado,

$$
\begin{aligned}
I_b &= \int_{\frac{c_p}{c_a+p}}^{b} \theta f(\theta) d\theta, \\
&= \mathbb{E}\left[\theta \;\middle|\; \theta \geq \frac{c_p}{c_a+p}\right] \int_{\frac{c_p}{c_a+p}}^{b} f(\theta) d\theta, \\
&= \mathbb{E}\left[\theta \;\middle|\; \theta \geq \frac{c_p}{c_a+p}\right] \left(1 - F\left(\frac{c_p}{c_a+p}\right)\right), \\
&= \mathbb{E}\left[\theta \;\middle|\; \theta \geq \frac{c_p}{c_a+p}\right] Pr\left(\theta > \frac{c_p}{c_a+p}\right).
\end{aligned}
$$

De este modo, I_b corresponde a la esperanza de θ, condicional en que $\theta \in]\theta^*, b]$, por la probabilidad de que θ se encuentre dentro de dicho intervalo. Es una medida, pues, de lo que espera ganar el principal entregando el objeto al agente; si θ se encuentra en esos márgenes.

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \left(\frac{c_p}{p+c_a}\right) \int_{\frac{c_p}{c_a+p}}^{b} f(\theta) d\theta, \\
&= \left(\frac{c_p}{p+c_a}\right) \left(1 - F\left(\frac{c_p}{c_a+p}\right)\right), \\
&= \left(\frac{c_p}{p+c_a}\right) Pr\left(\theta > \frac{c_p}{c_a+p}\right).
\end{aligned}
$$

Así, esta expresión puede interpretarse como el costo esperado de verificar al agente. Teniendo en cuenta que $p < 1 - c_a$, sabemos que

$$
\left(\frac{c_p}{p+c_a}\right) > c_p.
$$

De este modo, el hecho de que el test sea ruidoso introduce un *costo indirecto* en el proceso de verificación. El principal estaría incurriendo en un costo c_p, que no siempre le permite aprender el tipo del agente. Este último individuo, anticipando esto, es más propenso a mentir que en el caso en que el test era infalible. Para impedir que esto ocurra, el principal debe darle una mayor probabilidad de llevarse el objeto, lo cual encarece el proceso de verificación.

Este costo indirecto amplifica, de algún modo, el costo directo (c_p) de realizar el test. Teniendo esto en mente, esperaríamos que el principal verifique al agente con una probabilidad menor que antes. O, de manera similar, que las condiciones bajo las cuales esto ocurre sean más restrictivas.

Juntando ambos términos como se hace muestra en la proposición, tenemos que

$$
I_b - C_2 = \left(\mathbb{E}\left[\theta \;\middle|\; \theta \geq \frac{c_p}{c_a+p}\right] - \left(\frac{c_p}{p+c_a}\right)\right) Pr\left(\theta > \frac{c_p}{c_a+p}\right).
$$

Entonces, esta expresión corresponde a la *utilidad neta esperada* que obtiene el principal al verificar al agente y entregarle el objeto, dado que $\theta \in\,]\theta^*, b]$. Esto, por la probabilidad de que el tipo del agente se encuentre en ese intervalo.

En este punto, recordemos que el lema 9 especificaba que

$$(1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\, \pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) = \overline{\pi}_1,$$

para todo $\theta \in\,]\theta^*, b]$. Ahora bien, ya sabemos que $q(\theta)$ es una constante. Y, por tanto, esta identidad puede ser escrita de la forma

$$(1 - \overline{q})\, \overline{\pi}_2 + \overline{q}\Big((1-p)\, \overline{\pi}_3 - c_a\Big) = \overline{\pi}_1, \tag{6}$$

donde $\overline{\pi}_2$ es una constante entre 0 y 1, mientras que $\overline{\pi}_3$ es una constante en el intervalo

$$\left[\frac{c_a}{1-p}, 1\right].$$

La ecuación (6) nos sirve, entonces, para rescatar las probabilidades originales del modelo.

Dicho esto, revisemos los distintos casos enunciados en la proposición[4] 4. Analizando el primero de ellos, tenemos que, si el valor esperado de θ es negativo, el principal prefiere no tomar riesgo alguno. Así, jamás entrega el objeto al agente, si es que el test no se lleva a cabo. Luego, si el agente tiene un tipo igual o inferior a θ^*, su utilidad esperada será nula.

Si $\theta > \theta^*$, el principal siempre le propone hacer el test. Si la verificación funciona correctamente, le otorga el bien al agente con seguridad. Y si el test falla, es posible ver que el objeto es entregado con probabilidad

$$\frac{c_a}{1-p},$$

lo cual se obtiene reemplazando los valores de $\overline{q}$ y $\overline{\pi}_1$ en (6). De esta forma, el principal asigna una probabilidad positiva en caso de que el test resulte en un fracaso. No obstante, es lo suficientemente pequeña, en relación a c_a y p, como para que al agente no le convenga realizar el test, siendo de un tipo inferior a θ^*.

La utilidad esperada del principal es igual a

$$EU_P(\overline{q} = 1, \overline{\pi}_1 = 0) = \int_{\frac{c_p}{c_a+p}}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

Examinemos el caso (iii). En este escenario, el valor esperado de θ es positivo, pero no demasiado grande. En particular, es menor a la utilidad neta que se obtendría verificando al agente, y dándole el bien, condicional en que sea de un tipo superior a θ^*. Es posible ver

[4] Excluiremos del análisis los casos (ii) y (iv), pues su aporte a la discusión es mínimo.

esta condición de una forma alternativa.

$$
\begin{aligned}
& 0 < \mathbb{E}(\theta) < I_b - C_2, \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < \int_a^{\theta^*} \theta f(\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^b \theta f(\theta) d\theta < \int_{\theta^*}^b \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^b f(\theta) d\theta, \\
\Leftrightarrow \quad & -\int_{\theta^*}^b \theta f(\theta) d\theta < \int_a^{\theta^*} \theta f(\theta) d\theta < -\left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^b f(\theta) d\theta.
\end{aligned}
$$

De este modo, el valor esperado de θ, condicional en que se encuentre en el intervalo $[a, \theta^*]$, es negativo. Sin embargo, las creencias del principal no son excesivamente pesimistas, por lo que se atreve a tomar algo más de riesgo.

Por un lado, sigue escogiendo $\overline{q} = 1$. De este modo, siempre invita al agente a dar el test, si recibe un mensaje θ lo suficientemente grande. Pero, ahora, si la verificación se lleva a cabo, invariablemente le entrega el bien; sin importar el resultado de la prueba. La verificación puede ser exitosa o errada; el objeto será otorgado con certeza. Esto se deduce de la condición (6), al reemplazar los valores de $\overline{q}$ y $\overline{\pi}_1$.

Notemos que, por compatibilidad de incentivos, necesariamente debe dar el bien con una probabilidad positiva al agente si este se encuentra en la cola inferior de la distribución. El aumento en $\pi_2(\theta, s_n)$ (ahora $\overline{\pi}_3$) tiene lugar a costa de incrementar $\overline{\pi}_1$ en alguna medida. En particular, sabemos que $\overline{\pi}_1 = 1 - p - c_a$. Luego, mientras mayor sea la precisión del test, así como el costo en que incurre el agente al llevarlo a cabo, menor es esta "compensación" requerida.

En este caso, la utilidad esperada del principal viene dada por

$$
EU_P(\overline{q} = 1, \overline{\pi}_1 = 1 - p - c_a) = \mathbb{E}(\theta) - (p + c_a) \int_a^{\frac{c_p}{c_a + p}} \theta f(\theta) d\theta - c_p \int_{\frac{c_p}{c_a + p}}^b f(\theta) d\theta.
$$

Analicemos el último caso. En este escenario, el valor esperado de θ es lo suficientemente grande como para prescindir del test. Básicamente, para el principal no vale la pena incurrir en el costo asociado a la verificación, dado que sus expectativas acerca del tipo del agente son relativamente optimistas.

Luego, el objeto es entregado "a todo evento". En este caso, la utilidad esperada del principal sería

$$
EU_P(\overline{q} =, \overline{\pi}_1 = 1) = \mathbb{E}(\theta).
$$

Examinemos los factores que llevan a la elección de cada mecanismo. Por un lado, $\mathbb{E}(\theta)$ es un elemento importante dentro del análisis que hace el principal. El signo de esta esperanza determinará inmediatamente si nos situamos en el caso (i) o en los otros. De este modo, si las creencias a priori acerca del tipo del agente son muy pesimistas, el principal se inclina a "jugar sobre seguro".

Si el valor esperado de θ es positivo, los parámetros del modelo toman mayor importancia. Notemos que, mientras mayor sea el costo en que incurre el principal al realizarse el test, es más probable que se satisfaga la condición

$$\mathbb{E}(\theta) > I_b - C_2,$$

en cuyo caso el principal no haría nunca el test; entregando el objeto "a ojos cerrados". Lo mismo ocurre a medida que p aumenta. Esto tiene sentido: si el test falla demasiado, la verificación es poco útil. Esto puede interpretarse como un aumento en el costo indirecto de llevar a cabo el test.

Una disminución en c_a tiene el mismo efecto, notemos. Dado que no pierde tanto al realizar la prueba, el agente tiene incentivos a arriesgarse y rendirla; con probabilidad $(1-p)$ podría engañar al principal. Luego, la observancia de compatibilidad de incentivos es más costosa para el principal.

Por último, en la condición mencionada no incide el valor de

$$\int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta,$$

ya que dicho término se encuentra a ambos lados de esa inecuación. De este modo, el tramo relevante para el principal es $[a, \theta^*]$. Si el valor esperado de θ para la cola inferior de la distribución se incrementa, es más probable que el mecanismo termine siendo $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (0, 1)$.

7. Conclusión

Hay varias situaciones en que el problema de agencia planteado en este trabajo, parece darse. En la introducción propusimos el caso de un gobierno central y el alcalde de un pueblo. Pero podemos pensar en otras situaciones con características esencialmente similares a las de nuestro modelo.

Por ejemplo, una empresa que está analizando la opción de contratar a un abogado, conociendo vagamente las cualidades de este último en el caso particular para el que lo requieren. Al abogado podría interesarle, sobre todo, el pago que recibirá si llegan a un acuerdo. Notemos que no tiene sentido realizar transferencias monetarias previas a un contrato, pero sí es razonable imaginar una revisión, en conjunto, de los casos llevados por este individuo.

De manera general, imaginemos cualquier escenario que involucre a un vendedor y a un comprador desinformado. En la práctica, muchas veces el precio del producto no es negociable, y rara vez observamos pagos entre ambas partes si el bien no ha sido vendido. En cambio, es factible pensar que el comprador requiera mayor información respecto de la calidad del producto. El levantamiento de evidencia, a su vez, puede depender crucialmente del vendedor.

En este trabajo, se muestra que las decisiones óptimas respecto a la verificación del agente, dependen de la naturaleza del test. Si esta prueba es perfectamente precisa, el jugador desinformado toma en cuenta el costo de levantar información, y sus creencias a priori acerca de la calidad del bien en cuestión. Si la verificación es ruidosa, el principal considera también el costo en que incurre el agente al dar el test.

Parece poco realista pensar en una prueba perfectamente precisa. Hay variables difíciles de medir, contextos de mucha incertidumbre, y otros factores que dificultan la verificación precisa de cualidades inobservables. El ruido introducido en esta tesis abstrae de manera simple esta idea. Sin embargo, una característica esencial del mismo es que se consideran solamente 2 resultados posibles; un escenario en que el test funciona, y otro en que falla completamente. Es sugestivo, pues, analizar una clase de ruido más general, donde los resultados que arroja la verificación sean menos contundentes.

Por otra parte, es interesante pensar en los cambios que se producen cuando la verificación es unilateral. Justamente, en este trabajo se trabajó con información conjuntamente verificable. ¿Qué ocurre si el principal no requiere del consentimiento del agente para verificar su tipo? ¿O si es este último quien propone al principal la realización del test? La posibilidad de rechazar una propuesta de verificación constituye parte importante del poder de negociación que ostenta el agente. ¿Cuánto gana el principal, quitándole esa opción?

Esta y otras preguntas, notemos, pueden analizarse de manera simple en el mismo modelo planteado en este trabajo. Se dejan, pues, para investigación futura.

Referencias

[1] Ben-Porath, E., E. Dekel, and B. Lipman, "Optimal Allocation with Costly Verification". *American Economic Review,* 104, 2014, 3779–3813.

[2] Ben-Porath, E., E. Dekel, and B. Lipman, "Mechanisms with Evidence: Commitment and Robustness". *Working Paper,* 2017.

[3] Border, Kim C., and Joel Sobel, "Samurai Accountant: A Theory of Auditing and Plunder". *Review of Economic Studies,* 54, 1987, 525-40.

[4] Bull, J., and J. Watson, "Hard Evidence and Mechanism Design". *Games and Economic Behavior,* 58, 2007, 75–93.

[5] Gale, Douglas, and Martin Hellwig, "Incentive-Compatible Debt Contracts: The One-Period Problem". *Review of Economic Studies,* 52, 1985, 647-63.

[6] Ginzburg, B., "A Simple Model of Competitive Testing" *Working Paper,* 2018.

[7] Green, J., and J.-J. Laffont, "Partially Verifiable Information and Mechanism Design". *Review of Economic Studies,* 53, 1986, 447–456.

[8] Halac, M., and Pierre Yared, "Commitment vs. Flexibility with Costly Verification". *Working Paper,* 2017.

[9] Kartik, N., and Olivier T., "Implementation with Evidence". *Theoretical Economics,* 1, 2012, 323-55.

[10] Mookherjee, Dilip, and Ivan Png, "Optimal Auditing, Insurance, and Redistribution". *Quarterly Journal of Economics,* 104, 1989, 399-415.

[11] Spence, Michael, "Job market signaling". *The Quarterly Journal of Economics,* 87, 1973, 355-74.

[12] Townsend, Robert M, "Optimal Contracts and Competitive Markets with Costly State Verification". *Journal of Economic Theory* 21, 1979, 265-93.

Anexo 1

En este apartado, se demuestra el *principio de la revelación*, expuesto en la sección SUAN del trabajo, y que enuncia lo siguiente:

Principio de la Revelación: Dado un mecanismo cualquiera, $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$; siempre existe un mecanismo directo, $\langle \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$, donde

$$\sigma(\theta) \equiv q(m^*(\theta)),$$

$$\varpi_1(\theta) \equiv \pi_1(m^*(\theta)),$$

$$\varpi_2(\theta, s) \equiv \pi_2(m^*(\theta), s),$$

$$\varpi_3(\theta) \equiv \pi_3(m^*(\theta));$$

y tal que:

(i) La utilidad esperada del principal y la del agente son iguales a las que obtenían originalmente.

(ii) La estrategia óptima del agente está conformada por $\theta_m^*(\theta) = \theta$ y por $t^*(\theta)$, donde θ_m corresponde al mensaje que entrega el agente en un mecanismo directo, y donde $t^*(\theta)$ corresponde a la misma función de mejor respuesta que en el mecanismo original.

Demostración: Supongamos un mecanismo cualquiera, $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$, el cual induce un juego bayesiano en que la mejor respuesta del agente está dada por las funciones ${\theta_m}^* : \Theta \to \Theta$ y $t^* : \Theta \to T$.

Sabemos que $m^* : \Theta \to M$ y $t^* : \Theta \to T$ son las funciones de mejor respuesta del agente, esto es, son tales que maximizan su utilidad esperada. De esta forma, para cualquier $\theta \in \Theta$, tenemos que la estrategia $m^*(\theta), t^*(\theta)$ cumple con la siguiente condición:

$$EU_A(\theta, m^*(\theta), t^*(\theta)) \geq EU_A(\theta, m, t)$$

para todo $m \in M, t \in T$.

Escribiendo la utilidad esperada $EU_A(\theta, m, t)$ como lo hicimos al presentar el modelo, vemos que la condición mencionada queda como:

$$\begin{aligned}&(1 - q(m^*(\theta)))\pi_1(m^*(\theta)) + q(m^*(\theta))\pi_3(m^*(\theta))(1 - t^*(\theta)) + q(m^*(\theta))\, t^*(\theta) \Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(m^*(\theta), s) \,|\, \theta\,] - c_a \Big) \\ &\geq (1 - q(m))\pi_1(m) + q(m)\pi_3(m)(1 - t) + q(m)\, t \Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(m, s) \,|\, \theta\,] - c_a \Big),\end{aligned} \tag{1}$$

para todo $m \in M,\ t \in T$.

Definamos un nuevo mecanismo, $\langle \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$. Notemos que es directo, esto es, el conjunto de mensajes que le es posible enviar al agente está dado por $\Theta = [a, b]$. Vamos a denotar un mensaje cualquiera del agente, en este contexto, como θ_m. En este mecanismo, la probabilidad de invitar al agente a dar el test está dada por la función $\sigma : \Theta \to [0, 1]$, la cual se define de la siguiente forma:

$$\sigma(\theta) \equiv q(m^*(\theta)).$$

Como vemos, la función $\sigma(\theta)$ simula lo que hubiera ocurrido en el mecanismo original. Esto es, la probabilidad de que el agente sea invitado a dar el test en este mecanismo directo, dado que envía un mensaje $\theta_m = \theta$, es exactamente igual a la probabilidad de que el agente sea invitado a dar el test en el mecanismo original, dado que envía el mensaje óptimo correspondiente a ese mismo tipo θ.

Por otro lado, la probabilidad de darle el objeto al agente está dada por las funciones $\varpi_1 : \Theta \to [0, 1]$, $\varpi_2 : \Theta \times \Theta \to [0, 1]$ y $\varpi_3 : \Theta \to [0, 1]$; definidas como:

$$\varpi_1(\theta) \equiv \pi_1(m^*(\theta)),$$

$$\varpi_2(\theta, s) \equiv \pi_2(m^*(\theta), s),$$

$$\varpi_3(\theta) \equiv \pi_3(m^*(\theta)).$$

Nuevamente, lo que hacen estas funciones es simular lo que hubiese ocurrido en el mecanismo original. Básicamente, el principal está comprometiéndose a "jugar por el agente"; tomando el mensaje $\theta_m = \theta$ y provocando los mismos resultados que hubiesen tenido lugar en el mecanismo anterior, si el agente hubiera jugado su estrategia óptima en base a θ.

En un primer paso, vamos a mostrar que enviar un mensaje $\theta_m^*(\theta) = \theta$, en conjunto con la decisión $t^*(\theta)$ original; es óptimo para el agente.

Dado un tipo θ cualquiera, jugar $\theta_m(\theta) = \theta$ y $t^*(\theta)$ será óptimo para el agente, siempre y cuando:

$$EU_A(\theta, \theta_m = \theta, t^*(\theta)) \geq EU_A(\theta, \widehat{\theta}_m = \widehat{\theta},\ t)$$

para todo $\widehat{\theta}_m \in \Theta$, $t \in T$.

Esto es, para cualquier tipo del agente, debe cumplirse que la utilidad esperada de ser honesto y mantener su decisión respecto de realizar o no el test (en caso de que lo inviten a hacerlo), sea mayor o igual a la utilidad esperada de mentir, y/o de cambiar la respuesta a la eventual invitación (respecto a la decisión óptima en el mecanismo original).

Verifiquemos que esto sí se cumple:

$$EU_A(\theta, \theta_m = \theta, t^*(\theta)) \tag{2}$$
$$= (1-\sigma(\theta))\varpi_1(\theta) + \sigma(\theta)\varpi_3(\theta)(1-t^*(\theta)) + \sigma(\theta)\, t^*(\theta)\Big(\, \mathbb{E}[\, \varpi_2(\theta, s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big), \tag{3}$$
$$= (1-q(m^*(\theta)))\pi_1(m^*(\theta)) + q(m^*(\theta))\pi_3(m^*(\theta))(1-t^*(\theta)) + q(m^*(\theta))\, t^*(\theta)\Big(\, \mathbb{E}[\, \pi_2(m^*(\theta), s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big), \tag{4}$$
$$\geq (1-q(m^*(\widehat{\theta}\,)))\pi_1(m^*(\widehat{\theta}\,)) + q(m^*(\widehat{\theta}\,))\pi_3(m^*(\widehat{\theta}\,))(1-t) + q(m^*(\widehat{\theta}\,))\, t\, \Big(\, \mathbb{E}[\, \pi_2(m^*(\widehat{\theta}\,), s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big), \tag{5}$$
$$= (1-\sigma(\widehat{\theta}\,))\varpi_1(\widehat{\theta}) + \sigma(\widehat{\theta}\,)(1-t)\varpi_3(\widehat{\theta}) + \sigma(\widehat{\theta}\,)\, t\, \Big(\, \mathbb{E}[\, \varpi_2(\widehat{\theta}, s)\,|\,\theta\,] - c_a\Big), \tag{6}$$
$$= EU_A(\theta, \widehat{\theta}_m = \widehat{\theta}, t\ ); \tag{7}$$

donde esto se cumple para cualquier $\theta \in \Theta$, para todo $\widehat{\theta} \in \Theta$, y para todo $t \in T$.

Para pasar de (3) a (4), hemos utilizado la definición de las funciones $\sigma(\theta)$, $\varpi_1(\theta)$, $\varpi_2(\theta, s)$ y $\varpi_3(\theta)$. Sabemos, luego, que la expresión (4) es mayor o igual que (5), por cómo están definidas $m^*(\theta)$ y $t^*(\theta)$. Estas son las funciones de mejor respuesta del agente, que maximizan (para cualquier θ) su utilidad esperada. Esto significa que, dado un tipo θ al agente nunca le conviene enviar un mensaje distinto a $m^*(\theta)$ y/o tomar otra decisión que no sea $t^*(\theta)$. Ello incluye, notemos, enviar un mensaje $m^*(\widehat{\theta}\,)$, en combinación con algún t cualquiera. El mensaje $m^*(\widehat{\theta}\,)$ sería óptimo para un tipo $\widehat{\theta}$; pero no para el verdadero tipo del agente.

La ecuación (5) es igual a la (6), volviendo a utilizar la definición de las funciones $\sigma(\theta)$, $\varpi_1(\theta)$, $\varpi_2(\theta, s)$ y $\varpi_3(\theta)$. Finalmente, concluimos que,

$$EU_A(\theta, \theta_m = \theta, t^*(\theta)) \geq EU_A(\theta, \widehat{\theta}_m = \widehat{\theta}, t\ )$$

para todo $\widehat{\theta}_m \in \Theta$, y para todo $t\ \in T$.

Verifiquemos ahora que este nuevo mecanismo deja al principal con la misma utilidad esperada que el original. Sea EU_P^0 la utilidad que obtenía con el mecanismo $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$, y sea EU_P^1 la que obtiene ahora, tenemos que

$$EU_P^0 = \int_a^b \Bigg((1-q(m^*(\theta)))\pi_1(m^*(\theta))\,\theta + q(m^*(\theta))\pi_3(m^*(\theta))(1-t^*(\theta))\,\theta \\ + q(m^*(\theta))\, t^*(\theta)\Big(\, \mathbb{E}[\, \pi_2(m^*(\theta), s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_p\Big)\Bigg) f(\theta) d\theta.$$

Por otro lado,

$$EU_P^1 = \int_a^b \Bigg((1-\sigma(\theta_m^*(\theta)))\varpi_1(\theta_m^*(\theta))\,\theta + \sigma(\theta_m^*(\theta))\varpi_3(\theta_m^*(\theta))(1-t^*(\theta))\,\theta \\ + \sigma(\theta_m^*(\theta))\, t^*(\theta)\Big(\, \mathbb{E}[\, \varpi_2(\theta_m^*(\theta), s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_a\Big)\Bigg) f(\theta) d\theta.$$

Reemplazando $\theta^*_m(\theta) = \theta$, nos queda

$$EU^1_P = \int_a^b \Bigg((1-\sigma(\theta))\varpi_1(\theta)\,\theta + \sigma(\theta)\varpi_3(\theta)(1-t^*(\theta))\,\theta + \sigma(\theta)\,t^*(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\varpi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_a\Big)\Bigg) f(\theta)d\theta.$$

Reemplazando ahora $\sigma(\theta)$, $\varpi_1(\theta)$, $\varpi_2(\theta,s)$ y $\varpi_3(\theta)$; nos queda

$$EU^1_P = \int_a^b \Bigg((1-q(m^*(\theta)))\pi_1(m^*(\theta))\,\theta + q(m^*(\theta))\pi_3(m^*(\theta))(1-t^*(\theta))\,\theta + q(m^*(\theta))\,t^*(\theta)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(m^*(\theta),s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_p\Big)\Bigg) f(\theta)d\theta.$$

Dado que $t^*(\theta)$ es exactamente igual en ambos mecanismos, tenemos que esta última expresión es igual a EU^0_P.

Por tanto, podemos concluir que el mecanismo directo $\langle \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$ induce *truth-telling*, y produce los mismos resultados que el mecanismo $\langle \mathbf{M}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$. Entonces, podemos restringir el problema a la búsqueda de un mecanismo directo en que se cumpla $\theta^*_m(\theta) = \theta$. Esto, sin pérdida de generalidad.

Anexo 2

En este apartado, se demuestra el *principio del acuerdo*, expuesto en la sección 5 del trabajo, y que enuncia lo siguiente:

Principio del Acuerdo: Supongamos un mecanismo directo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$ cualquiera, en el cual $\theta_m^*(\theta) = \theta$, y en el que $t^*(\theta)$ corresponde a la función de mejor respuesta referente a la realización del test. Luego, siempre existe un mecanismo directo $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$, definido como

$$\sigma(\theta_m) = \begin{cases} q(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 1 \\ \\ 0 & si \quad t^*(\theta_m) = 0 \end{cases},$$

$$\varpi_1(\theta_m) = \begin{cases} \pi_1(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 1 \\ \\ \pi_1(\theta_m)(1 - q(\theta_m)) + \pi_3(\theta_m)q(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 0 \end{cases},$$

$$\varpi_2(\theta_m, s) \equiv \pi_2(\theta_m, s),$$

$$\varpi_3(\theta_m) \equiv 0.$$

tal que:

(i) Las utilidades esperadas del principal y el agente son iguales a las que obtenían en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$.

(ii) La estrategia óptima del agente respecto al mensaje a enviar sigue siendo $\theta_m^*(\theta) = \theta$.

(iii) El agente jamás rechaza una invitación del principal a realizar el test. Es decir, el nuevo mecanismo induce $t^*(\theta) \equiv 1$.

Demostración: Supongamos un mecanismo cualquiera, $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$, el cual induce un juego bayesiano en que la mejor respuesta del agente está dada por las funciones ${\theta_m}^* : \Theta \to \Theta$ y $t^* : \Theta \to T$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que dicho mecanismo induce $\theta_m^*(\theta) = \theta$.

En cuanto a $t^*(\theta)$, sabemos que en ocasiones esta función tomará el valor 0, otras veces el valor 1, y en ciertos escenarios, el agente estará indiferente entre hacer o no el test. Esto último ocurre cuando el agente, al revelar su tipo (para ciertos θ), sabe con seguridad que el principal jamás lo invitará a hacer el test ($q(\theta) = 0$). En estos casos, la decisión respecto de t es irrelevante; si no le proponen hacer el test, claramente no hace ninguna diferencia escoger $t = 0$ o $t = 1$.

Para la demostración que sigue, vamos a suponer que, en aquellas ocasiones en que el agente está indiferente entre hacer o no el test, t toma el valor 1. Esto solamente simplifica la demostración.

Volviendo a la estrategia del agente en este mecanismo en cuestión, digamos que su decisión respecto de realizar o no el test está dada por

$$t^*(\theta) = \begin{cases} 0 & si \quad \theta \in \Theta_1 \\ \\ 1 & si \quad \theta \in \Theta_2 \end{cases},$$

donde $\Theta_1 \subseteq \Theta$, $\Theta_2 \subseteq \Theta$, cumpliéndose ${\Theta_1}^{\mathsf{c}} = \Theta_2$.

Sea $EU_A^0(\theta, \theta_m, t)$ la utilidad esperada del agente en el juego que induce este mecanismo. Podemos ver que está dada por su tipo (θ), el mensaje que envía (θ_m), y la decisión respecto de hacer o no el test (t), en caso de que le ofrezcan realizarlo. Sabemos que dicha utilidad, en su forma más general, puede ser escrita como

$$EU_A^0(\theta, \theta_m, t) = (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\pi_3(\theta_m)(1-t) + q(\theta_m)\, t \Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta \,] - c_a \Big).$$

Ahora bien, podemos descomponer lo anterior en los dos casos asociados a t. De esta forma,

$$EU_A^0(\theta, \theta_m, t = 0) = (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\pi_3(\theta_m), \tag{1}$$

$$EU_A^0(\theta, \theta_m, t = 1) = (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta \,] - c_a \Big). \tag{2}$$

Recordemos que $\theta_m^*(\theta)$, $t^*(\theta)$ conforman la mejor respuesta del agente. Eso significa que, para cualquier $\theta \in \Theta$, dichas funciones satisfacen

$$EU_A^0(\theta, \theta_m^*(\theta) = \theta, t^*(\theta)) \geq EU_A^0(\theta, \theta_m, t), \tag{$*$}$$

para todo $\theta_m \in \Theta,\ t \in T$.

Vamos a desagregar dicha condición. Notemos que $t^*(\theta)$ está determinado por el subconjunto de Θ donde cae el tipo del agente. Supongamos, pues, un $\theta_1 \in \Theta_1$ cualquiera. Luego, $t^*(\theta_1) = 0$, y tenemos que la utilidad esperada del agente en este caso es

$$EU_A^0(\theta_1, \theta_m^*(\theta_1) = \theta_1, t^*(\theta_1)) = (1 - q(\theta_1))\pi_1(\theta_1) + q(\theta_1)\pi_3(\theta_1).$$

Sabemos que, para cualquier $\theta_1 \in \Theta_1$, la estrategia $\theta_m^*(\theta_1) = \theta_1,\ t^*(\theta_1) = 0$ es óptima. Esto significa que

$$EU_A^0(\theta_1 \in \Theta_1, \theta_m^*(\theta_1) = \theta_1, t^*(\theta_1) = 0) \geq EU_A^0(\theta_1 \in \Theta_1, \theta_m, t),$$

para todo $\theta_m \in \Theta$ y $t \in T$. De este modo, debe ser cierto lo siguiente

$$\begin{aligned} EU_A^0(\theta_1, \theta_m^*(\theta_1) = \theta_1, t^*(\theta_1) = 0) &= (1 - q(\theta_1))\pi_1(\theta_1) + q(\theta_1)\pi_3(\theta_1), \\ &\geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\pi_3(\theta_m), \\ &= EU_A^0(\theta_1, \theta_m, t = 0); \end{aligned}$$

para todo $\theta_m \in \Theta$. Asimismo,

$$
\begin{aligned}
EU_A^0(\theta_1, \theta_m^*(\theta_1) = \theta_1, t^*(\theta_1) = 0) &= (1 - q(\theta_1))\pi_1(\theta_1) + q(\theta_1)\pi_3(\theta_1), \\
&\geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta_1 \,] - c_a \Big), \\
&= EU_A^0(\theta_1, \theta_m, t = 1);
\end{aligned}
$$

para todo $\theta_m \in \Theta$.

Notemos que hemos sacado 2 conclusiones hasta ahora:

$$
(1 - q(\theta_1))\pi_1(\theta_1) + q(\theta_1)\pi_3(\theta_1) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\pi_3(\theta_m), \tag{3}
$$

$$
(1 - q(\theta_1))\pi_1(\theta_1) + q(\theta_1)\pi_3(\theta_1) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta_1 \,] - c_a \Big). \tag{4}
$$

Las condiciones (3) y (4) se cumplen para todo $\theta_1 \in \Theta_1$, y para todo $\theta_m \in \Theta$. Básicamente, lo que hicimos fue descomponer la condición $(*)$, para el caso en que el agente es de tipo $\theta_1 \in \Theta_1$.

Por otra parte, para un $\theta_2 \in \Theta_2$ cualquiera, sabemos que $t^*(\theta_2) = 1$. Teniendo esto en cuenta,

$$
EU_A^0(\theta_2, \theta_m^*(\theta_2) = \theta_2, t^*(\theta_2) = 1) = (1 - q(\theta_2))\pi_1(\theta_2) + q(\theta_2)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_2, s) \,|\, \theta_2 \,] - c_a \Big).
$$

Luego, para cualquier $\theta_2 \in \Theta_2$, la estrategia $\theta_m^*(\theta_2) = \theta_2$, $t^*(\theta_2) = 1$ es óptima. Esto signfica que

$$
EU_A^0(\theta_2, \theta_m^*(\theta_2) = \theta_2, t^*(\theta_2) = 1) \geq EU_A^0(\theta_2, \theta_m, t),
$$

para todo $\theta_m \in \Theta$ y $t \in T$. De este modo, debe ser cierto lo siguiente

$$
\begin{aligned}
EU_A^0(\theta_2, \theta_m^*(\theta_2) = \theta_2, t^*(\theta_2) = 1) &= (1 - q(\theta_2))\pi_1(\theta_2) + q(\theta_2)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_2, s) \,|\, \theta_2 \,] - c_a \Big), \\
&\geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\pi_3(\theta_m), \\
&= EU_A^0(\theta_2, \theta_m, t = 0);
\end{aligned}
$$

para todo $\theta_m \in \Theta$. Asimismo,

$$
\begin{aligned}
EU_A^0(\theta_2, \theta_m^*(\theta_2) = \theta_2, t^*(\theta_2) = 1) &= (1 - q(\theta_2))\pi_1(\theta_2) + q(\theta_2)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_2, s) \,|\, \theta_2 \,] - c_a \Big), \\
&\geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta_2 \,] - c_a \Big), \\
&= EU_A^0(\theta_2, \theta_m, t = 1);
\end{aligned}
$$

para todo $\theta_m \in \Theta$.

Nuevamente, hemos sacado 2 conclusiones:

$$
(1 - q(\theta_2))\pi_1(\theta_2) + q(\theta_2)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_2, s) \,|\, \theta_2 \,] - c_a \Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\pi_3(\theta_m), \tag{5}
$$

$$
(1 - q(\theta_2))\pi_1(\theta_2) + q(\theta_2)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_2, s) \,|\, \theta_2 \,] - c_a \Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta_2 \,] - c_a \Big). \tag{6}
$$

Nótese que las condiciones (5) y (6) se cumplen para todo $\theta_2 \in \Theta_2$, y para todo $\theta_m \in \Theta$. Básicamente, lo que hicimos fue descomponer la condición $(*)$, para el caso en que el agente es de tipo $\theta_2 \in \Theta_2$.

Ahora, vamos a especificar un nuevo mecanismo, $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$, el cual está definido en base a $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$ y en base a las funciones de mejor respuesta del agente en dicho mecanismo. Veremos que, en equilibrio, produce los mismos resultados (tanto para el principal como para el agente) que el mecanismo original, pero excluye la posibilidad de que el agente rechace una eventual invitación del principal a dar el test. Con esto nos referimos a que dicho evento ocurre con probabilidad 0. Cada vez que el principal propone a su contraparte realizar el test, al agente le conviene hacerlo.

Entonces, $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$ es un mecanismo directo, caracterizado por las funciones

$$\sigma(\theta_m) = \begin{cases} q(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 1 \\ \\ 0 & si \quad t^*(\theta_m) = 0 \end{cases},$$

$$\varpi_1(\theta_m) = \begin{cases} \pi_1(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 1 \\ \\ \pi_1(\theta_m)(1 - q(\theta_m)) + \pi_3(\theta_m)q(\theta_m) & si \quad t^*(\theta_m) = 0 \end{cases},$$

$$\varpi_2(\theta_m, s) \equiv \pi_2(\theta_m, s),$$

$$\varpi_3(\theta_m) \equiv 0.$$

Podemos ver que las funciones están definidas en base a $t^*(\theta)$. En este nuevo mecanismo, el principal recibe un mensaje θ_m del agente, y lo primero que hace es determinar cuál era la mejor respuesta del agente en el mecanismo original, respecto de la realización del test. Simulando esta decisión –que es hipotética, pues es el mecanismo $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varpi_1}, \boldsymbol{\varpi_2}, \boldsymbol{\varpi_3} \rangle$ el que utilizará realmente–, el principal dispone las probabilidades de enviar una invitación y de entregarle el objeto, respectivamente.

La principal característica del nuevo mecanismo es que hay ocasiones en que la probabilidad de proponer el test, es 0. Asimismo, la probabilidad de entregar el objeto, en caso de que el agente se niegue a realizar el test (condicional en que la invitación sí tuvo lugar), también es 0; sin importar el mensaje enviado.

En primer lugar, vamos a caracterizar la mejor respuesta del agente. Ya sabemos cómo es la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$; analicemos qué ocurre ahora. Denotanto la utilidad esperada del agente como $EU_A^1(\theta, \theta_m, t)$ en este nuevo mecanismo, tenemos que, enviando un mensaje θ_m, y tomando una decisión t cualquiera, dicha utilidad viene dada por:

$$\begin{aligned}
&EU_A^1(\theta,\theta_m,t)\\
&= (1-\sigma(\theta_m))\varpi_1(\theta_m) + \sigma(\theta_m)\varpi_3(\theta_m)(1-t) + \sigma(\theta_m)\, t\, \Big(\mathbb{E}[\, \varpi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta \,] - c_a \Big),\\
&= \Big(1 - q(\theta_m)t^*(\theta_m)\Big)\Big[\pi_1(\theta_m)t^*(\theta_m) + [\pi_1(\theta_m)(1-q(\theta_m)) + \pi_3(\theta_m)q(\theta_m)](1-t^*(\theta_m))\Big]\\
&\qquad\qquad + 0\, q(\theta_m)t^*(\theta_m)(1-t) + q(\theta_m)t^*(\theta_m)\, t\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta \,] - c_a \Big),\\
&= \Big[\pi_1(\theta_m)t^*(\theta_m) + [\pi_1(\theta_m)(1-q(\theta_m)) + \pi_3(\theta_m)q(\theta_m)](1-t^*(\theta_m))\Big]\Big(1 - q(\theta_m)t^*(\theta_m)\Big)\\
&\qquad\qquad + q(\theta_m)t^*(\theta_m)\, t\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta \,] - c_a \Big),
\end{aligned}$$

En este punto, notemos que el agente podría escoger algún $\theta_m \in \Theta_1$, o bien un $\theta_m \in \Theta_2$. Siguiendo la primera opción, sabe que $t^*(\theta_m \in \Theta_1) = 0$, mientras que en el segundo caso, $t^*(\theta_m \in \Theta_2) = 1$. Veamos qué forma toma su utilidad esperada en cada escenario. Si $\theta_m \in \Theta_1$, tenemos

$$\begin{aligned}
EU_A^1(\theta,\theta_m \in \Theta_1, t) &= \pi_1(\theta_m)(1-q(\theta_m)) + \pi_3(\theta_m)q(\theta_m),\\
&= EU_A^0(\theta,\theta_m, t=0);
\end{aligned}$$

lo cual se cumple para cualquier $t \in T$. Claramente, dado que en este escenario el principal jamás le propone hacer el test, la decisión respecto de t es irrelevante.

Por otro lado, si es que el agente envía algún $\theta_m \in \Theta_2$, tenemos

$$EU_A^1(\theta,\theta_m \in \Theta_2, t) = \pi_1(\theta_m)(1-q(\theta_m)) + q(\theta_m)\, t\, \Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta \,] - c_a \Big),$$

la cual sí depende del t escogido. Básicamente,

$$\begin{aligned}
EU_A^1(\theta,\theta_m \in \Theta_2, t=0) &= \pi_1(\theta_m)(1-q(\theta_m)),\\
&\leq EU_A^1(\theta,\theta_m \in \Theta_1, t).
\end{aligned}$$

Luego, es evidente que la combinación de un $\theta_m \in \Theta_2$, en conjunto con $t = 0$, no puede ser parte de la nueva estrategia del agente. Siempre prefiere (débil o estrictamente) enviar $\theta_m \in \Theta_1$, en conjunto con algún t cualquiera. Por último,

$$\begin{aligned}
EU_A^1(\theta,\theta_m \in \Theta_2, t=1) &= \pi_1(\theta_m)(1-q(\theta_m)) + q(\theta_m)\Big(\mathbb{E}[\, \pi_2(\theta_m, s) \,|\, \theta \,] - c_a \Big),\\
&= EU_A^0(\theta,\theta_m, t=1).
\end{aligned}$$

Nótese que hemos conectado la utilidad esperada del nuevo mecanismo, con la que obtenía el agente en el mecanismo original. ¿Cuál es, entonces, la mejor respuesta del agente?

Supongamos el agente es de un tipo $\theta_1 \in \Theta_1$. Evidentemente, podría enviar cualquier mensaje y escoger un t cualquiera. Pero es fácil ver que

$$\begin{aligned} EU_A^1(\theta_1, \theta_m = \theta_1, t \in T) &= (1 - q(\theta_1))\pi_1(\theta_1) + q(\theta_1)\pi_3(\theta_1), \\ &= EU_A^0(\theta_1, \theta_m = \theta_1, t = 0), \\ &\geq EU_A^0(\theta_1, \theta_m, t); \end{aligned}$$

para todo $\theta_m \in \Theta$ y $t \in T$. La última desigualdad está garantizada por las condiciones (3) y (4), y notemos que cualquier otra combinación de θ_m, t, está comprendida dentro de $EU_A^0(\theta_1, \theta_m, t)$. Enviar un mensaje $\theta_m \in \Theta_1$ le entrega una utilidad $EU_A^0(\theta_1, \theta_m, t = 0)$, mientras que enviar $\theta_m \in \Theta_2$, junto con $t = 1$, le dejará una utilidad de $EU_A^0(\theta_1, \theta_m, t = 1)$. Entonces, podemos concluir que la mejor respuesta del agente, en estos casos, claramente coincide con $\theta_m^*(\theta)$. La decisión respecto de t, como dijimos, es irrelevante. Vamos a suponer, solo por simplicidad, que en la indiferencia escoge $t = 1$.

Supongamos ahora que el agente es de un tipo $\theta_2 \in \Theta_2$. Nuevamente, es posible apreciar que

$$\begin{aligned} EU_A^1(\theta_2, \theta_m = \theta_2, t = 1) &= (1 - q(\theta_2))\pi_1(\theta_2) + q(\theta_2)\Big(\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta_2, s)\,|\,\theta_2\,] - c_a\Big), \\ &= EU_A^0(\theta_2, \theta_m = \theta_2, t = 1), \\ &\geq EU_A^0(\theta_2, \theta_m, t); \end{aligned}$$

para todo $\theta_m \in \Theta$ y $t \in T$. La última desigualdad está garantizada por las condiciones (5) y (6). Como ya dijimos, ni siquiera hace falta ponerse en el caso en que se escoge algún $\theta_m \in \Theta_2$, en conjunto con $t = 0$, puesto que esta es una estrategia dominada. Por otra parte, enviando un mensaje $\theta_m \in \Theta_1$, con algún t cualquiera, obtiene una utilidad $EU_A^0(\theta_2, \theta_m, t = 0)$. Enviando $\theta_m \in \Theta_2$, con $t = 1$, obtiene $EU_A^0(\theta_2, \theta_m, t = 1)$. Luego, ambas opciones están consideradas. Podemos concluir que, nuevamente, al agente le conviene revelar directamente su tipo; esto es, la función de mejor respuesta coincide con $\theta_m^*(\theta)$. Respecto de la realización del test, ahora la decisión sí coincide con $t^*(\theta)$, puesto que el agente siempre escogerá $t = 1$.

Ya tenemos las funciones de mejor respuesta del agente. Son prácticamente idénticas a las del mecanismo original. Por un lado, $\theta_m^*(\theta) = \theta$, de modo que dicha función no cambia. Por otro, $t^*(\theta) = 1$. Hemos dicho "prácticamente idénticas" porque, justamente cuando existe la posibilidad de recibir una invitación (lo cual ocurre cuando, originalmente, $t^*(\theta) = 1$), el agente nuevamente escoge $t = 1$. Para aquellos casos en que $q(\theta) = 0$ (lo cual ocurre cuando, en el mecanismo original, $t^*(\theta) = 0$), hemos supuesto que el agente escoge $t = 1$. Pero este caso en que ambas funciones difieren es irrelevante, puesto que entonces el agente jamás recibe una invitación a rendir el test.

¿Qué ocurre, finalmente, con la utilidad esperada del principal? Antes que nada, vamos a suponer que los subconjuntos Θ_1 y Θ_2 son tales que están divididos por algún $\overline{\theta}$, donde $a \leq \overline{\theta} \leq b$. De esta forma, $\Theta_1 = [a, \overline{\theta}]$, mientras que $\Theta_2 =]\overline{\theta}, b]$. Notemos que este supuesto no nos hace perder generalidad, simplemente facilita la demostración. Siempre podríamos separar 2 subconjuntos cualesquiera en intervalos. En este caso, nos quedan 2 intervalos solamente. Potencialmente, podrían ser infinitos intervalos; todo depende de Θ_1 y Θ_2.

Sea EU_P^0 la utilidad esperada en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
EU_P^0 = & \int_a^b \bigg((1-q(\theta))\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\pi_3(\theta)(1-t^*(\theta))\,\theta \\
& \quad + \; q(\theta)\,t^*(\theta)\Big(\,\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_p\Big)\bigg) f(\theta)d\theta, \\
= & \int_a^{\overline{\theta}} \Big((1-q(\theta))\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\pi_3(\theta)\,\theta \Big) f(\theta)d\theta \\
& \quad + \int_{\overline{\theta}}^b \bigg((1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\,\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_p\Big)\bigg) f(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Denotando la utilidad esperada del principal en el nuevo mecanismo por EU_P^1, tenemos que ésta viene dada por

$$\begin{aligned}
EU_P^1 = & \int_a^b \bigg((1-\sigma(\theta))\varpi_1(\theta)\,\theta + \sigma(\theta)(1-1)\varpi_3(\theta)\,\theta + \sigma(\theta)\,1\,\Big(\,\mathbb{E}[\,\varpi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_p\Big)\bigg) f(\theta)d\theta, \\
= & \int_a^b \bigg((1-\sigma(\theta))\varpi_1(\theta)\,\theta + \sigma(\theta)\Big(\,\mathbb{E}[\,\varpi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_p\Big)\bigg) f(\theta)d\theta, \\
= & \int_a^b \bigg(\Big(1-q(\theta)t^*(\theta)\Big)\Big[\pi_1(\theta)t^*(\theta) + [\pi_1(\theta)(1-q(\theta)) + \pi_3(\theta)q(\theta)](1-t^*(\theta))\Big]\,\theta \\
& \qquad + q(\theta)t^*(\theta)\Big(\,\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta,s)\,|\,\theta\,]\,\theta - c_p\Big)\bigg) f(\theta)d\theta, \\
= & \int_a^{\overline{\theta}} \Big((1-q(\theta))\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\pi_3(\theta)\,\theta \Big) f(\theta)d\theta \\
& \quad + \int_{\overline{\theta}}^b \bigg((1-q(\theta))\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\Big(\,\mathbb{E}[\,\pi_2(\theta,s)\,|\,\theta]\,\theta - c_p\Big)\bigg) f(\theta)d\theta, \\
= & \; EU_P^0.
\end{aligned}$$

De este modo, vemos que la utilidad esperada del principal no cambia. Queda demostrado, entonces, el *Principio del Acuerdo*.

Anexo 3

En este apartado se demuestra el lema 1, para el caso en que el test es infalible.

Lema 1: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_2(\theta_m, \theta)$ de la forma

$$\pi_2(\theta_m, \theta) = 0 \quad si \quad \theta_m \neq \theta.$$

Demostración: Recordemos que el problema reducido, en el caso del test infalible, queda como:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^b \Big((1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \Big(\pi_2(\theta, \theta)\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$(1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - q(\theta_m))\, \pi_1(\theta_m), \tag{RCI.1}$$

$$(1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - q(\theta_m))\, \pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big(\pi_2(\theta_m, \theta) - c_a\Big); \tag{RCI.2}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \widetilde{q}(\theta),$$

$$\pi_1(\theta) = \widetilde{\pi}_1(\theta),$$

$$\pi_2(\theta_m, \theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) & si \quad \theta_m = \theta \\ \widetilde{\pi}_2(\theta_m, \theta) & si \quad \theta \neq \theta \end{cases}.$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1) y (RCI.2).

Luego, sabemos que las siguientes condiciones se satisfacen:

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m), \tag{1}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$;

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta_m, \theta) - c_a\Big), \tag{2}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Definamos ahora un nuevo mecanismo, $\langle \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}} \rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \widetilde{q}(\theta),$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \widetilde{\pi}_1(\theta),$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta_m, \theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) & si \quad \theta_m = \theta \\ \\ 0 & si \quad \theta \neq \theta \end{cases}.$$

De esta forma, el nuevo mecanismo es exactamente igual al anterior, pero con una diferencia. En aquellos casos en que el test es realizado, y el principal observa una diferencia entre el mensaje recibido y el verdadero tipo del agente; entonces jamás le entrega el objeto.

Primero, verificamos que el nuevo mecanismo satisface (RCI.1). Dicha condición requiere que

$$(1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big(\widehat{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m),$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Esto equivale a que

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m), \tag{3}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Notemos que, por (1), sabemos que esta condición se cumple.

Veremos ahora que (RCI.2) también se satisface. Dicha condición requiere que

$$(1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big(\widehat{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m) + \widehat{q}\,(\theta_m)\Big(\widehat{\pi}_2(\theta_m, \theta) - c_a\Big),$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Notemos que, si $\theta_m = \theta$, esta restricción se satisface con igualdad. Si el agente miente, enviando $\theta_m \neq \theta$, la condición expuesta queda como

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) - \widetilde{q}(\theta_m)c_a, \tag{4}$$

para todo $\theta \in \Theta$, para todo $\theta_m \neq \theta \in \Theta$. Ahora bien, dado que (2) se cumple, es evidente que (4) también. Esto, porque

$$\begin{aligned}(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) &\geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta_m, \theta) - c_a\Big), \\ &\geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) - \widetilde{q}(\theta_m)c_a.\end{aligned}$$

La desigualdad anterior siempre se satisface, dado que $\widetilde{q}(\theta_m) \in [0,1]$, y que $\widetilde{\pi}_2(\theta_m, \theta) \in [0,1]$, seas cuales sean los valores que tomen θ_m y θ. Básicamente, la nueva definición de $\pi_2(\theta_m, \theta)$ para los casos en que $\theta_m \neq \theta$, está facilitando el cumplimiento de (RCI.2).

Se verifica, pues, que el nuevo mecanismo satiface compatibilidad de incentivos. Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás se ve perjudicada, en relación a la que obtenía en el mecanismo original. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{EU}_P &= \int_a^b \left((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta)\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
\widehat{EU}_P &= \int_a^b \left((1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big(\widehat{\pi}_2(\theta, \theta)\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^b \left((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta)\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \widetilde{EU}_P.
\end{aligned}$$

Vemos, por tanto, que la utilidad esperada del principal se mantuvo intacta al pasar de un mecanismo al otro.

Dado un mecanismo cualquiera donde $\pi_2(\theta_m, \theta) > 0$ si $\theta_m \neq \theta$, para algún θ_m y algún θ; siempre podemos encontrar un nuevo mecanismo, donde $\pi_2(\theta_m, \theta) = 0$ si $\theta_m \neq \theta$, para cualquier valor de θ_m y de θ. Este nuevo mecanismo sigue siendo compatible en incentivos, y mantiene al principal con la misma utilidad original. Por tanto, no nos hace perder generalidad.

Queda demostrado, así, el ***lema 1*** para el caso en que el test es infalible.

Anexo 4

En este apartado, se demuestra el ***lema 2***, para el caso en que el test es infalible.

Lema 2: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $q(\theta)$ de la forma

$$q(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p].$$

Demostración: Tomando en cuenta el ***principio de la revelación***, el ***principio del acuerdo*** y el ***lema 1***, todos ya demostrados; sabemos que el problema que enfrenta el principal puede ser planteado como

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^b \left((1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \Big(\pi_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$(1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta) \Big(\pi_2(\theta,\theta) - c_a \Big) \geq (1 - q(\theta_m))\, \pi_1(\theta_m), \qquad \text{(RCI)}$$

donde (RCI) debe cumplirse para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$\pi_1(\theta) = \widetilde{\pi}_1(\theta),$$

$$\pi_2(\theta,\theta) = \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta),$$

$$q(\theta) = \widetilde{q}(\theta);$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI). Luego, sabemos que las funciones especificadas satisfacen la condición

$$(1 - q(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + q(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a \Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m), \qquad (1)$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Dado que $\widetilde{q}(\theta_m)$ y $\widetilde{\pi}_1(\theta_m)$ son probabilidades, sabemos que la expresión

$$(1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m)$$

está acotada superiormente por 1. Básicamente, eso se tendría con $\widetilde{q}(\theta_m) = 0$ y $\widetilde{\pi}_1(\theta_m) = 1$. Sea, por otra parte, Θ_m el conjunto que agrupa los valores que toma esta función, para cada $\theta_m \in \Theta$. Esto es,

$$\Theta_m \equiv \left\{ (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) \;\middle|\; \theta_m \in \Theta \right\}.$$

Sea $\overline{\pi}_1$ el supremo de dicho conjunto. Esto es,

$$\overline{\pi}_1 = \sup \Theta_m.$$

Teniendo en cuenta la definición de $\overline{\pi}_1$, sabemos que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m), \tag{2}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big); \tag{3}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Estas condiciones se derivan de la definición de supremo.

Por un lado, $\overline{\pi}_1$ corresponde a la menor cota superior del conjunto Θ_m, por lo que debe ser cierto que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m),$$

para cualquier elemento de dicho conjunto. Y, por tanto, para cualquier $\theta_m \in \Theta$. Por otra parte, supongamos que (3) no se cumple para algún $\theta \in \Theta$. Ello significa que, para este elemento en particular, se cumple

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 &> (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big), \\ &\geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m), \end{aligned}$$

para todo $\theta_m \in \Theta$. La última desigualdad está asegurada por (1), notemos. Hemos llegado, pues, a una contradicción, ya que, en este escenario, $\overline{\pi}_1$ no podría ser el supremo de Θ_m. Una cota inferior sería, justamente,

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big).$$

Concluimos, entonces, que (2) y (3) se satisfacen.

Vamos a definir un nuevo mecanismo, $\langle \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}} \rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta, \theta) = \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta).$$

En un primer paso, vamos a mostrar que este nuevo mecanismo cumple con (RCI). Notemos que dicha restricción queda como

$$(1-\widehat{q}(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta)+\widehat{q}(\theta)\Big(\widehat{\pi}_2(\theta,\theta)-c_a\Big)\geq(1-\widehat{q}(\theta_m))\,\widehat{\pi}_1(\theta_m),$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Ahora bien, dicha condición puede descomponerse según el valor de θ, dado que las funciones (a excepción de $\widehat{\pi}_2(\theta,\theta)$) cambian dependiendo de si θ es mayor a c_p o no. De este modo, (RCI) puede separarse en 2 restricciones. La primera de ellas aplica para aquellos $\theta \in]c_p, b]$, y queda como

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta)+\widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)-c_a\Big)\geq(1-\widehat{q}(\theta_m))\,\widehat{\pi}_1(\theta_m), \tag{RCI.1}$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$, para todo $\theta_m \in \Theta$.

La segunda se refiere a aquellos $\theta \in [a, c_p]$, y queda de la forma

$$\overline{\pi}_1\geq(1-\widehat{q}(\theta_m))\,\widehat{\pi}_1(\theta_m), \tag{RCI.2}$$

para todo $\theta_m \in \Theta$.

Por último, notemos que cada una de esas restricciones puede descomponerse, a su vez, según el valor del mensaje θ_m. Tomemos primero (RCI.1). El mensaje θ_m puede ser igual o menor a c_p, o puede estar por encima de dicho umbral. De este modo, el cumplimiento de (RCI.1) para todo $\theta_m \in \Theta$, es equivalente a que se satisfaga el siguiente par de condiciones:

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta)+\widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)-c_a\Big)\geq(1-\widetilde{q}(\theta_m))\,\widetilde{\pi}_1(\theta_m), \tag{4}$$

para todo $\theta, \theta_m \in]c_p, b]$; y

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta)+\widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)-c_a\Big)\geq\overline{\pi}_1, \tag{5}$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$.
Del mismo modo, el cumplimiento de (RCI.2) para todo $\theta_m \in \Theta$, es equivalente a que se satisfaga el siguiente par de condiciones:

$$\overline{\pi}_1\geq(1-\widetilde{q}(\theta_m))\,\widetilde{\pi}_1(\theta_m), \tag{6}$$

para todo $\theta_m \in]c_p, b]$; y

$$\overline{\pi}_1\geq\overline{\pi}_1. \tag{7}$$

Consideremos primero la restricción (4). Tal como dijimos en un principio, el mecanismo original satisface (RCI); de modo que (1) se cumple. Es directo, pues, apreciar que (1) implica (4); pues la desigualdad es la misma, y sabemos que $]c_p, b] \subset \Theta$.

Por otra parte, podemos ver que la condición (3) asegura el cumplimiento de (5). Luego, por (2) sabemos que (6) se satisface. Por último, es evidente que (7) se cumple con igualdad, pues tenemos la misma constante a cada lado.

En un segundo paso, vamos a mostrar que el nuevo mecanismo jamás perjudica al principal; esto es, el valor de la función objetivo siempre es mayor o igual al valor que alcanzaba en el mecanismo original. Vamos a denotar la utilidad esperada del principal en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ por $\widetilde{EU}_P$, y la nueva utilidad esperada por $\widehat{EU}_P$. Dicho eso, tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{EU}_P &= \int_a^b \Big((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \Big((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_{c_p}^b \Big((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\widehat{EU}_P = \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \Big((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta.$$

Notemos que, en el intervalo $]c_p, b]$, ambas expresiones son idénticas. De este modo,

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta - \int_a^{c_p} \Big((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \Big(\overline{\pi}_1\, \theta - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta - \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \Big(\theta \Big[\overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) \Big] - \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Sea $\Delta_1(\theta)$ el argumento de esta última integral. Esto es,

$$\Delta_1(\theta) \equiv \theta \Big[\overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) \Big] - \widetilde{q}(\theta) \Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta - c_p \Big).$$

Es directo ver que, si se satisface la condición

$$\Delta_1(\theta) \geq 0 \tag{8}$$

para todo $\theta \in [a, c_p]$; entonces será cierto que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0. \tag{9}$$

Esto último significa, pues, que el nuevo mecanismo siempre deja al principal con una utilidad esperada mayor o igual a la que obtenía en el mecanismo original.

Queda verificar, por tanto, que la condición (8) se satisface en el intervalo mencionado. Sea

$$\Delta_2(\theta) \equiv \overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta),$$

podemos escribir $\Delta_1(\theta)$ de la forma

$$\Delta_1(\theta) = \theta\,\Delta_2(\theta) - \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta - c_p\Big).$$

Vamos a transformar $\Delta_2(\theta)$ de manera adecuada. Notemos, en primer lugar, que (2) y (3) imponen una cota inferior y una superior para $\overline{\pi}_1$. Tomando $\theta_m = \theta$, sabemos que

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) \le \overline{\pi}_1 \le (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big),$$

lo cual se cumple para todo $\theta \in \Theta$; y, en consecuencia, para cualquier $\theta \in [a, c_p]$. Se satisface, por tanto, la condición

$$0 \le \overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) \le \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in [a, c_p]$.

Notemos que hemos llegado a $\Delta_2(\theta)$. De esta forma, sabemos que

$$0 \le \Delta_2(\theta) \le \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big), \tag{10}$$

para todo $\theta \in [a, c_p]$. Por (10), podemos escribir $\Delta_2(\theta)$ del siguiente modo:

$$\Delta_2(\theta) = k(\theta)\widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big),$$

donde $k(\theta) \in [0,1]$. Notemos que $k(\theta)$ podría tomar un valor diferente para cada θ en particular; lo importante es que siempre podemos escribir $\Delta_2(\theta)$ de esta forma, con $k(\theta)$ dentro de ese intervalo.

Reemplazando $\Delta_2(\theta)$ en $\Delta_1(\theta)$, nos queda

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\theta) &= \theta\,\Delta_2(\theta) - \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta - c_p\Big),\\
&= \theta\,k(\theta)\,\widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta - c_p\Big),\\
&= \widetilde{q}(\theta)\Big[k(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\Big].
\end{aligned}$$

Analicemos esta última expresión, tomando un θ cualquiera en el intervalo $[a, c_p]$. Si $\widetilde{q}(\theta) = 0$, nos queda

$$\Delta_1(\theta) = 0,$$

de modo que en estos casos (8) sí se cumple. Si $\widetilde{q}(\theta) > 0$, el valor de $\Delta_1(\theta)$ dependerá crucialmente de θ. Hay 3 casos, básicamente.

Si $\theta = 0$, es directo apreciar que

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\,c_p,\\
&> 0,
\end{aligned}$$

donde sabemos que $\Delta_1(\theta)$ será positivo, pues $c_p > 0$; y estamos en el caso en que $\widetilde{q}(\theta) > 0$.

En este punto, notemos que $\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) \in [c_a, 1]$, para todo $\theta \in \Theta$. Por un lado, dicha función es una probabilidad, por lo que debe estar en el intervalo $[0, 1]$. Por otra parte, analicemos la condición (1), que sabemos se satisface. Por compatibilidad de incentivos, al agente siempre debe convenirle ser honesto y aceptar una eventual invitación a dar el test. Como, en este caso en particular, $\widetilde{q}(\theta) > 0$; dicha invitación sí llega con una probabilidad positiva. Y eso implica, pues, que $\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) \geq c_a$, pues de otro modo el agente rechazaría la propuesta del principal. Se concluye, pues, que $\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) \in [c_a, 1]$, para todo $\theta \in \Theta$.

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos al segundo caso. Si $a \leq \theta < 0$, es posible demostrar[5] que $\Delta_1(\theta)$ es decreciente en $k(\theta)$. Entonces, basta verificar que $\Delta_1(\theta)$ sea mayor o igual a 0 para el menor $\Delta_1(\theta)$ posible (tomando el mayor $k(\theta)$ dentro del intervalo $[0, 1]$), para concluir que, para cualquier $k(\theta)$; será cierto que $\Delta_1(\theta) \geq 0$. Tomemos, pues, $k(\theta) = 1$. En este caso en particular,

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\Big[\theta\left(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\right) - \theta\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) + c_p\Big],\\
&= \widetilde{q}(\theta)\Big[\theta\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - \theta\,c_a - \theta\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) + c_p\Big],\\
&= \widetilde{q}(\theta)\Big[c_p - \theta\,c_a\Big],\\
&> 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\widetilde{q}(\theta) > 0$. Asimismo, tenemos que $\theta < 0$, $c_p > 0$, y que $c_a \in]0, 1[$. Entonces, efectivamente $\Delta_1(\theta)$ es positivo en este caso. Y también lo será, por tanto, para todo $k(\theta) < 1$; pues en esos casos $\Delta_1(\theta)$ será mayor a la expresión encontrada. Notemos que esto es cierto para cualquier $\theta \in [a, 0[$.

Por último, supongamos $0 < \theta \leq c_p$. Teniendo en cuenta que $\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) \in [c_a, 1]$, es posible demostrar[6] que $\Delta_1(\theta)$ es creciente en $k(\theta)$. Entonces, basta verificar que $\Delta_1(\theta)$ no sea negativo para el menor valor que podría tomar (considerando ahora el mínimo $k(\theta)$ dentro del intervalo $[0, 1]$), para concluir que, para cualquier $k(\theta)$; será cierto que $\Delta_1(\theta) \geq 0$. Tomemos, pues, $k(\theta) = 0$. En este caso en particular,

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\Big[c_p - \theta\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\Big],\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Efectivamente, esta expresión es no negativa, dado que $\widetilde{q}(\theta) > 0$, $\theta \in]0, c_p]$ y $\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) \in [c_a, 1]$. Notemos que, si $\theta = c_p$ y $\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) = 1$, $\Delta_1(\theta)$ alcanza su mínimo, quedando igual a 0. En cualquier otro caso, será positivo. Concluimos, pues, que para todo $k(\theta)$, y para cualquier $0 < \theta \leq c_p$; se cumple que $\Delta_1(\theta) \geq 0$.

Queda demostrado, entonces, que (8) sí se satisface para todo $\theta \in [a, c_p]$. Ello implica, a su vez, que la utilidad esperada del principal siempre es igual o mayor a la que alcanzaba en

[5] Esta demostración se adjunta al final de esta sección, de modo de dar fluidez a los pasos principales.

[6] Nuevamente, esto se demuestra al final de la sección.

el mecanismo original, sin importar cómo fuesen las funciones $\widetilde{q}(\theta)$, $\widetilde{\pi}_1(\theta)$ y $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)$. Esto es, sabemos que (9) se satisface.

Dado cualquier mecanismo que cumpla con (RCI.1) y (RCI.2), y donde $q(\theta) > 0$ para algún $\theta \in [a, c_p]$, siempre podemos definir un nuevo mecanismo donde $q(\theta) = 0$ para todo $\theta \in [a, c_p]$; y en el cual la utilidad esperada del principal no se ve perjudicada respecto a la que obtenía originalmente.

Luego, podemos imponer, sin pérdida de generalidad,

$$q(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p].$$

Queda demostrado, entonces, el ***lema 2***.

Demostraciones Adjuntas

Se demuestran a continuación, dos argumentos utilizados en la prueba anterior. Lo que sigue fue excluido previamente para dar fluidez a los pasos seguidos en dicha demostración.

1) Se demuestra ahora que, si $a \leq \theta < 0$,

$$\Delta_1(\theta) = \widetilde{q}(\theta)\Big[k(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\Big]$$

es decreciente en $k(\theta)$. Esto, con $\widetilde{q}(\theta) > 0$, $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [c_a, 1]$, $c_p > 0$, y $c_a \in\ ]0,1[$. Ello significa que, para todo $k_1(\theta), k_2(\theta) \in [0,1]$, $k_1(\theta) < k_2(\theta)$ implica que

$$\begin{aligned}\widetilde{q}(\theta)&\Big[k_1(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\Big]\\ &\geq \widetilde{q}(\theta)\Big[k_2(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\Big]. \qquad (*)\end{aligned}$$

Notemos que, como $\widetilde{q}(\theta) > 0$,

$$\begin{aligned}(*) \Leftrightarrow\ & k_1(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\\ &\geq k_2(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p,\\ \Leftrightarrow\ & k_1(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq k_2(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big).\end{aligned}$$

Sabemos que $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [c_a, 1]$, por lo que

$$\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq 0.$$

Teniendo esto en cuenta, concluimos que

$$(*) \Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta \geq k_2(\theta)\,\theta.$$

Definamos, sin pérdida de generalidad,

$$k_2(\theta) = k_1(\theta) + \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$. Reemplazando esto, nos queda

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta \geq (k_1(\theta) + \varepsilon)\,\theta,\\ &\Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta \geq k_1(\theta)\,\theta + \varepsilon\,\theta,\\ &\Leftrightarrow 0 \geq \varepsilon\,\theta.\end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon > 0$, y que $\theta < 0$, es directo apreciar que dicha desigualdad sí se satisface. De este modo, concluimos que $\Delta_1(\theta)$ es decreciente en $k(\theta)$, en el caso propuesto.

2) Se demuestra ahora que, si $0 < \theta \leq c_p$,

$$\Delta_1(\theta) = \widetilde{q}(\theta)\Big[k(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\Big]$$

es creciente en $k(\theta)$. Esto, con $\widetilde{q}(\theta) > 0$, $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [c_a, 1]$, $c_p > 0$, y $c_a \in \,]0, 1[$. Ello significa que, para todo $k_1(\theta), k_2(\theta) \in [0, 1]$, $k_1(\theta) > k_2(\theta)$ implica que

$$\begin{aligned}&\widetilde{q}(\theta)\Big[k_1(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\Big]\\ &\qquad \geq \widetilde{q}(\theta)\Big[k_2(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\Big]. \qquad (**)\end{aligned}$$

Notemos que, como $\widetilde{q}(\theta) > 0$,

$$\begin{aligned}(**) &\Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p\\ &\qquad \geq k_2(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta + c_p,\\ &\Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq k_2(\theta)\,\theta\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big).\end{aligned}$$

Sabemos que $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [c_a, 1]$, por lo que

$$\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq 0.$$

Teniendo esto en cuenta, concluimos que

$$(**) \Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta \geq k_2(\theta)\,\theta.$$

Definamos, sin pérdida de generalidad,

$$k_1(\theta) = k_2(\theta) + \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$. Reemplazando esto, nos queda

$$\begin{aligned}(**) &\Leftrightarrow (k_2(\theta) + \varepsilon)\,\theta \geq k_2(\theta)\,\theta,\\ &\Leftrightarrow k_2(\theta)\,\theta + \varepsilon\,\theta \geq k_2(\theta)\,\theta,\\ &\Leftrightarrow \varepsilon\,\theta \geq 0.\end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon > 0$, y que $\theta > 0$, es directo apreciar que dicha desigualdad sí se satisface. De este modo, concluimos que $\Delta_1(\theta)$ es creciente en $k(\theta)$, en el caso propuesto.

Anexo 5

En este apartado se demuestra el lema 3, enunciado en la sección 5 de esta entrega, que dice así:

Lema 3: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_2(\theta,\theta)$ de la forma

$$\pi_2(\theta,\theta) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in \,]c_p, b].$$

Demostración: Recordemos, antes que nada, que a partir del ***principio de la revelación***, el ***principio del acuerdo***, el ***teorema 1*** y el ***lema 1***; todos ya demostrados, el problema que enfrenta el principal puede ser planteado de la forma

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{c_p}^{b}\Big((1-q(\theta))\,\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta,\theta)\,\theta - c_p\Big)\Big)f(\theta)d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-q(\theta))\,\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big); \tag{RCI.2}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_2(\theta,\theta) = \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \quad si \quad \theta \in \,]c_p, b];$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1) y (RCI.2).

Luego, sabemos que las funciones especificadas satisfacen las condiciones

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big[\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big]. \tag{2}$$

Definamos un nuevo mecanismo, $\langle \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}} \rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta, \theta) = 1 \quad si \quad \theta \in \,]c_p, b].$$

En un primer paso, veremos que este nuevo mecanismo también cumple con (RCI.1) y (RCI.2).

Por (RCI.1), debe ser cierto que, cuando el agente tiene un tipo menor o igual a c_p, no le conviene mentir, afirmando ser de un tipo superior a dicho umbral. Evidentemente, dado que la utilidad esperada de ser honesto es igual a la constante $\overline{\pi}_1$, no hay incentivos a mentir dentro del intervalo $[a, c_p]$. Luego, debe ser cierto que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{3}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Es directo apreciar que (3) corresponde exactamente a la misma condición que (1), la cual sabemos se satisface. Lo anterior ocurre, evidentemente, porque el nuevo mecanismo no toca el valor de $\overline{\pi}_1$, ni cambia en forma alguna las funciones $q(\theta)$ y $\pi_1(\theta)$.

Por (RCI.2), debe cumplirse que al agente le convenga ser honesto y que acepte una eventual invitación del principal a dar el test. Notemos que el único caso relevante constituye mentir dentro del intervalo $[a, c_p]$, en cuyo caso espera alcanzar una utilidad $\overline{\pi}_1$. Si dice ser de un tipo dentro del intervalo $]c_p, b]$, o bien rechaza una invitación a dar el test (habiendo revelado su verdadero tipo), sabemos que su utilidad esperada es igual a

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta),$$

la cual, como muestra (3), siempre es una peor alternativa a la otra mentira señalada. De este modo, (RCI.2) equivale a que se satisfaga la condición

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big[1 - c_a\Big], \tag{4}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Nosotros sabemos que (2) se cumple. Notemos, teniendo eso en cuenta, que

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big[1 - c_a\Big] \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big[\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big],$$
$$\widetilde{q}(\theta) \geq \widetilde{q}(\theta)\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta).$$

Dado que $\widetilde{q}(\theta) \in [0,1]$, y dado que $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [0,1]$; sabemos que dicha desigualdad siempre se cumple. Por tanto, si la utilidad que alcanza el agente (siendo honesto y aceptando una eventual invitación a realizar el test) ha aumentado, es evidente que (4) se cumple. Tenemos

$$\begin{aligned}(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)+\widetilde{q}(\theta)\Big[1-c_a\Big] &\geq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)+\widetilde{q}(\theta)\Big[\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)-c_a\Big],\\ &\geq \overline{\pi}_1.\end{aligned}$$

Concluimos, pues, que el nuevo mecanismo propuesto también satisface (RCI.1) y (RCI.2). Veremos ahora que la utilidad esperada del principal jamás disminuye en este nuevo escenario. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta - c_p\Big)\bigg)f(\theta)d\theta,\\ \widehat{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big(\theta - c_p\Big)\bigg)f(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Notemos que, para aquellos $\theta \in [a, c_p]$, la utilidad esperada es idéntica. Luego,

$$\begin{aligned}\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P &= \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big(\theta - c_p\Big)\bigg)f(\theta)d\theta\\ &\quad - \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta - c_p\Big)\bigg)f(\theta)d\theta,\\ &= \int_{c_p}^b \bigg(\widetilde{q}(\theta)\Big(\theta - c_p\Big) - \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta - c_p\Big)\bigg)f(\theta)d\theta,\\ &= \int_{c_p}^b \bigg(\widetilde{q}(\theta)\Big(\theta - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\,\theta\Big)\bigg)f(\theta)d\theta,\\ &= \int_{c_p}^b \bigg(\widetilde{q}(\theta)\,\theta\Big[1-\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\Big]\bigg)f(\theta)d\theta,\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Sabemos que dicha expresión es no negativa, puesto que $\widetilde{q}(\theta) \in [0,1]$, $\theta \in\,]c_p, b]$, y $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [0,1]$. Luego, el argumento de la integral es mayor o igual a 0, para todo $\theta \in\,]c_p, b]$. Y esto último implica que la integral también es mayor o igual a 0.

Dado cualquier mecanismo en que la función $\pi_2(\theta,\theta) < 1$ para algún $\theta \in\,]c_p, b]$, siempre podemos encontrar un nuevo mecanismo en el cual $\pi_2(\theta,\theta) = 1$ para todo $\theta \in\,]c_p, b]$; en el cual se satisfacen (RCI.1) y (RCI.2), y en el que el principal obtiene una utilidad esperada igual o mayor a la que alcanzaba originalmente.

Concluimos, pues, que no hay pérdida de generalidad en imponer

$$\pi_2(\theta,\theta) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in\,]c_p, b].$$

Queda demostrado, de esta forma, el ***lema 3***.

Anexo 6

En este apartado se demuestra el lema 4, enunciado en la sección 5 de esta entrega, que dice así:

Lema 4: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_1(\theta)$ de la forma

$$\pi_1(\theta) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in \,]c_p, b].$$

Demostración: Recordemos, antes que nada, que en base al ***principio de la revelación***, al ***principio del acuerdo***, al ***teorema 1*** y a los ***lemas 1*** y ***2***; todos ya demostrados, el problema que enfrenta el principal puede ser planteado de la forma

$$\underset{q:,\pi_1:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \Big((1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \Big(\theta - c_p\Big)\Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big(1 - c_a\Big). \tag{RCI.2}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases}.$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1) y (RCI.2). Recordemos que la función $\pi_2(\theta, \theta)$ ya está definida en el intervalo $]c_p, b]$, mientras que para aquellos $\theta \in [a, c_p]$, su valor es irrelevante, dado que el principal jamás invita al agente a rendir el test.

Luego, sabemos que las funciones especificadas satisfacen las condiciones

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big[1 - c_a\Big]; \tag{2}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Definamos un nuevo mecanismo, $\langle \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}} \rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}\,(\theta) = \begin{cases} q^*(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases} ,$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \begin{cases} 1 & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases} ;$$

donde

$$q^*(\theta) = 1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta).$$

En un primer paso, veremos que este nuevo mecanismo también cumple con (RCI.1) y (RCI.2). La primera restricción de compatibilidad de incentivos nos dice que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - q^*(\theta), \tag{3}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Reemplazando $q^*(\theta)$, (3) queda como

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta).$$

Notemos que, por (1), sabemos que esta condición sí se satisface para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Luego, (3) se cumple.

Analicemos ahora (RCI.2). Según ésta, se debe satisfacer la condición

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \,\widehat{q}\,(\theta)\Big[1 - c_a\Big],$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\begin{aligned} & \overline{\pi}_1 \leq 1 - q^*(\theta) + q^*(\theta)\Big[1 - c_a\Big], \\ \Leftrightarrow \quad & \overline{\pi}_1 \leq 1 - q^*(\theta)\, c_a; \end{aligned} \tag{4}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Reemplazando $q^*(\theta)$, (4) queda como

$$\begin{aligned} & \overline{\pi}_1 \leq 1 - \Big[1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\Big] c_a, \\ \Leftrightarrow \quad & \overline{\pi}_1 \leq \Big(1 - c_a\Big) + (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, c_a; \end{aligned}$$

desigualdad que debe satisfacerse para todo $\theta \in]c_p, b]$.

Ahora bien, por (2) sabemos que se cumple la condición

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big[1-c_a\Big];$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Notemos, pues, que si

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big[1-c_a\Big] \leq \Big(1-c_a\Big) + (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,c_a, \tag{5}$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$; entonces (4) se estaría cumpliendo. Verifiquemos que esto se satisface, para cualquier θ en dicho intervalo.

$$\begin{aligned}
(5) &\Leftrightarrow (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big[1-c_a\Big] - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,c_a - \Big(1-c_a\Big) \leq 0,\\
&\Leftrightarrow (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\Big(1-c_a\Big) - (1-\widetilde{q}(\theta))\Big(1-c_a\Big) \leq 0,\\
&\Leftrightarrow (1-\widetilde{q}(\theta))\Big(1-c_a\Big)(\widetilde{\pi}_1(\theta)-1) \leq 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que esta última expresión jamás es positiva, puesto que $\widetilde{q}(\theta) \in [0,1]$, $c_a \in]0,1[$, y $\widetilde{\pi}_1(\theta) \in [0,1]$. Entonces, (5) sí se satisface. Ello implica, a su vez, que (4) se cumple. Concluimos, por tanto, que el nuevo mecanismo propuesto satisface (RCI.1) y (RCI.2).

Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás disminuye en este nuevo escenario. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{c_p}^b \left((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big[\theta - c_p\Big]\right) f(\theta)d\theta,\\
\widehat{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{c_p}^b \left((1-q^*(\theta))\,\theta + q^*(\theta)\Big[\theta - c_p\Big]\right) f(\theta)d\theta,\\
&= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{c_p}^b \Big(\theta - q^*(\theta)\,\theta + q^*(\theta)\,\theta - q^*(\theta)\,c_p\Big) f(\theta)d\theta,\\
&= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta + \int_{c_p}^b \Big(\theta - q^*(\theta)\,c_p\Big) f(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Notemos que, en el intervalo $[a, c_p]$, la utilidad esperada del principal se mantiene. Luego,

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P = &\int_{c_p}^b \Big(\theta - q^*(\theta)\,c_p\Big) f(\theta)d\theta\\
&- \int_{c_p}^b \left((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big[\theta - c_p\Big]\right) f(\theta)d\theta,\\
= &\int_{c_p}^b \left(\theta - q^*(\theta)\,c_p - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta - \widetilde{q}(\theta)\Big[\theta - c_p\Big]\right) f(\theta)d\theta,\\
= &\int_{c_p}^b \left(\theta\Big[1-(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\Big] - q^*(\theta)\,c_p - \widetilde{q}(\theta)\Big[\theta - c_p\Big]\right) f(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Reemplazando $1-(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)=q^*(\theta)$ en esta última expresión, nos queda

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P-\widetilde{EU}_P &= \int_{c_p}^{b}\left(\theta\, q^*(\theta)-q^*(\theta)\, c_p-\widetilde{q}(\theta)\Big[\theta-c_p\Big]\right)f(\theta)d\theta,\\
&= \int_{c_p}^{b}\left(q^*(\theta)\Big[\theta-c_p\Big]-\widetilde{q}(\theta)\Big[\theta-c_p\Big]\right)f(\theta)d\theta,\\
&= \int_{c_p}^{b}\left((q^*(\theta)-\widetilde{q}(\theta))\Big[\theta-c_p\Big]\right)f(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

En este punto, notemos que, si el argumento de esta integral es no negativo en todo el intervalo $]c_p,b]$, entonces sera cierto que

$$\widehat{EU}_P-\widetilde{EU}_P\geq 0.$$

Teniendo esto en cuenta, es directo apreciar que $(\theta-c_p)>0$; pues justamente $\theta\in\,]c_p,b]$. Entonces, si se cumple

$$q^*(\theta)-\widetilde{q}(\theta)\geq 0 \tag{6}$$

para todo $\theta\in\,]c_p,b]$; tendremos que el argumento completo de la integral será siempre no negativo.

Tomando la definición de $q^*(\theta)$, sabemos que, para un θ cualquiera,

$$\begin{aligned}
q^*(\theta)-\widetilde{q}(\theta) &= 1-(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)-\widetilde{q}(\theta),\\
&= (1-\widetilde{\pi}_1(\theta))+\widetilde{q}(\theta)\,\widetilde{\pi}_1(\theta)-\widetilde{q}(\theta),\\
&= (1-\widetilde{\pi}_1(\theta))-\widetilde{q}(\theta)(1-\widetilde{\pi}_1(\theta)),\\
&= (1-\widetilde{\pi}_1(\theta))(1-\widetilde{q}(\theta)),\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Esto último se cumple, puesto que $\widetilde{\pi}_1(\theta)\in[0,1]$, y $\widetilde{q}(\theta)\in[0,1]$. De este modo, tenemos que (6) sí se satisface, para cualquier $\theta\in\,]c_p,b]$. Eso implica, a su vez, que el argumento de la integral es siempre mayor o igual a 0. Y de ahí se concluye, como dijimos previamente, que

$$\widehat{EU}_P-\widetilde{EU}_P\geq 0.$$

Para cualquier mecanismo en que $\pi_1(\theta)<1$ para algún $\theta\in\,]c_p,b]$, siempre podemos definir un nuevo mecanismo, en el cual $\pi_1(\theta)=1$ para todo $\theta\in\,]c_p,b]$; y en el cual la utilidad esperada del principal es mayor o igual a la que obtenía originalmente.

Queda demostrado, por tanto, el ***lema 4***.

Anexo 7

En este apartado se demuestra el lema 5, enunciado en la sección 5 de esta entrega, que dice así:

Lema 5: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $q(\theta)$ de la forma

$$q(\theta) = \overline{q} \quad \text{si} \quad \theta \in \;]c_p, b],$$

donde $\overline{q}$ es una constante que toma un valor en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración: Recordemos, antes que nada, que en base al ***principio de la revelación***, al ***principio del acuerdo***, al ***teorema 1***, y a los ***lemas 1***, ***2***, y ***3***; todos ya demostrados, el problema que enfrenta el principal puede ser planteado de la forma

$$\underset{\overline{\pi}_1, q:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1 \, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \theta \, f(\theta) d\theta - \int_{c_p}^{b} q(\theta) \, c_p \, f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - q(\theta), \tag{RCI.1}$$
$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - q(\theta) c_a; \tag{RCI.2}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta \in \;]c_p, b]$.

Supongamos un mecanismo $\langle \, \mathbf{q}, \boldsymbol{\overline{\pi}} \, \rangle$ cualquiera, caracterizado por $\overline{\pi}_1$, por la función

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \;]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases} ,$$

tales que se cumplen (RCI.1) y (RCI.2). De este modo, sabemos que se satisfacen las condiciones

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - \widetilde{q}(\theta), \tag{1}$$
$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \widetilde{q}(\theta) c_a; \tag{2}$$

para todo $\theta \in \;]c_p, b]$.

Sea θ_1 un elemento en el intervalo $]c_p, b]$, tal que

$$\theta_1 \in \underset{\theta \in \;]c_p, b]}{\arg\min} \; \widetilde{q}(\theta).$$

Esto significa que

$$\widetilde{q}(\theta_1) \leq \widetilde{q}(\theta), \tag{3}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Definamos un nuevo mecanismo, $\langle\, \widehat{\mathbf{q}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}\, \rangle$, caracterizado por $\overline{\pi}_1$ y por la función

$$\widehat{q}\,(\theta) = \begin{cases} q^*(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases} \quad ;$$

donde $q^*(\theta) = \widetilde{q}(\theta_1)$. Luego, el principal invita al agente a realizar el test con una probabilidad constante, que no depende del mensaje recibido. Notemos que este es el único cambio con respecto al mecanismo anterior; $\overline{\pi}_1$ toma el mismo valor que antes.

Veremos primero que $\langle\, \widehat{\mathbf{q}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}\, \rangle$ satisface (RCI.1) y (RCI.2). Respecto a la primera, debe cumplirse la condición

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - q^*(\theta),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Reemplazando $q^*(\theta)$, esta última condición queda como

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - \widetilde{q}(\theta_1). \tag{4}$$

Dado que $\theta_1 \in \,]c_p, b]$, y sabiendo que (1) se satisface para cualquier θ en ese intervalo, es directo notar que (4) también se cumple.

Por otra parte, por (RCI.2) debe cumplirse

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - q^*(\theta) c_a,$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Reemplazando $q^*(\theta)$, esta última condición queda como

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \widetilde{q}(\theta_1) c_a. \tag{5}$$

Dado que $\theta_1 \in \,]c_p, b]$, y sabiendo que (2) se satisface para cualquier θ en ese intervalo, es directo notar que (5) también se cumple. Concluimos, por tanto, que este nuevo mecanismo satisface tanto (RCI.1) como (RCI.2).

Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás disminuye en este nuevo escenario. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\widetilde{EU}_P = \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \theta\, f(\theta) d\theta - \int_{c_p}^b \widetilde{q}(\theta)\, c_p\, f(\theta) d\theta,$$
$$\widehat{EU}_P = \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \theta\, f(\theta) d\theta - \int_{c_p}^b q^*(\theta)\, c_p\, f(\theta) d\theta.$$

Notemos que ambas expresiones difieren solamente en el último término, que depende de cómo esté definida $q(\theta)$. Luego,

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P = - \int_{c_p}^b q^*(\theta)\, c_p\, f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \widetilde{q}(\theta)\, c_p\, f(\theta) d\theta,$$
$$= \int_{c_p}^b \Big(\widetilde{q}(\theta) - q^*(\theta) \Big) c_p\, f(\theta) d\theta.$$

Dado que $c_p > 0$, si se satisface

$$\widetilde{q}(\theta) - q^*(\theta) \geq 0 \tag{6}$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$; la diferencia entre ambas utilidades esperadas corresponderá a una integral cuyo argumento nunca es negativo. Luego, cumplíendose (6), tendríamos que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0.$$

Verifiquemos que dicha condición se satisface. Reemplazando $q^*(\theta)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{q}(\theta) - q^*(\theta) &= \widetilde{q}(\theta) - \widetilde{q}(\theta_1), \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Esto último se deriva directamente de la condición (3). Dado que $\widetilde{q}(\theta_1)$ corresponde al menor valor que toma la función $\widetilde{q}(\theta)$ para aquellos $\theta \in]c_p, b]$, es evidente que $\widetilde{q}(\theta) - \widetilde{q}(\theta_1)$ nunca es negativo en dicho intervalo. De este modo, (6) se satisface. Y eso implica que la utilidad esperada que alcanza el principal en el nuevo mecanismo, siempre es mayor o igual a la que obtenía originalmente.

Dado un mecanismo con una función $q(\theta)$ cualquiera, siempre podemos definir un nuevo mecanismo en que $q(\theta) = \overline{q}$, donde $\overline{q}$ es una constante en el intervalo $[0, 1]$. Dicho mecanismo satisface compatibilidad de incentivos, y deja al principal con una utilidad esperada igual o mayor a la que alcanzaba en el mecanismo original.

Queda demostrado, entonces, el ***lema 5***.

Anexo 8

En este apartado se desarrolla el problema reducido planteado en la sección 5 del trabajo, tomando en cuenta los ***lemas 1***, ***2***, ***3*** y ***4***, todos ya demostrados. Los resultados de esta sección se resumen en la ***proposición 1***.

Proposición 1: La solución al *problema reducido* de maximización de la utilidad esperada del principal, depende del valor de

$$\int_{a}^{c_p} \theta f(\theta) d\theta \tag{$*$}$$

y de

$$c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta. \tag{$**$}$$

En particular:

(i) Si

$$\int_{a}^{c_p} \theta f(\theta) d\theta > -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta,$$

la solución la constituye el vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (0, 1)$.

(ii) Si

$$\int_{a}^{c_p} \theta f(\theta) d\theta < -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta,$$

la solución la constituye el vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (1, 0)$.

(iii) Si

$$\int_{a}^{c_p} \theta f(\theta) d\theta = -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta,$$

la solución la constituye cualquier vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$ tal que $\overline{q} \in [0, 1]$ y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}$.

Desarrollo: Recordemos el problema planteado hacia el final de la sección 5. Se debe diseñar un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3} \rangle$, tal que resuelva el siguiente problema:

$$\underset{\overline{\pi}_1, \overline{q}}{\text{Max}} \quad \int_{a}^{c_p} \overline{\pi}_1 \, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \theta \, f(\theta) d\theta - \int_{c_p}^{b} \overline{q} \, c_p \, f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - \overline{q}, \tag{RCI.1}$$
$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \overline{q}\, c_a. \tag{RCI.2}$$

Ahora bien, $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$ son dos constantes, que, al ser probabilidades, deben pertenecer al intervalo $[0, 1]$. Asimismo, notemos que, si $0 \leq \overline{q} \leq 1$, se verifica que

$$0 \leq \overline{\pi}_1 \leq 1.$$

Supongamos $\overline{q} = 0$. En dicho caso, (RCI.1) queda como

$$\overline{\pi}_1 \geq 1,$$

mientras que (RCI.2) queda de la forma

$$\overline{\pi}_1 \leq 1.$$

El único valor que puede tomar $\overline{\pi}_1$ en dicho caso, sería $\overline{\pi}_1 = 1$.

Supongamos $\overline{q} = 1$. Ahora, (RCI.1) queda como

$$\overline{\pi}_1 \geq 0,$$

mientras que (RCI.2) toma la forma

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - c_a.$$

Dado que $0 < c_a < 1$, sabemos que, en este caso, $\overline{\pi}_1 \in [0, 1[$.

Supongamos, por último, que $0 < \overline{q} < 1$. En dicho caso, (RCI.1) queda como

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - \overline{q}.$$

Dado que $\overline{q} > 0$, sabemos que *pib* > 0. Por su parte, (RCI.2) toma la forma

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \overline{q} c_a.$$

Dado que $\overline{q} < 1$, y que $0 < c_a < 1$, sabemos que $\overline{\pi}_1 < 1$. Luego, en este caso concluimos que $\overline{\pi}_1 \in]0, 1[$.

Teniendo en cuenta los 3 casos propuestos, podemos concluir que, si $0 \leq \overline{q} \leq 1$, y si se cumplen (RCI.1) y (RCI.2), entonces

$$0 \leq \overline{\pi}_1 \leq 1.$$

De este modo, basta incluir 2 restricciones adicionales en el problema, ambas referidas a $\overline{q}$. Con ellas, nos queda el *problema reducido* planteado en la sección 6.

$$\underset{\overline{\pi}_1, \overline{q}}{\text{Max}} \quad \overline{\pi}_1 \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \theta\, f(\theta) d\theta - \overline{q}\, c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 1 - \overline{q}, \tag{R.1}$$
$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \overline{q}c_a, \tag{R.2}$$
$$\overline{q} \geq 0, \tag{R.3}$$
$$\overline{q} \leq 1. \tag{R.4}$$

Notemos que (R.1) y (R.2) aseguran que el mecanismo satisfaga compatibilidad de incentivos, mientras que (R.3) y (R.4) garantizan que $\overline{q} \in [0, 1]$. Como señalamos, el cumplimiento de las 4 condiciones anteriores asegura que $\overline{\pi}_1$ también pertenezca a dicho intervalo.

El lagrangeano de este problema es

$$\begin{aligned}\underset{\overline{\pi}_1,\overline{q},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}{\text{Max}} \quad \mathcal{L} = {} & \overline{\pi}_1 \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \theta f(\theta) d\theta - \overline{q}\, c_p \int_{c_p}^b f(\theta) d\theta - \lambda_1(1 - \overline{q} - \overline{\pi}_1) \\ & - \lambda_2(\overline{\pi}_1 - 1 + \overline{q}c_a) - \lambda_3(-\overline{q}) - \lambda_4(\overline{q} - 1);\end{aligned}$$

y las condiciones de primer orden[7] (CPO) serían

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \tag{1}$$
$$-c_p \int_{c_p}^b f(\theta) d\theta + \lambda_1 - \lambda_2 c_a + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \tag{2}$$
$$1 - \overline{q} - \overline{\pi}_1 \leq 0, \tag{3}$$
$$\overline{\pi}_1 - 1 + \overline{q}c_a \leq 0, \tag{4}$$
$$-\overline{q} \leq 0, \tag{5}$$
$$\overline{q} - 1 \leq 0, \tag{6}$$
$$\lambda_1 \geq 0, \tag{7}$$
$$\lambda_2 \geq 0, \tag{8}$$
$$\lambda_3 \geq 0, \tag{9}$$
$$\lambda_4 \geq 0, \tag{10}$$
$$\lambda_1(1 - \overline{q} - \overline{\pi}_1) = 0, \tag{11}$$
$$\lambda_2(\overline{\pi}_1 - 1 + \overline{q}c_a) = 0, \tag{12}$$
$$\lambda_3(-\overline{q}) = 0, \tag{13}$$
$$\lambda_4(\overline{q} - 1) = 0. \tag{14}$$

Sabemos que una condición necesaria para la solución de este problema, es que cumpla con estas 14 ecuaciones. Ahora bien, esto no es suficiente. Por ello, evaluaremos cada posible solución (aquellos vectores $(\overline{\pi}_1, \overline{q})$ que cumplan con todas las condiciones de KKT), en la función objetivo; encontrando así aquella que maximice la utilidad esperada del principal. Notemos, mirando las restricciones (11), (12), (13) y (14), que hay 7 casos relevantes a analizar. Revisaremos a continuación cada uno de ellos.

[7] También nos referiremos a estas como condiciones de Karush Kuhn Tucker (KKT).

Caso 1

Supongamos $\overline{q}=0$, y $\overline{\pi}_1=1$. Notemos que las 2 restricciones que aseguran compatibilidad de incentivos, están activas en este caso. De este modo, tenemos $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2\geq 0$, $\lambda_3\geq 0$, y $\lambda_4=0$.

Luego, de la condición (1) se deriva que

$$\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta+\lambda_1-\lambda_2=0,$$

lo que significa que

$$\lambda_1=\lambda_2-\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta.$$

Por restricciones de no negatividad de ambos multiplicadores, debe ser cierto que

$$\lambda_2\geq 0,$$

y a su vez que

$$\begin{aligned}&\lambda_1\geq 0,\\ \Leftrightarrow\quad &\lambda_2\geq\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Por otro lado, la condición (2) queda como

$$-c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta+\lambda_1-\lambda_2c_a+\lambda_3=0.$$

Despejando λ_3, y reemplazando λ_1, nos queda

$$\begin{aligned}\lambda_3&=c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta-\lambda_1+\lambda_2c_a,\\ &=c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta+\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta-\lambda_2(1-c_a).\end{aligned}$$

Por no negatividad de λ_3, se requiere que

$$\begin{aligned}&c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta+\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta-\lambda_2(1-c_a)\geq 0,\\ \Leftrightarrow\quad &\lambda_2(1-c_a)\leq c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta+\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta,\\ \Leftrightarrow\quad &\lambda_2\leq\left(\frac{1}{1-c_a}\right)\left(c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta+\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta\right).\end{aligned}$$

Notemos que las restricciones impuestas sobre λ_2 aseguran que se cumplan todas las condiciones de KKT. Ahora bien, veamos si la combinación de las 3 condiciones mencionadas, tiene alguna implicancia sobre los parámetros del modelo, en orden a caracterizar los escenarios en que este caso constituye una posible solución.

Esto último dependerá de si $\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta$ es positivo o negativo. Si es que

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta < 0,$$

entonces la restricción relevante en el problema es simplemente

$$\left(\frac{1}{1-c_a}\right)\left(c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta + \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta\right) \geq \lambda_2 \geq 0.$$

Un requisito para que esto se cumpla, es que

$$\left(\frac{1}{1-c_a}\right)\left(c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta + \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta\right) \geq 0.$$

Dado que $0 < c_a < 1$, sabemos que

$$\left(\frac{1}{1-c_a}\right) > 1.$$

Entonces, la condición previa se satisface sí y sólo sí

$$\left(c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta + \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta\right) \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta \geq -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta. \tag{1*}$$

En cambio, si

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta > 0,$$

la restricción relevante en este problema vendría siendo

$$\left(\frac{1}{1-c_a}\right)\left(c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta + \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta\right) \geq \lambda_2 \geq \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta.$$

Un requisito para que esto se cumpla, es que

$$\left(\frac{1}{1+c_a}\right)\left(c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta + \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta\right) \geq \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta. \tag{1**}$$

Dado que $0 < c_a < 1$, sabemos que

$$\left(\frac{1}{1-c_a}\right) > 1.$$

Asimismo, como $c_p > 0$, tenemos que

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta > 0.$$

Teniendo en cuenta ambas cosas, es directo apreciar que esto siempre se cumple con holgura.

Por último, si es que

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta = 0,$$

la restricción relevante en este problema vendría siendo

$$\left(\frac{1}{1-c_a}\right) c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta \geq \lambda_2 \geq 0.$$

Un requisito para que esto se cumpla, es que

$$\left(\frac{1}{1-c_a}\right) c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta \geq 0, \tag{1***}$$

lo cual, tomando en cuenta los supuestos hechos sobre los distintos parámetros del modelo, siempre se satisface.

Teniendo en cuenta lo dicho hasta ahora, ¿cuál es la utilidad esperada del principal?

$$\begin{aligned} EU_P(\overline{\pi}_1 = 1, \overline{q} = 0) &= \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \int_a^{b} \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \mathbb{E}(\theta). \end{aligned}$$

Notemos que el principal está entregando el objeto *siempre* al agente, sin verificar *nunca* su tipo (y sin incurrir, por tanto, en ningún costo). Luego, su utilidad esperada corresponde simplemente al valor esperado de θ. Reparemos en que la única condición relevante para que este caso satisfaga todas las condiciones de KKT, es (1*), la cual impone una cota inferior (negativa) para $\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta$. Si el valor de esta integral fuese menor a dicho umbral, entonces $\overline{q} = 0, \overline{\pi}_1 = 1$ no cumple con todas las CPO, y queda descartado como una potencial solución al problema.

Caso 2

Supongamos $\overline{q}=1$, y $\overline{\pi}_1=0$. Esto implica que $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$, y $\lambda_4\geq 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta+\lambda_1=0,$$

de modo que

$$\lambda_1=-\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta.$$

Notemos que, por no negatividad de los multiplicadores, una condición necesaria para que el caso propuesto sea óptimo, es que

$$\begin{aligned} &-\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta\geq 0,\\ \Leftrightarrow\quad &\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta\leq 0.\end{aligned}$$

La condición (2), por su parte, queda de la forma

$$-c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta+\lambda_1-\lambda_4=0,$$

donde al despejar λ_4, y reemplazando λ_1, obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda_4&=\lambda_1-c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta,\\ &=-\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta-c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Nuevamente, por no negatividad de los multiplicadores, debe ser cierto que

$$\begin{aligned} &-\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta-c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta\geq 0,\\ \Leftrightarrow\quad &\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta\ \leq -c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta.\end{aligned}\tag{2*}$$

Es fácil ver que esta última restricción es más fuerte que la primera impuesta; pues no requiere solamente que $\int_a^{c_p}\theta f(\theta)d\theta\leq 0$, sino que dicho término debe ser "lo suficientemente negativo" (recordemos que $0<c_p<b$, de modo que $-c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta<0$).

Notemos que, si se satisface (2*), se estarían cumpliendo todas las CPO del problema. ¿Cuál es la utilidad esperada del principal?

$$EU_P(\overline{\pi}_1=0,\overline{q}=1)=\int_{c_p}^{b}\theta f(\theta)d\theta-c_p\int_{c_p}^{b}f(\theta)d\theta$$

Caso 3

Supongamos $\overline{q} = 1$, y $\overline{\pi}_1 = 1 - c_a$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 \geq 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta - \lambda_2 = 0,$$

de modo que

$$\lambda_2 = \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta.$$

Notemos que por no negatividad de λ_2, se requiere que

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta \geq 0.$$

Por otro lado, de la condición (2) se deriva que

$$-c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta - \lambda_2 c_a - \lambda_4 = 0.$$

Despejando λ_4, y reemplazando λ_2, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta - c_a \lambda_2, \\ &= -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta - c_a \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Nuevamente, debe ser cierto que $\lambda_4 \geq 0$, por lo que debe cumplirse la siguiente condición:

$$\begin{aligned} & - c_a \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta - c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta \geq 0, \\ \Leftrightarrow \qquad & - c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta \geq c_a \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta, \\ \Leftrightarrow \qquad & - \frac{c_p}{c_a} \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta \geq \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que

$$-\frac{c_p}{c_a} \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta < 0,$$

ya que c_a y c_p son parámetros positivos; y $\int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta$ es una probabilidad.

De este modo, las 2 condiciones impuestas sobre $\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta$ son contradictorias, pues implican que

$$0 \leq \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta < 0.$$

Entonces, los valores propuestos para $\overline{q}$ y $\overline{\pi}_1$ no pueden satisfacer todas las CPO, quedando descartado este caso como una posible solución al problema.

Caso 4

Supongamos $\overline{q} = 1$, y $0 < \overline{\pi}_1 < 1 - c_a$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 \geq 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta = 0.$$

Por su parte, por la condición (2) debe cumplirse

$$-c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta - \lambda_4 = 0,$$

, de modo que

$$\lambda_4 = -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta.$$

Pero, como ya se ha dicho, sabemos que

$$-c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta < 0,$$

por lo que este caso no satisface la condición (10) de no negatividad de λ_4. De este modo, los valores propuestos para $\overline{q}$ y $\overline{\pi}_1$ no satisfacen todas las condiciones de KKT. Así, este caso queda descartado como una potencial solución al problema.

Caso 5

Supongamos $0 < \overline{q} < 1$, y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}$. Esto implica que $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 = 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta + \lambda_1 = 0,$$

de modo que

$$\lambda_1 = -\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta.$$

Por no negatividad de λ_1, se requiere que

$$-\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta \geq 0,$$

Por otro lado, de la condición (2) se deriva que

$$-c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta + \lambda_1 = 0,$$

por lo que

$$\lambda_1 = c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta;$$

donde este término sabemos que es positivo. Notemos, entonces, que tomando las dos identidades encontradas para λ_1, llegamos a la condición

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta = -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta; \tag{5*}$$

donde esta condición es más restrictiva que la encontrada anteriormente para $\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta$. Notemos que no sólo debe ser menor o igual a 0, sino que debe ser igual a un término negativo.

Por otro lado, cumpliéndose (5*), tenemos que se satisfacen todas las condiciones de primer orden. ¿Cómo queda, entonces, la utilidad esperada del principal?

$$\begin{aligned} EU_P(\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}, 0 < \overline{q} < 1) &= (1 - \overline{q}) \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \overline{q} c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta, \\ &= \int_a^{b} \theta f(\theta) d\theta - \overline{q} \left[\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta + c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta \right], \\ &= \int_a^{b} \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \mathbb{E}(\theta). \end{aligned}$$

Notemos que se ha utilizado la condición (5*) en el desarrollo de esta expresión. Esa es la razón por la que el paréntesis que multiplica a $\overline{q}$ debe ser igual a 0, cualquiera sea el $\overline{q}$ escogido.

Caso 6

Supongamos $0 < \overline{q} < 1$, y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}\, c_a$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 = 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta - \lambda_2 = 0,$$

de modo que

$$\lambda_2 = \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta.$$

Por no negatividad de λ_2, debe ser cierto que

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta \geq 0.$$

Por otro lado, de la condición (2) se deriva que

$$-c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta)d\theta - \lambda_2 c_a = 0,$$

por lo que

$$\lambda_2 = -\frac{c_p}{c_a} \int_{c_p}^{b} f(\theta)d\theta.$$

Ahora bien, sabemos que

$$-\frac{c_p}{c_a} \int_{c_p}^{b} f(\theta)d\theta < 0,$$

por lo que λ_2 sería negativo. Esto viola la condición (8), de modo que los valores propuestos para $\overline{q}$ y $\overline{\pi}_1$ no satisfacen todas las CPO. Entonces, este caso queda descartado como una posible solución al problema.

Caso 7

Por último, supongamos $0 < \overline{q} < 1$, y $1 - \overline{q} < \overline{\pi}_1 < 1 - \overline{q}\, c_a$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 = 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\int_{a}^{c_p} \theta f(\theta)d\theta = 0.$$

A su vez, de la condición (2) se deriva que

$$c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta)d\theta = 0.$$

Ahora bien, notemos que esta última condición jamás se cumple. Tenemos que $0 < c_p < b$, y, del mismo modo, un supuesto del modelo es que $f(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \Theta$. Teniendo esto en cuenta, sabemos que

$$\int_{c_p}^{b} f(\theta)d\theta > 0.$$

Por tanto, concluimos que

$$c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta)d\theta > 0,$$

por lo que (2) no se satisface. De este modo, en el caso propuesto no se cumplen todas las condiciones de KKT, quedando descartado como una solución potencial al problema.

Análisis de los Casos

Los casos 3, 4, 6 y 7 han sido descartados como posibles soluciones al problema que enfrenta el principal, pues no satisfacen todas las condiciones de primer orden. Luego, vamos a considerar solamente los casos 1, 2 y 5.

Recordemos que (2*) es la condición necesaria para que el caso 2 sea óptimo. Dicha restricción impone que

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta \leq -c_p \int_{c_p}^b f(\theta) d\theta.$$

Por su parte, (1*) requiere que

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta \geq -c_p \int_{c_p}^b f(\theta) d\theta,$$

mientras que (5*) es de la forma

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta = -c_p \int_{c_p}^b f(\theta) d\theta.$$

Notemos, por tanto, que las condiciones (1*), (2*) y (5*) son mutuamente excluyentes, excepto por el escenario en que

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta = -c_p \int_{c_p}^b f(\theta) d\theta. \tag{$*$}$$

Si $(*)$ se cumple, es directo apreciar que

$$\begin{aligned} EU_P(\overline{\pi}_1 = 1, \overline{q} = 0) &= \mathbb{E}(\theta); \\ EU_P(\overline{\pi}_1 = 0, \overline{q} = 1) &= \int_{c_p}^b \theta f(\theta) d\theta - c_p \int_{c_p}^b f(\theta) d\theta, \\ &= \int_{c_p}^b \theta f(\theta) d\theta + \int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \int_a^b \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \mathbb{E}(\theta); EU_P(\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}, 0 < \overline{q} < 1) \qquad\qquad = \mathbb{E}(\theta). \end{aligned}$$

En este caso en particular, por tanto, las tres opciones satisfacen todas las condiciones de KKT, y dejan al principal con la misma utilidad esperada. Por tanto, si $(*)$ se satisface, todos los casos son óptimos. Esto se resume en la elección de cualquier vector

$$(\overline{\pi}_1, \overline{q})$$

tal que $\overline{q} \in [0,1]$ y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}$. Notemos que si

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta > -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta, \qquad (**)$$

el único caso que cumple con todas las CPO es el 1. Por tanto, el principal maximiza su utilidad esperada escogiendo

$$(\overline{\pi}_1, \overline{q}) = (1, 0).$$

Por último, si

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta < -c_p \int_{c_p}^{b} f(\theta) d\theta, \qquad (***)$$

el único caso que cumple con todas las CPO es el 2. En dicho caso, el principal maximiza su utilidad esperada escogiendo

$$(\overline{\pi}_1, \overline{q}) = (0, 1).$$

Hemos cubierto, así, todas los valores posibles para

$$\int_a^{c_p} \theta f(\theta) d\theta,$$

quedando determinada la solución del problema de optimización en cada escenario, y quedando demostrada, por tanto, la ***proposición 1***.

Anexo 9

En este apartado se demuestra el lema 1, para el caso en que el test es ruidoso.

Lema 1: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_2(\theta_m, \theta)$ de la forma

$$\pi_2(\theta_m, \theta) = 0 \quad si \quad \theta_m \neq \theta.$$

Demostración: Recordemos que el problema reducido, en el caso del test ruidoso, queda como:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \int_a^b \Big((1-q(\theta))\,\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\Big([(1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta)]\,\theta - c_p\Big)\Big) f(\theta)d\theta$$

sujeto a:

$$(1-q(\theta))\,\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m), \quad \text{(RCI.1)}$$

$$(1-q(\theta))\,\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\,\pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big)$$
$$\geq (1-q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m)\Big((1-p)\pi_2(\theta_m, s_n) + p\,\pi_2(\theta_m,\theta) - c_a\Big), \quad \text{(RCI.2)}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \widetilde{q}(\theta),$$

$$\pi_1(\theta) = \widetilde{\pi}_1(\theta),$$

$$\pi_2(\theta_m, \theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) & si \quad \theta_m = \theta \\ \widetilde{\pi}_2(\theta_m,\theta) & si \quad \theta \neq \theta \end{cases},$$

$$\pi_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n).$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1) y (RCI.2).

Luego, sabemos que las siguientes condiciones se satisfacen:

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq (1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m), \quad (1)$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$;

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big)$$
$$\geq (1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta_m,\theta) - c_a\Big), \quad (2)$$

para todo $\theta, \theta_m \Theta$.

Definamos ahora un nuevo mecanismo, $\langle \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}} \rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \widetilde{q}(\theta),$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \widetilde{\pi}_1(\theta),$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta_m, \theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) & si \quad \theta_m = \theta \\ \\ 0 & si \quad \theta \neq \theta \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n).$$

De esta forma, el nuevo mecanismo es exactamente igual al anterior, pero con una diferencia. En aquellos casos en que el test es realizado, el resultado es diferente a s_n, y el principal observa una diferencia entre el mensaje recibido y el verdadero tipo del agente; entonces jamás le entrega el objeto.

Primero, verificamos que el nuevo mecanismo satisface (RCI.1). Dicha condición requiere que

$$(1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta) \Big((1-p) \widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widehat{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m),$$

para todo $\theta, \theta_m \Theta$. Esto equivale a que

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) \Big((1-p) \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m)) \widetilde{\pi}_1(\theta_m), \qquad (3)$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Notemos que, por (1), sabemos que esta condición se cumple.

Veremos ahora que (RCI.2) también se satisface. Dicha condición requiere que

$$\begin{aligned} &(1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta) \Big((1-p) \widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widehat{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \\ &\qquad \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m) + \widehat{q}\,(\theta_m) \Big((1-p) \widehat{\pi}_2(\theta_m, s_n) + p\, \widehat{\pi}_2(\theta_m, \theta) - c_a \Big), \end{aligned}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Notemos que, si $\theta_m = \theta$, esta restricción se cumple con igualdad. Si $\theta_m \neq \theta$, dicha condición equivale a que

$$\begin{aligned} &(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) \Big((1-p) \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \\ &\qquad \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m)) \widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m) \Big((1-p) \widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a \Big), \end{aligned} \qquad (4)$$

para todo $\theta \in \Theta$, para todo para todo $\theta_m \neq \theta \in \Theta$. Ahora bien, dado que (2) se cumple, es evidente que (4) también. Esto, porque

$$\begin{aligned}
&(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \\
&\quad \geq (1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta_m,\theta) - c_a\Big), \\
&\quad \geq (1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a\Big).
\end{aligned}$$

La desigualdad anterior siempre se satisface, dado que $\widetilde{q}(\theta_m) \in [0,1]$, $p \in [0,1]$, y $\widetilde{\pi}_2(\theta_m,\theta) \in [0,1]$, sean cuales sean los valores de θ_m y θ. Básicamente, la nueva definición de $\pi_2(\theta_m,\theta)$ para los casos en que $\theta_m \neq \theta$, está facilitando el cumplimiento de (RCI.2).

Se verifica, pues, que el nuevo mecanismo satiface compatibilidad de incentivos. Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás se ve perjudicada, en relación a la que obtenía en el mecanismo original. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{EU}_P &= \int_a^b \left((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta - c_p\Big)\right) f(\theta)d\theta, \\
\widehat{EU}_P &= \int_a^b \left((1-\widehat{q}(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widehat{q}(\theta)\Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widehat{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta - c_p\Big)\right) f(\theta)d\theta, \\
&= \int_a^b \left((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta - c_p\Big)\right) f(\theta)d\theta, \\
&= \widetilde{EU}_P.
\end{aligned}$$

Vemos, por tanto, que la utilidad esperada del principal se mantuvo intacta al pasar de un mecanismo al otro.

Dado un mecanismo cualquiera donde $\pi_2(\theta_m,\theta) > 0$ si $\theta_m \neq \theta$, para algún θ_m y algún θ; siempre podemos encontrar un nuevo mecanismo, donde $\pi_2(\theta_m,\theta) = 0$ si $\theta_m \neq \theta$, para cualquier valor de θ_m y de θ. Este nuevo mecanismo sigue siendo compatible en incentivos, y mantiene al principal con la misma utilidad original. Por tanto, no nos hace perder generalidad.

Queda demostrado, así, el ***lema 1*** para el caso en que el test es ruidoso.

Anexo 10

En este apartado, se demuestra el ***lema 2***, para el caso en que el test es ruidoso.

Lema 2: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $q(\theta)$ de la forma

$$q(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p].$$

Demostración: Tomando en cuenta el ***principio de la revelación***, el ***principio del acuerdo*** y el ***lema 1***, todos ya demostrados; sabemos que el problema que enfrenta el principal puede ser planteado como

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^b \left((1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \Big([(1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\, \pi_2(\theta, \theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$(1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta) \Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\, \pi_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m), \qquad \text{(RCI.1)}$$

$$\begin{aligned} &(1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta) \Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\, \pi_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \\ &\qquad \geq (1 - q(\theta_m))\pi_1(\theta_m) + q(\theta_m) \Big((1-p)\pi_2(\theta_m, s_n) - c_a \Big), \qquad \text{(RCI.2)} \end{aligned}$$

donde (RCI.1) y (RCI.2) deben cumplirse para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$\begin{aligned} q(\theta) &= \widetilde{q}(\theta), \\ \pi_1(\theta) &= \widetilde{\pi}_1(\theta), \\ \pi_2(\theta, \theta) &= \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta), \\ \pi_2(\theta, s_n) &= \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n); \end{aligned}$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1) y (RCI.2). Luego, sabemos que las funciones especificadas satisfacen las condiciones

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m), \qquad (1)$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$; y

$$\begin{aligned} &(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \\ &\qquad \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m) \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a \Big), \qquad (2) \end{aligned}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Dado que $\widetilde{q}(\theta_m)$ y $\widetilde{\pi}_1(\theta_m)$ son probabilidades, sabemos que la expresión

$$(1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m)$$

está acotada superiormente por 1. Básicamente, eso se tendría con $\widetilde{q}(\theta_m)=0$ y $\widetilde{\pi}_1(\theta_m)=1$. Sea, por otra parte, Θ_m el conjunto que agrupa los valores que toma esta función, para cada $\theta_m \in \Theta$. Esto es,

$$\Theta_m \equiv \left\{ (1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) \;\middle|\; \theta_m \in \Theta \right\}.$$

Sea π_m el supremo de dicho conjunto. Esto es,

$$\pi_m = \sup \Theta_m.$$

Notemos que se satisfacen, pues, las siguientes condiciones:

$$\pi_m \geq (1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m), \tag{3}$$

$$\pi_m \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big); \tag{4}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Estas inecuaciones se derivan de la definición de supremo, y de la condición (1).

Por un lado, π_m corresponde a la menor cota superior del conjunto Θ_m, por lo que debe ser cierto que

$$\pi_m \geq (1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m),$$

para cualquier elemento de dicho conjunto. Y, por tanto, para cualquier $\theta_m \in \Theta$. Por otra parte, supongamos que (4) no se cumple para algún $\theta \in \Theta$. Ello significa que, para este elemento en particular, se tiene

$$\begin{aligned}\pi_m &> (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big),\\ &\geq (1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m),\end{aligned}$$

para todo $\theta_m \in \Theta$. La última desigualdad está asegurada por (1), notemos. Hemos llegado, pues, a una contradicción, ya que, en este escenario, π_m no podría ser el supremo de Θ_m. Una cota inferior sería, justamente,

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big).$$

Concluimos, entonces, que (3) y (4) se satisfacen.

Notemos, por otra parte, que la expresión

$$(1-\widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a\Big)$$

también está acotada superiormente por 1. Esto es así porque $\widetilde{q}(\theta_m)$, $\widetilde{\pi}_1(\theta_m)$, $\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n)$ y p son probabilidades, mientras que c_a también está en el intervalo $[0, 1]$. De este modo, el mayor valor que puede alcanzar dicha función es 1, lo que se tendría con $\widetilde{q}(\theta_m) = 0$ y $\widetilde{\pi}_1(\theta_m) = 1$. Sea, por otra parte, Θ_n el conjunto que agrupa los valores que toma esta expresión, para cada $\theta_m \in \Theta$. Esto es,

$$\Theta_n \equiv \left\{ (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a\Big) \;\Big|\; \theta_m \in \Theta \right\}.$$

Sea π_n el supremo de dicho conjunto. Esto es,

$$\pi_n = \sup \Theta_n.$$

Notemos que se satisfacen, pues, las siguientes condiciones:

$$\pi_n \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a\Big), \tag{5}$$

$$\pi_n \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big); \tag{6}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$. Estas inecuaciones se derivan de la definición de supremo y de la condición (2).

Por un lado, π_n corresponde a la menor cota superior del conjunto Θ_n, por lo que debe ser cierto que

$$\pi_n \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a\Big),$$

para cualquier elemento de dicho conjunto. Y, por tanto, para cualquier $\theta_m \in \Theta$. Por otra parte, supongamos que (6) no se cumple para algún $\theta \in \Theta$. Ello significa que, para este elemento en particular, se tiene

$$\begin{aligned}\pi_n &> (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big),\\ &\geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a\Big),\end{aligned}$$

para todo $\theta_m \in \Theta$. La última desigualdad está asegurada por (2), notemos. Hemos llegado, pues, a una contradicción, ya que, en este escenario, π_n no podría ser el supremo de Θ_n. Una cota inferior sería, justamente,

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big).$$

Concluimos, entonces, que (5) y (6) se satisfacen.

Sea

$$\overline{\pi}_1 = \max\Big\{\pi_m, \pi_n\Big\}.$$

Luego, debe ser cierto que este elemento satisface

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{7}$$

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \tag{8}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big); \tag{9}$$

para todo $\theta \in \Theta$.

Esto ocurre porque, si

$$\pi_m \geq \pi_n,$$

tendremos

$$\pi_m \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta),$$

para todo $\theta \in \Theta$. Esto está dado por (3). Asimismo,

$$\begin{aligned}\pi_m &\geq \pi_n,\\ &\geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),\end{aligned}$$

para todo $\theta \in \Theta$; donde la última desigualdad viene dada por (5). Además,

$$\pi_m \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in \Theta$. Esto está dado por (4). Y, en este caso, se tiene

$$\overline{\pi}_1 = \pi_m,$$

de modo que $\overline{\pi}_1$ satisface las 3 condiciones mencionadas.

Por otra parte, si

$$\pi_n \geq \pi_m,$$

tendremos

$$\pi_n \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in \Theta$. Esto viene dado por (5). Asimismo,

$$\begin{aligned}\pi_n &\geq \pi_m,\\ &\geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta),\end{aligned}$$

para todo $\theta \in \Theta$; donde la última desigualdad viene dada por (3). Además,

$$\pi_n \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in \Theta$. Esto viene dado por (6). Y, en este caso, se tiene

$$\overline{\pi}_1 = \pi_n,$$

de modo que $\overline{\pi}_1$ cumple con las 3 condiciones mencionadas. Concluimos, pues, que efectivamente $\overline{\pi}_1$ satisface (7), (8) y (9), para todo $\theta \in \Theta$. Vamos a definir un nuevo mecanismo, $\langle \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}} \rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_2(\theta, \theta) &= \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta), \\ \widehat{\pi}_2(\theta, s_n) &= \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n). \end{aligned}$$

En un primer paso, vamos a mostrar que este nuevo mecanismo cumple con (RCI.1). Notemos que dicha restricción queda como

$$(1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta) \Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widehat{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m),$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Ahora bien, dicha condición puede descomponerse según el valor de θ, dado que las funciones $\widehat{q}(\theta)$ y $\widehat{\pi}_1(\theta)$ cambian dependiendo de si θ es mayor a c_p o no. De este modo, (RCI.1) puede separarse en 2 restricciones. La primera de ellas aplica para aquellos $\theta \in \,]c_p, b]$, y queda como

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$, para todo $\theta_m \in \Theta$.

La segunda se refiere a aquellos $\theta \in [a, c_p]$, y queda de la forma

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m),$$

para todo $\theta_m \in \Theta$.

Por último, notemos que cada una de esas restricciones puede descomponerse, a su vez, según el valor del mensaje θ_m. Este último puede ser igual o menor a c_p, o puede estar por encima de dicho umbral. Luego, las dos condiciones anteriores equivalen a

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m), \tag{10}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \,]c_p, b]$;

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a \Big) \geq \overline{\pi}_1, \tag{11}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$;

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m), \tag{12}$$

para todo $\theta_m \in \,]c_p, b]$; y

$$\overline{\pi}_1 \geq \overline{\pi}_1. \tag{13}$$

Es posible apreciar que (1) implica (10); pues la desigualdad es la misma, y sabemos que $]c_p, b] \subset \Theta$. Por otra parte, podemos ver que la condición (9) asegura el cumplimiento de (11). Luego, por (7) sabemos que (12) se satisface. Por último, es evidente que (13) se cumple con igualdad, pues tenemos la misma constante a cada lado.

Ahora veremos que el nuevo mecanismo no viola (RCI.2). Dicha restricción queda como

$$\begin{aligned}(1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widehat{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big)\\ \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),\end{aligned}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \Theta$.

Esta condición puede descomponerse según el valor de θ, dado que las funciones $\widehat{q}(\theta)$ y $\widehat{\pi}_1(\theta)$ cambian dependiendo de si θ es mayor a c_p o no. De este modo, (RCI.2) puede separarse en 2 restricciones. La primera de ellas aplica para aquellos $\theta \in \,]c_p, b]$, y queda como

$$\begin{aligned}(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big)\\ \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),\end{aligned}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$, para todo $\theta_m \in \Theta$.

La segunda se refiere a aquellos $\theta \in [a, c_p]$, y queda de la forma

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta_m))\, \widehat{\pi}_1(\theta_m) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),$$

para todo $\theta_m \in \Theta$.

Por último, notemos que cada una de esas restricciones puede descomponerse, a su vez, según el valor del mensaje θ_m. Este último puede ser igual o menor a c_p, o puede estar por encima de dicho umbral. Luego, las dos condiciones anteriores equivalen a

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) \tag{14}$$

para todo $\theta, \theta_m \in \,]c_p, b]$;

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) \geq \overline{\pi}_1, \tag{15}$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$;

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta_m))\, \widetilde{\pi}_1(\theta_m) + \widetilde{q}(\theta_m)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta_m, s_n) - c_a\Big), \tag{16}$$

para todo $\theta_m \in]c_p, b]$; y

$$\overline{\pi}_1 \geq \overline{\pi}_1. \tag{17}$$

Es posible apreciar que (2) implica (14); pues la desigualdad es la misma, y sabemos que $]c_p, b] \subset \Theta$. Por otra parte, podemos ver que la condición (9) asegura el cumplimiento de (15). Luego, por (8) sabemos que (16) se satisface. Por último, es evidente que (17) se cumple con igualdad, pues tenemos la misma constante a cada lado.

En un tercer paso, vamos a mostrar que el nuevo mecanismo jamás perjudica al principal; esto es, el valor de la función objetivo siempre es mayor o igual al valor que alcanzaba en el mecanismo original. Vamos a denotar la utilidad esperada del principal en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ por $\widetilde{EU}_P$, y la nueva utilidad esperada por $\widehat{EU}_P$. Dicho eso, tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{EU}_P &= \int_a^b \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_{c_p}^b \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_{c_p}^b \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Notemos que, en el intervalo $]c_p, b]$, ambas expresiones son idénticas. De este modo,

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta \\
&\quad - \int_a^{c_p} \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \left(\overline{\pi}_1\, \theta - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta - \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \left(\theta \Big[\overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) \Big] - \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Sea $\Delta_1(\theta)$ el argumento de esta última integral. Esto es,

$$\Delta_1(\theta) \equiv \theta \Big[\overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) \Big] - \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big).$$

Es directo ver que, si se satisface la condición

$$\Delta_1(\theta) \geq 0 \tag{18}$$

para todo $\theta \in [a, c_p]$; entonces será cierto que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0. \tag{19}$$

Esto último significa, pues, que el nuevo mecanismo siempre deja al principal con una utilidad esperada mayor o igual a la que obtenía en el mecanismo original.

Queda verificar, por tanto, que la condición (18) se satisface en el intervalo mencionado. Sea

$$\Delta_2(\theta) \equiv \overline{\pi}_1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta),$$

podemos escribir $\Delta_1(\theta)$ de la forma

$$\Delta_1(\theta) = \theta\, \Delta_2(\theta) - \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta)]\, \theta - c_p\Big).$$

Vamos a transformar $\Delta_2(\theta)$ de manera adecuada. Notemos, en primer lugar, que (7) y (9) imponen una cota inferior y una superior para $\overline{\pi}_1$. En particular, sabemos que

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) \leq \overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big),$$

lo cual se cumple para todo $\theta \in \Theta$; y, en consecuencia, para cualquier $\theta \in [a, c_p]$. Se satisface, por tanto, la condición

$$0 \leq \overline{\pi}_1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) \leq \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in [a, c_p]$.

Notemos que hemos llegado a $\Delta_2(\theta)$. De esta forma, sabemos que

$$0 \leq \Delta_2(\theta) \leq \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big), \tag{20}$$

para todo $\theta \in [a, c_p]$. Por (20), podemos escribir $\Delta_2(\theta)$ del siguiente modo:

$$\Delta_2(\theta) = k(\theta)\widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big),$$

donde $k(\theta) \in [0, 1]$. Notemos que $k(\theta)$ podría tomar un valor diferente para cada θ en particular; lo importante es que siempre podemos escribir $\Delta_2(\theta)$ de esta forma, con $k(\theta)$ dentro de ese intervalo.

Reemplazando $\Delta_2(\theta)$ en $\Delta_1(\theta)$, nos queda

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\theta) &= \theta\, \Delta_2(\theta) - \widetilde{q}(\theta)\Big(\widetilde{\pi}_2(\theta, \theta)\, \theta - c_p\Big), \\
&= \theta\, k(\theta)\, \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) - \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta)]\, \theta - c_p\Big), \\
&= \widetilde{q}(\theta)\Big[k(\theta)\, \theta\, \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta, \theta)]\, \theta + c_p\Big].
\end{aligned}$$

Analicemos esta última expresión, tomando un θ cualquiera en el intervalo $[a, c_p]$. Si $\widetilde{q}(\theta) = 0$, nos queda

$$\Delta_1(\theta) = 0,$$

de modo que en estos casos (18) sí se cumple. Si $\widetilde{q}(\theta) > 0$, el valor de $\Delta_1(\theta)$ dependerá crucialmente de θ. Hay 3 casos, básicamente.

Si $\theta = 0$, es directo apreciar que

$$\begin{aligned} \Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\, c_p, \\ &> 0, \end{aligned}$$

donde sabemos que $\Delta_1(\theta)$ será positivo, pues $c_p > 0$; y estamos en el caso en que $\widetilde{q}(\theta) > 0$.

En este punto, notemos que

$$[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] \in [c_a, 1],$$

para todo $\theta \in \Theta$. Dado que $p \in [0,1]$, dicha expresión es la combinación convexa de dos probabilidades. Por tanto, sabemos que debe estar en el intervalo $[0,1]$. Por otra parte, analicemos la condición (1), que sabemos se satisface. Por compatibilidad de incentivos, al agente siempre debe convenirle ser honesto y aceptar una eventual invitación a dar el test. Como, en este caso en particular, $\widetilde{q}(\theta) > 0$; dicha invitación sí llega con una probabilidad positiva. Y eso implica, pues, que $[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] \geq c_a$, pues de otro modo el agente rechazaría la propuesta del principal. (1) implica, pues, esta desigualdad. Se concluye, entonces, que $[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] \in [c_a, 1]$, para todo $\theta \in \Theta$.

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos al segundo caso. Si $a \leq \theta < 0$, es posible demostrar[8] que $\Delta_1(\theta)$ es decreciente en $k(\theta)$. Entonces, basta verificar que $\Delta_1(\theta)$ sea mayor o igual a 0 para el menor $\Delta_1(\theta)$ posible (tomando el mayor $k(\theta)$ dentro del intervalo $[0,1]$), para concluir que, para cualquier $k(\theta)$; será cierto que $\Delta_1(\theta) \geq 0$. Tomemos, pues, $k(\theta) = 1$. En este caso en particular,

$$\begin{aligned} \Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\Big[\theta\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p\Big], \\ &= \widetilde{q}(\theta)\Big[[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta - \theta\, c_a - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p\Big], \\ &= \widetilde{q}(\theta)\Big[c_p - \theta\, c_a\Big], \\ &> 0. \end{aligned}$$

Sabemos que $\widetilde{q}(\theta) > 0$. Asimismo, tenemos que $\theta < 0$, $c_p > 0$, y que $c_a \in]0,1[$. Entonces, efectivamente $\Delta_1(\theta)$ es positivo en este caso. Y también lo será, por tanto, para todo $k(\theta) < 1$; pues en esos casos $\Delta_1(\theta)$ será mayor a la expresión encontrada. Notemos que esto es cierto para cualquier $\theta \in [a, 0[$.

Por último, supongamos $0 < \theta \leq c_p$. Teniendo en cuenta que $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [c_a, 1]$, es posible

[8] Esta demostración se adjunta al final de esta sección, de modo de dar fluidez a los pasos principales.

demostrar[9] que $\Delta_1(\theta)$ es creciente en $k(\theta)$. Entonces, basta verificar que $\Delta_1(\theta)$ no sea negativo para el menor valor que podría tomar (considerando ahora el mínimo $k(\theta)$ dentro del intervalo $[0,1]$), para concluir que, para cualquier $k(\theta)$; será cierto que $\Delta_1(\theta) \geq 0$. Tomemos, pues, $k(\theta) = 0$. En este caso en particular,

$$\begin{aligned} \Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\Big[c_p - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta\Big], \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Efectivamente, esta expresión es no negativa, dado que $\widetilde{q}(\theta) > 0$, $\theta \in]0, c_p]$ y

$$[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] \in [c_a, 1].$$

Notemos que, si $\theta = c_p$ y

$$[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] = 1,$$

$\Delta_1(\theta)$ alcanza su mínimo, quedando igual a 0. En cualquier otro caso, será positivo. Concluimos, pues, que para todo $k(\theta)$, y para cualquier $0 < \theta \leq c_p$; se cumple que $\Delta_1(\theta) \geq 0$.

Queda demostrado, entonces, que (18) sí se satisface para todo $\theta \in [a, c_p]$. Ello implica, a su vez, que la utilidad esperada del principal siempre es igual o mayor a la que alcanzaba en el mecanismo original, sin importar cómo fuesen las funciones $\widetilde{q}(\theta)$, $\widetilde{\pi}_1(\theta)$, $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)$ y $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)$. Esto es, sabemos que (19) se satisface.

Dado cualquier mecanismo que cumpla con (RCI.1) y (RCI.2), y donde $q(\theta) > 0$ para algún $\theta \in [a, c_p]$, siempre podemos definir un nuevo mecanismo donde $q(\theta) = 0$ para todo $\theta \in [a, c_p]$; y en el cual la utilidad esperada del principal no se ve perjudicada respecto a la que obtenía originalmente.

Luego, podemos imponer, sin pérdida de generalidad,

$$q(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [a, c_p].$$

Queda demostrado, entonces, el ***lema 2***.

Demostraciones Adjuntas

Se demuestran a continuación, dos argumentos utilizados en la prueba anterior. Lo que sigue fue excluido previamente para dar fluidez a los pasos seguidos en dicha demostración.

1) Se demuestra ahora que, si $a \leq \theta < 0$,

$$\Delta_1(\theta) = \widetilde{q}(\theta)\Big[k(\theta)\,\theta\,\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p\Big]$$

[9] Nuevamente, esto se demuestra al final de la sección.

es decreciente en $k(\theta)$. Esto, con $\widetilde{q}(\theta) > 0$, $[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] \in [c_a, 1]$, $c_p > 0$, y $c_a \in\ ]0,1[$. Ello significa que, para todo $k_1(\theta), k_2(\theta) \in [0,1]$, $k_1(\theta) < k_2(\theta)$ implica que

$$\begin{aligned}\widetilde{q}(\theta)\Big[k_1(\theta)\,\theta\,\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p\Big] \\ \geq \widetilde{q}(\theta)\Big[k_2(\theta)\,\theta\,\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p\Big].\end{aligned} \tag{$*$}$$

Notemos que, como $\widetilde{q}(\theta) > 0$,

$$\begin{aligned}(*) \Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta\,\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p \\ \geq k_2(\theta)\,\theta\,\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p, \\ \Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta\,\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq k_2(\theta)\,\theta\,\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big).\end{aligned}$$

Sabemos que $[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] \in [c_a, 1]$, por lo que

$$\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq 0.$$

Teniendo esto en cuenta, concluimos que

$$(*) \Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta \geq k_2(\theta)\,\theta.$$

Definamos, sin pérdida de generalidad,

$$k_2(\theta) = k_1(\theta) + \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$. Reemplazando esto, nos queda

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta \geq (k_1(\theta) + \varepsilon)\,\theta, \\ &\Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta \geq k_1(\theta)\,\theta + \varepsilon\,\theta, \\ &\Leftrightarrow 0 \geq \varepsilon\,\theta.\end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon > 0$, y que $\theta < 0$, es directo apreciar que dicha desigualdad sí se satisface. De este modo, concluimos que $\Delta_1(\theta)$ es decreciente en $k(\theta)$, en el caso propuesto.

2) Se demuestra ahora que, si $0 < \theta \leq c_p$,

$$\Delta_1(\theta) = \widetilde{q}(\theta)\Big[k(\theta)\,\theta\,\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p\Big]$$

es creciente en $k(\theta)$. Esto, con $\widetilde{q}(\theta) > 0$, $[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] \in [c_a, 1]$, $c_p > 0$, y $c_a \in\,]0,1[$. Ello significa que, para todo $k_1(\theta), k_2(\theta) \in [0,1]$, $k_1(\theta) > k_2(\theta)$ implica que

$$\begin{aligned}
&\widetilde{q}(\theta)\Big[k_1(\theta)\,\theta\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p\Big] \\
&\qquad \geq \widetilde{q}(\theta)\Big[k_2(\theta)\,\theta\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p\Big].
\end{aligned} \tag{$*$}$$

Notemos que, como $\widetilde{q}(\theta) > 0$,

$$\begin{aligned}
(*) \Leftrightarrow\ & k_1(\theta)\,\theta\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p \\
& \geq k_2(\theta)\,\theta\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta + c_p, \\
\Leftrightarrow\ & k_1(\theta)\,\theta\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq k_2(\theta)\,\theta\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big).
\end{aligned}$$

Sabemos que $[(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)] \in [c_a, 1]$, por lo que

$$\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big) \geq 0.$$

Teniendo esto en cuenta, concluimos que

$$(*) \Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta \geq k_2(\theta)\,\theta.$$

Definamos, sin pérdida de generalidad,

$$k_1(\theta) = k_2(\theta) + \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$. Reemplazando esto, nos queda

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow (k_2(\theta) + \varepsilon)\,\theta \geq k_1(\theta)\,\theta, \\
&\Leftrightarrow k_1(\theta)\,\theta + \varepsilon\,\theta \geq k_1(\theta)\,\theta, \\
&\Leftrightarrow \varepsilon\,\theta \geq 0.
\end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon > 0$, y que $\theta > 0$, es directo apreciar que dicha desigualdad sí se satisface. De este modo, concluimos que $\Delta_1(\theta)$ es creciente en $k(\theta)$, en el caso propuesto.

Anexo 11

En este apartado se demuestra el lema 3, enunciado en la sección 6 de esta entrega, que dice así:

Lema 3: Sin pérdida de generalidad, podemos definir la función $\pi_2(\theta,\theta)$ de la forma

$$\pi_2(\theta,\theta) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in \,]c_p, b].$$

Demostración: Recordemos, antes que nada, que tomando en cuenta el problema reducido planteado en la sección 6, y considerando el ***lema 5***, ya demostrado; el problema que enfrenta el principal puede escribirse como:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1 \, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \Big((1-q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \Big([(1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\, \pi_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \tag{RCI.2}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\, \pi_2(\theta,\theta) - c_a\Big); \tag{RCI.3}$$

donde (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3) deben cumplirse para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_2(\theta,\theta) = \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \quad si \quad \theta \in \,]c_p, b],$$

$$\pi_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n).$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3).

Luego, sabemos que las funciones especificadas satisfacen las condiciones

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \tag{2}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big); \tag{3}$$

donde estas condiciones se cumplen para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Definamos un nuevo mecanismo, $\langle\,\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}}\rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta,\theta) = 1 \quad si \quad \theta \in \,]c_p, b],$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n).$$

En un primer paso, veremos que este nuevo mecanismo también cumple con (RCI.1). Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{4}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Notemos que, por (1), sabemos que esta condición se cumple en el intervalo mencionado.

Veremos ahora que (RCI.2) también se satisface. Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \tag{5}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Notemos que, por (2), sabemos que esta condición se cumple en el intervalo mencionado.

Veremos ahora que (RCI.3) también se satisface. Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widehat{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big); \tag{6}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Notemos que, cumpliéndose (3), esta condición siempre se satisface en el intervalo mencionado. Esto, porque

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_1 &\leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) - c_a\Big),\\ &\leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big);\end{aligned}$$

donde esto se satisface para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. La última desigualdad siempre será cierta, puesto que $\widetilde{q}(\theta) \in [0,1]$, $p \in [0,1]$, y $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [0,1]$; para cualquier $\theta \in \,]c_p, b]$.

Se verifica, pues, que el nuevo mecanismo satiface compatibilidad de incentivos. Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás se ve perjudicada, en relación a la que obtenía en el mecanismo original. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta\\ &\quad + \int_{c_p}^b \Bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta - c_p\Big)\Bigg) f(\theta)d\theta,\\ \widehat{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta\\ &\quad + \int_{c_p}^b \Bigg((1-\widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widehat{q}\,(\theta)\Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,\widehat{\pi}_2(\theta,\theta)]\,\theta - c_p\Big)\Bigg) f(\theta)d\theta,\\ &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\,\theta f(\theta)d\theta\\ &\quad + \int_{c_p}^b \Bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p\,]\,\theta - c_p\Big)\Bigg) f(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Para aquellos $\theta \in [a, c_p]$, la utilidad esperada en ambos mecanismos es idéntica. Luego,

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P &= \int_{c_p}^{b} \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta \\
&\quad - \int_{c_p}^{b} \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^{b} \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right. \\
&\quad \left. - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta - \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^{b} \left(\widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)]\, \theta + c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^{b} \left(\widetilde{q}(\theta) \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta + p\, \theta - (1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta - p\, \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta)\, \theta \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^{b} \left(\widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta \Big(1 - \widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \Big) \right) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Dado que $\widetilde{q}(\theta) \in [0,1]$, $p \in [0,1]$, $\theta \in]c_p, b]$, y que $\widetilde{\pi}_2(\theta,\theta) \in [0,1]$, tenemos que el argumento de esta integral será mayor o igual a 0, cualquiera sea el valor de θ. Y esto implica, pues, que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0,$$

lo que significa que el principal jamás se ve perjudicado en el nuevo mecanismo.

Dado un mecanismo cualquiera donde $\pi_2(\theta,\theta) < 1$ para algún $\theta \in]c_p, b]$; siempre podemos encontrar un nuevo mecanismo, donde $\pi_2(\theta,\theta) = 1$ para todo $\theta \in]c_p, b]$. Este nuevo mecanismo sigue siendo compatible en incentivos, y deja al principal con una utilidad mayor o igual que antes. Por tanto, no nos hace perder generalidad.

Queda demostrado, así, el ***Lema 3***.

Anexo 12

En este apartado se demuestra el lema 6, enunciado en la sección 6 de esta entrega, que dice así:

Lema 6: Si $p \geq 1 - c_a$, podemos definir la función $\pi_2(\theta, s_n)$ de la forma

$$\pi_2(\theta, s_n) = 1 \quad \text{si} \quad \theta \in]c_p, b];$$

sin pérdida de generalidad.

Demostración: Recordemos, antes que nada, que tomando en cuenta el problema reducido planteado en la sección 6, considerando los ***lemas 1***, ***2*** y ***3***, ya demostrados; y en base a la condición $p \geq 1 - c_a$, el problema que enfrenta el principal puede escribirse como:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \Big((1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \Big([(1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - q(\theta))\pi_1(\theta), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta) \Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p - c_a \Big); \tag{RCI.3}$$

donde (RCI.1) y (RCI.3) deben cumplirse para todo $\theta \in\ ]c_p, b]$. Recordemos que la condición enunciada asegura que un agente de tipo $\theta \in [a, c_p]$ jamás querrá mentir y aceptar una eventual invitación a dar el test. Su única alternativa relevante a considerar, es la planteada en (RCI.1).

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in\ ]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in\ ]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n).$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1) y (RCI.3).

Luego, sabemos que las funciones especificadas satisfacen las condiciones

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) \Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a \Big), \tag{2}$$

donde estas condiciones se cumplen para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Definamos un nuevo mecanismo, $\langle \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}} \rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = 1.$$

En un primer paso, veremos que este nuevo mecanismo también cumple con (RCI.1). Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{3}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Notemos que, por (1), sabemos que esta condición se cumple en el intervalo mencionado.

Veremos ahora que (RCI.3) también se satisface. Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(1 - c_a\Big); \tag{4}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Notemos que, cumpliéndose (2), esta condición siempre se satisface en el intervalo mencionado. Esto, porque

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 &\leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big), \\ &\leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(1 - c_a\Big); \end{aligned}$$

donde esto se satisface para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. La última desigualdad siempre será cierta, puesto que $\widetilde{q}(\theta) \in [0, 1]$, $p \in [0, 1]$, y $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \in [0, 1]$; para cualquier $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto último ocurre, básicamente, porque

$$\begin{aligned} & (1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p \leq 1, \\ \Leftrightarrow \quad & (1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \leq (1-p), \\ \Leftrightarrow \quad & \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \leq 1. \end{aligned}$$

Se verifica, pues, que el nuevo mecanismo satiface compatibilidad de incentivos. Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás se ve perjudicada, en relación a la que obtenía en el mecanismo original. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\widetilde{EU}_P = \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \Big((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta,$$

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \Big((1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \Big((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(1\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Para aquellos $\theta \in [a, c_p]$, la utilidad esperada en ambos mecanismos es idéntica. Luego,

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P &= \int_{c_p}^b \Big((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta \\
&\quad - \int_{c_p}^b \Big((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^b \Big((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\theta - c_p \Big) \\
&\quad - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta - \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^b \Big(\widetilde{q}(\theta) \Big(\theta - c_p - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta + c_p \Big) \Big) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^b \Big(\widetilde{q}(\theta) \Big(\theta - (1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta - p\, \theta \Big) \Big) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^b \Big(\widetilde{q}(\theta)\, (1-p)\, \theta\, (1 - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)) \Big) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Dado que $\widetilde{q}(\theta) \in [0,1]$, $p \in [0,1]$, $\theta \in \,]c_p, b]$, y que $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \in [0,1]$, tenemos que el argumento de esta integral será mayor o igual a 0, cualquiera sea el valor de θ. Y esto implica, pues, que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0,$$

lo que significa que el principal jamás se ve perjudicado en el nuevo mecanismo.

Dado un mecanismo cualquiera donde $\pi_2(\theta, s_n) < 1$ para algún $\theta \in \,]c_p, b]$; y suponiendo que $p \geq 1 - c_a$, siempre podemos encontrar un nuevo mecanismo, donde $\pi_2(\theta, s_n) = 1$ para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Este nuevo mecanismo sigue siendo compatible en incentivos, y deja al principal con una utilidad mayor o igual que antes. Por tanto, no nos hace perder generalidad.

Queda demostrado, así, el ***Lema 6***.

Anexo 13

En este apartado se demuestra el lema 7, enunciado en la sección 6 de esta entrega, que dice así:

Lema 7: Si $p < 1 - c_a$, podemos restringirnos, sin pérdida de generalidad, a la búsqueda de mecanismos en los cuales

$$\pi_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p} \quad \text{si} \quad \theta \in]c_p, b].$$

Demostración: Recordemos, antes que nada, que tomando en cuenta el problema reducido planteado en la sección 6, y considerando los ***lemas 1***, ***2*** y ***3***, ya demostrados; el problema que enfrenta el principal puede escribirse como:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \Bigg((1-q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \Big([(1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \Bigg) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \tag{RCI.2}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big); \tag{RCI.3}$$

donde (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3) deben cumplirse para todo $\theta \in]c_p, b]$. Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n).$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3).

Luego, sabemos que las funciones especificadas satisfacen las condiciones

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \tag{2}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big); \tag{3}$$

donde estas condiciones se cumplen para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Definamos un nuevo mecanismo, $\langle\, \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}}\rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = max\Big\{\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p}\Big\}.$$

En un primer paso, veremos que este nuevo mecanismo también cumple con (RCI.1). Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{4}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Notemos que, por (1), sabemos que esta condición se cumple en el intervalo mencionado.

Veremos ahora que (RCI.2) se satisface. Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\, max\Big\{\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p}\Big\} - c_a\Big), \tag{5}$$

para todo $\theta \in \,]c_p, b]$. Dado que (2) se satisface en el intervalo mencionado, tenemos que esta condición también se cumple. Notemos que la probabilidad $\widehat{\pi}_2(\theta, s_n)$ puede tomar 2 valores. Si

$$\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p},$$

tendremos $\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)$. En dicho caso, la condición (5) queda como

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big).$$

Luego, por (2), es evidente que esta restricción se satisface para cualquier $\theta \in \,]c_p, b]$.

En cambio, si

$$\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) < \frac{c_a}{1-p};$$

tendremos $\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = \frac{c_a}{1-p}$. En dicho caso, la condición (5) queda como

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}_1 &\geq (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\frac{c_a}{1-p} - c_a\Big), \\
&= (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(c_a - c_a\Big), \\
&= (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta).
\end{aligned}$$

En este caso, sabemos, por (1), que esta condición se cumple para cualquier $\theta \in]c_p, b]$. De este modo, sea cual sea el valor de $\widehat{\pi}_2(\theta, s_n)$, tenemos que (5) se satisface en el intervalo mencionado.

Ahora veremos que (RCI.3) también se satisface. Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-\widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\,max\Big\{\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p}\Big\} + p - c_a\Big); \tag{6}$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Cumpliéndose (3), esta condición siempre se satisface en el intervalo mencionado. Notemos que la probabilidad $\widehat{\pi}_2(\theta, s_n)$ puede tomar 2 valores. Si

$$\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p},$$

tendremos $\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)$. En dicho caso, la condición (6) queda como

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big).$$

Sabemos, por (3), que esta desigualdad es cierta para cualquier $\theta \in]c_p, b]$.

En cambio, si

$$\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) < \frac{c_a}{1-p};$$

tendremos $\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = \frac{c_a}{1-p}$. En dicho caso, la condición (6) queda como

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}_1 &\leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\frac{c_a}{1-p} + p - c_a\Big), \\
&= (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(c_a + p - c_a\Big), \\
&= (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\,p.
\end{aligned}$$

Evidentemente, esto debe cumplirse, pues la condición (3) es más fuerte. Básicamente,

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}_1 &\leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big), \\
&\leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\,p;
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad está asegurada por el hecho de que $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) < \frac{c_a}{1-p}$. Concluimos, entonces, que (RCI.3) se satisface para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Se verifica, pues, que el nuevo mecanismo satiface compatibilidad de incentivos. Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás se ve perjudicada, en relación a la que obtenía en el mecanismo original. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
\widehat{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \bigg((1-\widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\Big[(1-p)\, max \Big\{ \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p} \Big\} + p \Big]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}
$$

Para aquellos $\theta \in [a, c_p]$, la utilidad esperada en ambos mecanismos es idéntica. Luego,

$$
\begin{aligned}
\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P &= \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\Big[(1-p)\, max \Big\{ \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p} \Big\} + p \Big]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta \\
&\quad - \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^b \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big(\Big[(1-p)\, max \Big\{ \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p} \Big\} + p \Big]\, \theta - c_p \Big) \\
&\quad - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta - \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^b \bigg(\widetilde{q}(\theta) \Big(\Big[(1-p)\, max \Big\{ \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p} \Big\} + p \Big]\, \theta - c_p \\
&\quad - [(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta + c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^b \bigg(\widetilde{q}(\theta) \Big((1-p)\, max \Big\{ \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p} \Big\}\, \theta + p\, \theta - (1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta - p\, \theta \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_{c_p}^b \bigg(\widetilde{q}(\theta)\, (1-p)\, \theta \left(max \Big\{ \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p} \Big\} - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \right) \bigg) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}
$$

Notemos que $\widetilde{q}(\theta) \in [0, 1]$, $p \in [0, 1]$, y $\theta \in \,]c_p, b]$. De este modo, para que el argumento de la integral sea siempre no negativo, solamente necesitamos que

$$
max \Big\{ \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p} \Big\} - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \geq 0,
$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Esta condición sí se cumple, evidentemente, ya que el menor valor que puede tomar

$$max\left\{\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n), \frac{c_a}{1-p}\right\}$$

es justamente $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)$. Dado que tenemos una integral cuyo argumento es siempre mayor o igual a 0, sabemos que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0,$$

lo que significa que el principal jamás se ve perjudicado en el nuevo mecanismo.

Dado un mecanismo cualquiera donde $\pi_2(\theta, s_n) < \frac{c_a}{1-p}$ para algún $\theta \in]c_p, b]$; y suponiendo que $p < 1 - c_a$, siempre podemos encontrar un nuevo mecanismo, donde $\pi_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p}$ para todo $\theta \in]c_p, b]$. Este nuevo mecanismo sigue siendo compatible en incentivos, y deja al principal con una utilidad mayor o igual que antes. Por tanto, no nos hace perder generalidad.

Queda demostrado, así, el ***Lema 7***.

Anexo 14

En este apartado se demuestra el lema 8, enunciado en la sección 6 de esta entrega, que dice así:

Lema 8: Si $p < 1 - c_a$, podemos definir, sin pérdida de generalidad,

$$q(\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in \,]c_p, \theta^*],$$

donde $\theta^* = min\Big\{b, \frac{c_p}{c_a+p}\Big\}$.

Demostración: Recordemos, antes que nada, que tomando en cuenta el problema reducido planteado en la sección 6, y considerando los ***lemas 1***, ***2***, ***3*** y ***7***, ya demostrados; el problema que enfrenta el principal puede escribirse como:

$$\operatorname*{Max}_{q:,\pi_1:,\pi_2:} \quad \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta)d\theta + \int_{c_p}^{b} \Bigg((1-q(\theta))\,\pi_1(\theta)\,\theta + q(\theta)\Big([(1-p)\pi_2(\theta,s_n) + p\,]\,\theta - c_p \Big) \Bigg) f(\theta)d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta,s_n) - c_a\Big), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-q(\theta))\,\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta,s_n) + p - c_a\Big), \tag{RCI.2}$$

$$\pi_2(\theta,s_n) \geq \frac{c_a}{1-p}; \tag{RCI.3}$$

donde (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3) deben cumplirse para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]c_p, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, c_p] \end{cases},$$

$$\pi_2(\theta,s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta,s_n).$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3).

Luego, sabemos que las funciones especificadas satisfacen

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) - c_a\Big), \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + p - c_a\Big), \tag{2}$$

$$\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) \geq \frac{c_a}{1-p}; \tag{3}$$

donde estas condiciones se cumplen para todo $\theta \in \,]c_p, b]$.

Definamos ahora un nuevo mecanismo, $\langle\,\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}}\rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]\theta^*, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, \theta^*] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]\theta^*, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, \theta^*] \end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n);$$

donde $\theta^* = min\Big\{b, \frac{c_p}{c_a+p}\Big\}$.

Notemos que θ^* tomará el valor b cuando

$$b \leq \frac{c_p}{c_a + p}.$$

Dado que todos los términos en dicha desigualdad son positivos, esto equivale a que

$$\begin{aligned} & c_a + p \leq \frac{c_p}{b}, \\ \Leftrightarrow \quad & p \leq \frac{c_p}{b} - c_a. \end{aligned}$$

Si p no satisface esta última condición, tendremos

$$\begin{aligned} & p > \frac{c_p}{b} - c_a, \\ \Leftrightarrow \quad & c_a + p > \frac{c_p}{b}, \\ \Leftrightarrow \quad & b > \frac{c_p}{c_a + p}. \end{aligned}$$

En dicho caso, pues, tendremos $\theta^* = \frac{c_p}{c_a+p}$.

Notemos que siempre se cumple que $c_p < \theta^*$. Si

$$\theta^* = b,$$

tendríamos $c_p < b$, lo cual es un supuesto del modelo. En cambio, si

$$\theta^* = \frac{c_p}{c_a + p},$$

igualmente sabemos que $c_p < \frac{c_p}{c_a+p}$. Esto ocurre porque

$$\begin{aligned} & p < 1 - c_a, \\ \Leftrightarrow \quad & c_a + p < 1. \end{aligned}$$

Tal como dijimos, siempre se cumple que $c_p < \theta^*$. Incorporando la definición misma de θ^*, tenemos que

$$c_p < \theta^* \leq b. \tag{4}$$

En un primer paso, veremos que este nuevo mecanismo también cumple con (RCI.1). Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Para aquellos $\theta \in]c_p, \theta^*]$, esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \geq \overline{\pi}_1; \tag{5}$$

lo cual se cumple con igualdad. Para aquellos $\theta \in]\theta^*, b]$, la condición enunciada requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big). \tag{6}$$

Notemos que, por (1), esta condición se cumple para todo $\theta \in]c_p, b]$. Por (4), tenemos que $c_p < \theta^* \leq b$. Por tanto, sabemos que (6) se cumple para todo $\theta \in]\theta^*, b]$. Es directo apreciar, en este punto, que $\theta^* = b$ implica que $]\theta^*, b] = \emptyset$. En este caso, la condición (6) es irrelevante, y (5) asegura el cumplimiento de (RCI.1).

Ahora veremos que (RCI.2) también se satisface. Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widehat{q}(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Para aquellos $\theta \in]c_p, \theta^*]$, esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \leq \overline{\pi}_1; \tag{7}$$

lo cual se cumple con igualdad. Para aquellos $\theta \in]\theta^*, b]$, la condición enunciada requiere que

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\, \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big); \tag{8}$$

para todo $\theta \in]\theta^*, b]$. Notemos que, cumpliéndose (2), esta condición siempre se satisface en el intervalo mencionado. Nuevamente, si $\theta^* = b$, la restricción (8) es irrelevante; y se tiene que (7) asegura que (RCI.2) se cumpla.

Ahora veremos que (RCI.3) también se satisface. Dicha condición requiere que

$$\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p},$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Esto equivale a que

$$\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p}; \tag{9}$$

para todo $\theta \in]c_p, b]$. Por (3), sabemos que esta condicióm siempre se satisface en el intervalo mencionado.

Se verifica, pues, que el nuevo mecanismo satiface compatibilidad de incentivos. Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás se ve perjudicada, en relación a la que obtenía en el mecanismo original. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{\theta^*} \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_{\theta^*}^{b} \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta. \\
\widehat{EU}_P &= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{b} \bigg((1-\widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{\theta^*} \bigg((1-\widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_{\theta^*}^{b} \bigg((1-\widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta, \\
&= \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^{\theta^*} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_{\theta^*}^{b} \bigg((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Para aquellos $\theta \in [a, c_p]$, la utilidad esperada en ambos mecanismos es idéntica. Lo mismo ocurre, notemos, en el intervalo $]\theta^*, b]$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P = & \int_{c_p}^{\theta^*} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta \\
& - \int_{c_p}^{\theta^*} \left((1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
= & \int_{c_p}^{\theta^*} \left(\overline{\pi}_1\, \theta - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta - \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
= & \int_{c_p}^{\theta^*} \left(\theta \Big[\overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \Big] - \widetilde{q}(\theta)(p\,\theta - c_p) \right) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Sea $\Delta_1(\theta)$ el argumento de dicha integral. Es decir,

$$\Delta_1(\theta) = \theta \Big[\overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \Big] - \widetilde{q}(\theta)(p\,\theta - c_p).$$

Luego, es directo apreciar que, si

$$\Delta_1(\theta) \geq 0 \tag{10}$$

para todo $\theta \in\ ]c_p, \theta^*]$, entonces tendremos una integral cuyo argumento nunca es negativo. Y eso implica, obviamente, que

$$\int_{c_p}^{\theta^*} \left(\theta \Big[\overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \Big] - \widetilde{q}(\theta)(p\,\theta - c_p) \right) f(\theta) d\theta \geq 0. \tag{11}$$

En dicho caso, pues, podríamos concluir que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a verificar que (10) se cumple. Sea

$$\Delta_2(\theta) = \overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n),$$

podemos escribir $\Delta_1(\theta)$ de la forma

$$\Delta_1(\theta) = \theta\, \Delta_2(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(p\,\theta - c_p).$$

Dicho eso, vamos a transformar $\Delta_2(\theta)$ de manera conveniente.

Notemos que las condiciones (1) y (2) imponen una cota inferior y superior a $\overline{\pi}_1$, respectivamente. En particular, sabemos que

$$\begin{aligned}
& (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big) \leq \overline{\pi}_1 \leq (1-\widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big), \\
\Leftrightarrow \quad & \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big) \leq \overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) \leq \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big), \\
\Leftrightarrow \quad & -\widetilde{q}(\theta)\, c_a \leq \overline{\pi}_1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \leq \widetilde{q}(\theta)\, p - \widetilde{q}(\theta)\, c_a.
\end{aligned}$$

Podemos ver que hemos encontrado una cota inferior y superior para $\Delta_2(\theta)$, justamente, pues la desigualdad anterior equivale a

$$-\widetilde{q}(\theta)\,c_a \leq \Delta_2(\theta) \leq \widetilde{q}(\theta)\,p - \widetilde{q}(\theta)\,c_a.$$

Luego, $\Delta_2(\theta)$ puede ser escrito de la forma

$$\begin{aligned}\Delta_2(\theta) &= k(\theta)\widetilde{q}(\theta)\,p - \widetilde{q}(\theta)\,c_a,\\ &= \widetilde{q}(\theta)(k(\theta)\,p - c_a);\end{aligned}$$

donde $k(\theta) \in [0,1]$. Notemos que $k(\theta)$ podría tomar un valor diferente para cada θ en particular; lo importante es que siempre podemos escribir $\Delta_2(\theta)$ de esta forma, con $k(\theta)$ dentro de ese intervalo.

Reemplazando $\Delta_2(\theta)$ en $\Delta_1(\theta)$, nos queda

$$\begin{aligned}\Delta_1(\theta) &= \theta\,\Delta_2(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(p\,\theta - c_p),\\ &= \theta\,\widetilde{q}(\theta)(k(\theta)\,p - c_a) - \widetilde{q}(\theta)(p\,\theta - c_p),\\ &= \widetilde{q}(\theta)\Big[\theta\,(k(\theta)\,-c_a) - p\,\theta + c_p\Big].\end{aligned}$$

Veremos ahora que, para cualquier θ en el intervalo $]c_p, \theta^*]$, siempre se tiene que $\Delta_1(\theta) \geq 0$. Esto ocurre sin importar cómo sean $\widetilde{q}(\theta)$ y $k(\theta)$.

Notemos que, si $\widetilde{q}(\theta) = 0$, nos queda

$$\Delta_1(\theta) = 0,$$

de modo que en estos casos (10) sí se cumple.

Vamos al caso en que $\widetilde{q}(\theta) > 0$. En este escenario, el valor de $\Delta_1(\theta)$ dependerá de $k(\theta)$ y de θ. Es directo ver que, como θ es positivo en el intervalo analizado, se tiene que $\Delta_1(\theta)$ es estrictamente creciente en $k(\theta)$. De este modo, verifiquemos que (10) se cumple para todo $\theta \in\,]c_p, \theta^*]$, considerando $k(\theta) = 0$. En este caso en particular,

$$\begin{aligned}\Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\Big[-\theta\,c_a - p\,\theta + c_p\Big],\\ &= \widetilde{q}(\theta)\Big[c_p - \theta\,(c_a + p)\Big].\end{aligned}$$

Es directo apreciar que, en estas circunstancias, $\Delta_1(\theta)$ es estrictamente decreciente en θ. Esto es así porque $\widetilde{q}(\theta)$, c_p, c_a y p son positivos. De este modo, basta verificar que $\Delta_1(\theta) \geq 0$ para el mayor θ en $]c_p, \theta^*]$, para concluir que (10) se satisface en todo ese intervalo. Luego, tomemos $\theta = \theta^*$.

Sabemos que, si

$$p \leq \frac{c_p}{b} - c_a,$$

tendremos $\theta^* = b$. En dicho caso,

$$\begin{aligned}\Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\Big[c_p - b\,(c_a + p)\Big],\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Esto es cierto, ya que $\widetilde{q}(\theta) > 0$, y se tiene que $c_p - b\,(c_a + p) \geq 0$. Es fácil verificar esto último.

$$\begin{aligned}
& c_p - b\,(c_a + p) \geq 0, \\
\Leftrightarrow \quad & c_p \geq b\,(c_a + p), \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{c_p}{b} \geq c_a + p, \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{c_p}{b} - c_a \geq p;
\end{aligned}$$

donde esta desigualdad se satisface. Justamente, θ^* toma el valor b cuando esta condición se cumple.

Por otra parte, si

$$p > \frac{c_p}{b} - c_a,$$

tendremos $\theta^* = \frac{c_p}{c_a+p}$. En dicho caso,

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\theta) &= \widetilde{q}(\theta)\Big[c_p - \frac{c_p}{c_a + p}\,(c_a + p)\Big], \\
&= \widetilde{q}(\theta)\Big[c_p - c_p\Big], \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que, para cualquier $k(\theta) \in [0, 1]$, y para todo $\theta \in\,]c_p, \theta^*]$,

$$\Delta_1(\theta) \geq 0.$$

Luego, la condición (10) se satisface. Y eso implica que la condición (11) se cumple, por lo que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0;$$

lo cual significa que el principal jamás se ve perjudicado en el nuevo mecanismo.

Dado un mecanismo cualquiera donde $q(\theta) > 0$ para algún $\theta \in\,]c_p, \theta^*]$; y suponiendo que $p < 1 - c_a$; siempre podemos encontrar un nuevo mecanismo, donde $q(\theta) = 0$ para todo $\theta \in\,]c_p, \theta^*]$. Este nuevo mecanismo sigue siendo compatible en incentivos, y deja al principal con una utilidad mayor o igual que antes. Por tanto, no nos hace perder generalidad.

Queda demostrado, así, el ***Lema 8***.

Anexo 15

En este apartado se demuestra el lema 9, enunciado en la sección 6 de esta entrega, que dice así:

Lema 9: Si $\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a$, podemos definir, sin pérdida de generalidad,

$$(1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) = \overline{\pi}_1 \quad \text{si} \quad \theta \in \left]\frac{c_p}{c_a+p}, b\right].$$

Demostración: Recordemos, antes que nada, que tomando en cuenta el problema reducido planteado en la sección 6, y considerando los ***lemas 1***, ***2***, ***3***, ***7*** y ***8***, ya demostrados; el problema que enfrenta el principal puede escribirse como:

$$\underset{q:,\pi_1:,\pi_2:}{\text{Max}} \quad \int_a^{\theta^*} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^{b} \bigg((1-q(\theta))\, \pi_1(\theta)\, \theta + q(\theta) \Big([(1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \bigg) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq (1-q(\theta))\pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \tag{RCI.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq (1-q(\theta))\, \pi_1(\theta) + q(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big), \tag{RCI.2}$$

$$\pi_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p}; \tag{RCI.3}$$

donde (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3) deben cumplirse para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$; y donde $\theta^* = \frac{c_p}{c_a+p}$.

Supongamos un mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$ cualquiera, caracterizado por las funciones

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]\theta^*, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, \theta^*] \end{cases},$$

$$\pi_1(\theta) = \begin{cases} \widetilde{\pi}_1(\theta) & si \quad \theta \in \,]\theta^*, b] \\ \\ \overline{\pi}_1 & si \quad \theta \in [a, \theta^*] \end{cases},$$

$$\pi_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n).$$

y tal que dicho mecanismo cumple con (RCI.1), (RCI.2) y (RCI.3).

Vamos a definir

$$\alpha(\theta) \equiv (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big).$$

Dicho eso, sabemos que las funciones especificadas satisfacen las condiciones

$$\overline{\pi}_1 \geq \alpha(\theta), \tag{1}$$
$$\overline{\pi}_1 \leq \alpha(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\, p, \tag{2}$$
$$\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p}; \tag{3}$$

donde estas condiciones se cumplen para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$.

Vamos a definir 2 subconjuntos de $]\theta^*, b]$. Por un lado, sea

$$\Theta_1 = \{\ \theta \in \,]\theta^*, b] \mid 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) \geq \overline{\pi}_1\ \}.$$

Fijémonos en la condición que debe cumplir θ para pertenecer a este conjunto. Si $\pi_1(\theta) = \widetilde{\pi}_1(\theta)$ y $\pi_2(\theta, s_n) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha(\theta) &= (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big), \\ &\leq \overline{\pi}_1.\end{aligned}$$

Incrementemos el valor de las funciones $\pi_1(\theta)$ y $\pi_2(\theta, s_n)$ al máximo, fijándolas en $\pi_1(\theta) = \pi_2(\theta, s_n) = 1$. Esto, manteniendo la función $\widetilde{q}(\theta)$ inalterada. En dicho caso,

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\pi_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) = 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a).$$

Ahora bien, esta expresión podría ser mayor o menor a $\overline{\pi}_1$; todo depende de cómo sea $\widetilde{q}(\theta)$. Por ejemplo, si $\overline{\pi}_1 = 1$ y $\widetilde{q}(\theta) > 0$, sabemos con seguridad que

$$1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) < \overline{\pi}_1.$$

Dicho θ, por tanto, no pertenece al conjunto Θ_1, pues no satisface la condición

$$1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) \geq \overline{\pi}_1.$$

El conjunto mencionado incluye, pues, a todos aquellos θ para los cuales, manteniendo la función $\widetilde{q}(\theta)$ inalterada, un aumento de $\pi_1(\theta)$ y $\pi_2(\theta, s_n)$ al extremo permite que

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\pi_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) \geq \overline{\pi}_1.$$

Por otra parte, sea

$$\Theta_2 = \{\ \theta \in \,]\theta^*, b] \mid 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) < \overline{\pi}_1\ \}.$$

A este subconjunto pertenecen aquellos θ para los cuales, incluso aumentando $\pi_1(\theta)$ y $\pi_2(\theta, s_n)$ al máximo, no es posible lograr que

$$(1 - \widetilde{q}(\theta))\pi_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\pi_2(\theta, s_n) - c_a\Big) \geq \overline{\pi}_1;$$

manteniendo $\widetilde{q}(\theta)$ inalterada. De ahí proviene, pues, la condición

$$1-\widetilde{q}(\theta)(p+c_a)<\overline{\pi}_1.$$

Notemos que ambos conjuntos son complementos, pues las condiciones que imponen sobre sus elementos son mutuamente excluyentes. Tenemos, por tanto, que

$$\Theta_1\cup\Theta_2=]\theta^*,b],$$

mientras que

$$\Theta_1\cap\Theta_2=\emptyset.$$

Definamos ahora un nuevo mecanismo, $\langle\,\widehat{\mathbf{q}},\widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{1}},\widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{2}}\rangle$, caracterizado por las funciones

$$\widehat{q}(\theta)=\begin{cases}\widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta\in\Theta_1\\[2ex] \frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a} & si \quad \theta\in\Theta_2\\[2ex] 0 & si \quad \theta\in[a,c_p]\end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_1(\theta)=\begin{cases}\widetilde{\pi}_1(\theta)+\Delta_1(\theta) & si \quad \theta\in\Theta_1\\[2ex] 1 & si \quad \theta\in\Theta_2\\[2ex] \overline{\pi}_1 & si \quad \theta\in[a,c_p]\end{cases},$$

$$\widehat{\pi}_2(\theta,s_n)=\begin{cases}\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n)+\Delta_2(\theta) & si \quad \theta\in\Theta_1\\[2ex] 1 & si \quad \theta\in\Theta_2\end{cases}.$$

Vamos a definir $\Delta_1(\theta)$ y $\Delta_2(\theta)$. Estas funciones son tales que, para cada $\theta\in\Theta_1$, se satisfacen 3 condiciones:

$$(1-\widetilde{q}(\theta))\Delta_1(\theta)+\widetilde{q}(\theta)(1-p)\Delta_2(\theta)=\overline{\pi}_1-\alpha(\theta), \tag{4}$$

$$0\leq\Delta_1(\theta)\leq 1-\widetilde{\pi}_1(\theta), \tag{5}$$

$$0\leq\Delta_2(\theta)\leq 1-\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n). \tag{6}$$

Verifiquemos que, efectivamente, existan tales funciones. Tomemos un $\theta\in\Theta_1$ cualquiera. Notemos que, definiendo

$$\Delta_1(\theta)=\Delta_2(\theta)=0,$$

nos queda que

$$\begin{aligned}(1-\widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta)+\widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta,s_n)-c_a\Big)&=(1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta)+\widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n)-c_a\Big),\\ &=\alpha(\theta).\end{aligned}$$

Ahora bien, por la condición (1), nosotros sabemos que

$$\alpha(\theta) \leq \overline{\pi}_1.$$

Luego, si se tenía

$$\alpha(\theta) = \overline{\pi}_1,$$

sabemos que $\Delta_1(\theta) = 0$ y $\Delta_2(\theta) = 0$ satisfacen las condiciones (4), (5) y (6). Esto, porque

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\pi}_1 - \alpha(\theta), \\ 0 \leq 0 &\leq 1 - \widetilde{\pi}_1(\theta), \\ 0 \leq 0 &\leq 1 - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n). \end{aligned}$$

Si, en cambio,

$$\alpha(\theta) < \overline{\pi}_1,$$

sabemos que $\Delta_1(\theta) = 0$ y $\Delta_2(\theta) = 0$ satisfacen las condiciones (5) y (6), pero no (4). Básicamente, en este caso se tiene que

$$0 < \overline{\pi}_1 - \alpha(\theta).$$

Por tanto, se requiere aumentar el valor de dichos términos. Vámonos, pues, al otro extremo, fijando

$$\begin{aligned} \Delta_1(\theta) &= 1 - \widetilde{\pi}_1(\theta), \\ \Delta_2(\theta) &= 1 - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n). \end{aligned}$$

En este caso,

$$\begin{aligned} &(1 - \widehat{q}\,(\theta))\,\widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big) \\ &= (1 - \widetilde{q}(\theta))(\widetilde{\pi}_1(\theta) + 1 - \widetilde{\pi}_1(\theta)) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)(\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + 1 - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)) - c_a\Big), \\ &= 1 - \widetilde{q}(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big(1 - p - c_a\Big), \\ &= 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a). \end{aligned}$$

Justamente por cómo está definido Θ_1; y dado que $\theta \in \Theta_1$, tenemos que

$$1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) \geq \overline{\pi}_1.$$

Luego, si se tiene

$$1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) = \overline{\pi}_1,$$

sabemos que estos valores de $\Delta_1(\theta)$ y $\Delta_2(\theta)$ satisfacen (4), (5) y (6). Por un lado, (4) queda como

$$\begin{aligned} & & (1 - \widetilde{q}(\theta))(1 - \widetilde{\pi}_1(\theta)) + \widetilde{q}(\theta)(1-p)(1 - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)) &= \overline{\pi}_1 - \alpha(\theta), \\ &\Leftrightarrow & 1 - \widetilde{q}(\theta) - (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) - \widetilde{q}(\theta)\,p - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) &= \overline{\pi}_1 - \alpha(\theta), \\ &\Leftrightarrow & 1 - \widetilde{q}(\theta)\,p + \alpha(\theta) - (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) &= \overline{\pi}_1, \\ &\Leftrightarrow & 1 - \widetilde{q}(\theta)\,p - \widetilde{q}(\theta)\,c_a &= \overline{\pi}_1, \\ &\Leftrightarrow & 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) &= \overline{\pi}_1; \end{aligned}$$

donde este corresponde, justamente, al caso propuesto. Por otra parte, (5) y (6) quedan como

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \widetilde{\pi}_1(\theta) \leq 1 - \widetilde{\pi}_1(\theta), \\ 0 \leq 1 - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \leq 1 - \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n). \end{aligned}$$

Pero, si se tiene que

$$1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) > \overline{\pi}_1,$$

entonces (5) y (6) se satisfacen, pero (4) no. Esto ocurre porque

$$\begin{aligned} & (1-\widetilde{q}(\theta))(1-\widetilde{\pi}_1(\theta)) + \widetilde{q}(\theta)(1-p)(1-\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n)) > \overline{\pi}_1 - \alpha(\theta), \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - \widetilde{q}(\theta) - (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta) - \widetilde{q}(\theta)\, p - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) > \overline{\pi}_1 - \alpha(\theta), \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - \widetilde{q}(\theta)\, p + \alpha(\theta) - (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) > \overline{\pi}_1, \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - \widetilde{q}(\theta)\, p - \widetilde{q}(\theta)\, c_a > \overline{\pi}_1, \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) > \overline{\pi}_1; \end{aligned}$$

En este caso, pues, se requiere que $\Delta_1(\theta)$ disminuya, que $\Delta_2(\theta)$ disminuya, o que ambos términos lo hagan.

Básicamente, si es que

$$\alpha(\theta) < \overline{\pi}_1 < 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a),$$

tenemos que fijar $\Delta_1(\theta)$ y $\Delta_2(\theta)$ en los extremos no permite que se cumpla (4). En un caso, nos quedó un término menor a $(\overline{\pi}_1 - \alpha(\theta))$, mientras que en el otro nos queda una expresión mayor a $(\overline{\pi}_1 - \alpha(\theta))$. Concluimos, por tanto, que deben existir $\Delta_1(\theta)$ y $\Delta_2(\theta)$ tales que (4) se satisfaga. Sabemos que al menos uno de estos términos será positivo, y que al menos uno de ellos será menor a su cota superior.

Dicho lo anterior, veremos que este nuevo mecanismo también cumple con (RCI.1). Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \geq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$. Para aquellos $\theta \in \Theta_1$, esto equivale a que

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 &\geq (1-\widetilde{q}(\theta))(\widetilde{\pi}_1(\theta) + \Delta_1(\theta)) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)(\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) + \Delta_2(\theta)) - c_a\Big), \qquad (7) \\ &= (1-\widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta,s_n) - c_a\Big) + (1-\widetilde{q}(\theta))\Delta_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)(1-p)\Delta_2(\theta), \\ &= \alpha(\theta) + \overline{\pi}_1 - \alpha(\theta), \\ &= \overline{\pi}_1. \end{aligned}$$

Luego, sabemos que (7) siempre se cumple en estos casos, con igualdad. Hemos usado la definición de $\alpha(\theta)$, así como la condición (4). Para aquellos $\theta \in \Theta_2$, (RCI.1) queda como

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}_1 &\geq \Big(1 - \frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\, 1 + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\Big((1-p)\, 1 - c_a\Big), \qquad (8)\\
&= 1 - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big) + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big) - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)(p+c_a),\\
&= 1 - 1 + \overline{\pi}_1,\\
&= \overline{\pi}_1.
\end{aligned}$$

Nuevamente, tenemos que (8) se satisface con igualdad. Podemos concluir, entonces, que (RCI.1) se cumple para todo $\theta \in]\theta^*, b]$.
Veremos ahora que el nuevo mecanismo satisface (RCI.2). Dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \leq (1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)\Big((1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p - c_a\Big),$$

para todo $\theta \in]\theta^*, b]$. Para aquellos $\theta \in \Theta_1$, esto equivale a que

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}_1 &\leq (1 - \widetilde{q}(\theta))(\widetilde{\pi}_1(\theta) + \Delta_1(\theta)) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)(\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + \Delta_2(\theta)) + p - c_a\Big), \qquad (9)\\
&= (1 - \widetilde{q}(\theta))\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\Big((1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - c_a\Big) + \widetilde{q}(\theta)\, p + (1 - \widetilde{q}(\theta))\Delta_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)(1-p)\Delta_2(\theta),\\
&= \alpha(\theta) + \overline{\pi}_1 - \alpha(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\, p,\\
&= \overline{\pi}_1 + \widetilde{q}(\theta)\, p.
\end{aligned}$$

Dado que $\widetilde{q}(\theta) \geq 0$ y que $p > 0$, tenemos que (9) se satisface, para todo $\theta \in \Theta_1$. Para aquellos $\theta \in \Theta_2$, (RCI.2) queda como

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}_1 &\leq \Big(1 - \frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\, 1 + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\Big((1-p)\, 1 + p - c_a\Big), \qquad (10)\\
&= 1 - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big) + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big) - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)(p+c_a) + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\, p,\\
&= 1 - 1 + \overline{\pi}_1 + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\, p,\\
&= \overline{\pi}_1 + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\, p.
\end{aligned}$$

Dado que $p > 0$, $\overline{\pi}_1 \leq 1$, y $c_a > 0$, tenemos que (10) también se satisface.

Veremos ahora que (RCI.3) se cumple. Dicha condición requiere que

$$\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) \geq \frac{c_a}{1-p},$$

para todo $\theta \in]\theta^*, b]$. Para aquellos $\theta \in \Theta_1$, esto equivale a que

$$\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + \Delta_2(\theta) \geq \frac{c_a}{1-p}, \qquad (11)$$

para todo $\theta \in \Theta_1$. Dado que (3) se cumple para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$, y dado que $\Delta_2(\theta) \geq 0$, es evidente que la condición (11) se satisface. Para aquellos $\theta \in \Theta_2$, (RCI.3) queda como

$$1 \geq \frac{c_a}{1-p}. \tag{12}$$

Dado que $p < 1 - c_a$, es directo apreciar que (12) también se cumple.

Se verifica, pues, que el nuevo mecanismo satiface compatibilidad de incentivos. Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás se ve perjudicada, en relación a la que obtenía en el mecanismo original. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora. Tenemos que

$$\widetilde{EU}_P = \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \left((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta,$$

$$\widehat{EU}_P = \int_a^{c_p} \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{c_p}^b \left((1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta.$$

Para aquellos $\theta \in [a, c_p]$, la utilidad esperada en ambos mecanismos es idéntica. Luego,

$$\begin{aligned}
\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P = & \int_{c_p}^b \left((1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta \\
& - \int_{c_p}^b \left((1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \right) f(\theta) d\theta, \\
= & \int_{c_p}^b \Bigg((1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta)\, \theta + \widehat{q}\,(\theta) \Big([(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \\
& - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta - \widetilde{q}(\theta) \Big([(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + p\,]\, \theta - c_p \Big) \Bigg) f(\theta) d\theta, \\
= & \int_{c_p}^b \Bigg(\theta \Big[(1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) \\
& - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \Big] + \widehat{q}\,(\theta)\, p\, \theta - \widehat{q}\,(\theta)\, c_p - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta + \widetilde{q}(\theta)\, c_p \Bigg) f(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Sea $\lambda(\theta)$ el argumento de esta integral. Es decir,

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta) = & \; \theta \Big[(1 - \widehat{q}\,(\theta))\, \widehat{\pi}_1(\theta) + \widehat{q}\,(\theta)(1-p)\widehat{\pi}_2(\theta, s_n) - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \Big] \\
& + \widehat{q}\,(\theta)\, p\, \theta - \widehat{q}\,(\theta)\, c_p - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta + \widetilde{q}(\theta)\, c_p.
\end{aligned}$$

Luego, si se cumple la condición

$$\lambda(\theta) \geq 0, \tag{13}$$

para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$, tendremos una integral cuyo argumento es siempre mayor o igual a 0. En dicho caso, sabemos que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0;$$

lo que significa que el principal jamás se ve perjudicado en el nuevo mecanismo.

Vamos a verificar, por tanto, que la condición (13) se satisface en el intervalo mencionado. Para aquellos $\theta \in \Theta_1$, tenemos que $\lambda(\theta)$ queda de la forma

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta) = \theta \Big[&(1-\widetilde{q}(\theta))(\widetilde{\pi}_1(\theta) + \Delta_1(\theta)) + \widetilde{q}(\theta)(1-p)(\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + \Delta_2(\theta)) - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) \\
&- \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\Big] + \widetilde{q}(\theta)\,p\,\theta - \widetilde{q}(\theta)\,c_p - \widetilde{q}(\theta)\,p\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\,c_p, \\
= \theta \Big[&(1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \\
&+ (1-\widetilde{q}(\theta))\Delta_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)(1-p)\Delta_2(\theta)\Big], \\
= \theta \Big[&(1-\widetilde{q}(\theta))\Delta_1(\theta) + \widetilde{q}(\theta)(1-p)\Delta_2(\theta)\Big], \\
= \theta \Big[&\overline{\pi}_1 - \alpha(\theta)\Big], \\
\geq 0&.
\end{aligned}$$

Por un lado, sabemos que $\theta > 0$. Por la condición (1), sabemos que $\overline{\pi}_1 \geq \alpha(\theta)$. Por tanto, sabemos que dicha expresión jamás es negativa.

Para aquellos $\theta \in \Theta_2$, tenemos que $\lambda(\theta)$ queda de la forma

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta) &= \theta \left[1 - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big) + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)(1-p) - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\right] \\
&\quad + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,p\,\theta - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,c_p - \widetilde{q}(\theta)\,p\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\,c_p, \\
&= \theta \left[1 - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big) + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big) - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,p - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\right] \\
&\quad + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,p\,\theta - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,c_p - \widetilde{q}(\theta)\,p\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\,c_p, \\
&= \theta - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,p\,\theta - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\,\theta \\
&\quad + \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,p\,\theta - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,c_p - \widetilde{q}(\theta)\,p\,\theta + \widetilde{q}(\theta)\,c_p, \\
&= \theta - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta)\,\theta - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\,\theta - \widetilde{q}(\theta)\,p\,\theta - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,c_p + \widetilde{q}(\theta)\,c_p, \\
&= \theta \Big[1 - (1-\widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - \widetilde{q}(\theta)\,p\Big] - \Big(\frac{1-\overline{\pi}_1}{p+c_a}\Big)\,c_p + \widetilde{q}(\theta)\,c_p.
\end{aligned}$$

Dado que $\theta > 0$, tenemos que esta expresión es creciente en θ[10]. De este modo, tomemos $\theta = \theta^*$. Notemos que θ^* es menor a cualquier valor de $\theta \in]\theta^*, b]$. Luego, supone una cota inferior a los valores que podría tomar $\theta \in \Theta_2$. Sea

$$\begin{aligned} \theta &= \theta^*, \\ &= \frac{c_p}{c_a + p}. \end{aligned}$$

En este caso particular, nos queda

$$\begin{aligned} &\frac{c_p}{c_a + p}\left[1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - \widetilde{q}(\theta)\,p\right] - \left(\frac{1 - \overline{\pi}_1}{p + c_a}\right) c_p + \widetilde{q}(\theta)\,c_p, \\ &= \frac{c_p}{c_a + p}\left[1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - \widetilde{q}(\theta)\,p - (1 - \overline{\pi}_1) + \widetilde{q}(\theta)(p + c_a)\right], \\ &= \frac{c_p}{c_a + p}\left[\overline{\pi}_1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - \widetilde{q}(\theta)\,p + \widetilde{q}(\theta)\,p + \widetilde{q}(\theta)\,c_a\right], \\ &= \frac{c_p}{c_a + p}\left[\overline{\pi}_1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + \widetilde{q}(\theta)\,c_a\right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que todos los términos en el paréntesis son positivos. Lo mismo ocurre con p, c_p y c_a. Por tanto, esta expresión es decreciente en $\widetilde{\pi}_1(\theta)$ y $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)$. Tomando los mayores valores que podrían tener esas funciones, esto es, $\widetilde{\pi}_1(\theta) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) = 1$, dicha expresión queda como

$$\begin{aligned} &\frac{c_p}{c_a + p}\left[\overline{\pi}_1 - 1 + \widetilde{q}(\theta) - \widetilde{q}(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\,p + \widetilde{q}(\theta)\,c_a\right], \\ &= \frac{c_p}{c_a + p}\left[\overline{\pi}_1 - 1 + \widetilde{q}(\theta)(p + c_a)\right], \\ &> 0. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior está asegurada porque $\theta \in \Theta_2$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} &\overline{\pi}_1 > 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a), \\ \Leftrightarrow\quad &\overline{\pi}_1 - 1 + \widetilde{q}(\theta)(p + c_a) > 0. \end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos que, si $\theta \in \Theta_2$,

$$\begin{aligned} \lambda(\theta) &= \theta\left[1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - \widetilde{q}(\theta)\,p\right] - \left(\frac{1 - \overline{\pi}_1}{p + c_a}\right) c_p + \widetilde{q}(\theta)\,c_p, \\ &\geq \frac{c_p}{c_a + p}\left[\overline{\pi}_1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\,\widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) + \widetilde{q}(\theta)\,c_a\right], \\ &\geq \frac{c_p}{c_a + p}\left[\overline{\pi}_1 - 1 + \widetilde{q}(\theta)(p + c_a)\right], \\ &> 0. \end{aligned}$$

[10]Esto se demuestra al final de esta sección, de modo de dar fluidez a la demostración.

Concluimos, entonces, que $\lambda(\theta) > 0$, para todo $\theta \in \Theta_2$. Se verifica, por tanto, que la condición (13) se satisface para todo $\theta \in]\theta^*, b]$. Y eso implica, como mencionamos, que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0;$$

ya que se tiene una integral cuyo argumento es siempre mayor o igual a 0. Luego, el priuncipal jamás se ve perjudicado en el nuevo mecanismo.

Dado un mecanismo cualquiera donde $\alpha(\theta) \neq \overline{\pi}_1$ para algún $\theta \in]\theta^*, b]$; y suponiendo que $\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a$, siempre podemos encontrar un nuevo mecanismo, donde $\alpha(\theta) = \overline{\pi}_1$ para todo $\theta \in]\theta^*, b]$. Este nuevo mecanismo sigue siendo compatible en incentivos, y deja al principal con una utilidad mayor o igual que antes. Por tanto, no nos hace perder generalidad.

Queda demostrado, así, el ***Lema 9***.

Demostración Adjunta

En este apéndice, se demuestra que la expresión

$$\lambda(\theta) = \theta - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta - \left(\frac{1 - \overline{\pi}_1}{p + c_a}\right) c_p + \widetilde{q}(\theta)\, c_p,$$

es creciente en θ. Esto, con $\theta > 0$, $\widetilde{q}(\theta) \in [0,1]$, $\widetilde{\pi}_1(\theta) \in [0,1]$, $p \in [0,1]$, $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) \in [0,1]$, $\overline{\pi}_1 \in [0,1]$, $c_a \in]0,1[$, y $c_p > 0$.

Sean θ_1, θ_2, tales que

$$\theta_2 = \theta_1 + \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$. Luego, $\lambda(\theta)$ será creciente en θ si

$$\lambda(\theta_2) \geq \lambda(\theta_1).$$

Esto equivale a que

$$\begin{aligned}
& \theta_2 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta_2 - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta_2 - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta_2 - \left(\frac{1 - \overline{\pi}_1}{p + c_a}\right) c_p + \widetilde{q}(\theta)\, c_p \\
& \quad \geq \theta_1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta_1 - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta_1 - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta_1 - \left(\frac{1 - \overline{\pi}_1}{p + c_a}\right) c_p + \widetilde{q}(\theta)\, c_p, \\
\Leftrightarrow \quad & \theta_2 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta_2 - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta_2 - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta_2 \\
& \quad \geq \theta_1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta_1 - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta_1 - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta_1, \\
\Leftrightarrow \quad & \theta_1 + \varepsilon - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, (\theta_1 + \varepsilon) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, (\theta_1 + \varepsilon) - \widetilde{q}(\theta)\, p\, (\theta_1 + \varepsilon) \\
& \quad \geq \theta_1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \theta_1 - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \theta_1 - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \theta_1, \\
\Leftrightarrow \quad & \varepsilon - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta)\, \varepsilon - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)\, \varepsilon - \widetilde{q}(\theta)\, p\, \varepsilon \geq 0, \\
\Leftrightarrow \quad & \varepsilon \Big(1 - (1 - \widetilde{q}(\theta))\, \widetilde{\pi}_1(\theta) - \widetilde{q}(\theta)(1-p)\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) - \widetilde{q}(\theta)\, p\Big) \geq 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que esta condición se cumple. Por un lado, $\varepsilon > 0$. Por otro, la expresión entre paréntesis siempre será no negativa. Es directo notar, dado que todos los términos son mayores o iguales a 0, que dicha expresión es decreciente en $\widetilde{\pi}_1(\theta)$ y $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)$. Tomando el máximo valor para cada una de estas probabilidades, esto es, $\widetilde{\pi}_1(\theta) = \widetilde{\pi}_2(\theta, s_n) = 1$; la condición anterior queda como

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon \left(1 - 1 + \widetilde{q}(\theta) - \widetilde{q}(\theta) + \widetilde{q}(\theta)\, p - \widetilde{q}(\theta)\, p \right) \geq 0, \\
\Leftrightarrow \quad & \varepsilon\, 0 \geq 0, \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Luego, incluso para los mayores valores de de $\widetilde{\pi}_1(\theta)$ y $\widetilde{\pi}_2(\theta, s_n)$, se tiene que $\lambda(\theta)$ es creciente en θ. Queda demostrado, pues, este apartado.

Anexo 16

En este apartado se demuestra el lema 10, enunciado en la sección 6 de esta entrega, que dice así:

Lema 10: Si $\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a$, podemos definir, sin pérdida de generalidad,

$$q(\theta) = \overline{q} \quad \text{si} \quad \theta \in \left]\frac{c_p}{c_a + p}, b\right],$$

donde $\overline{q}$ es una constante que toma un valor en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración: Recordemos, antes que nada, que tomando en cuenta el problema reducido planteado en la sección 6, y considerando los ***lemas 1***, ***2***, ***3***, ***6***, ***7***, ***8*** y ***9***, ya demostrados; el problema que enfrenta el principal puede escribirse como:

$$\underset{\overline{\pi}_1, q:}{\text{Max}} \quad \int_a^b \overline{\pi}_1 \, \theta f(\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^b q(\theta) \Big(\theta \,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\overline{\pi}_1 \geq 0, \tag{R.1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - q(\theta)(p + c_a), \tag{R.2}$$

donde (R.2) debe cumplirse para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$.

Supongamos un mecanismo $\langle \, \mathbf{q}, \boldsymbol{\overline{\pi}} \, \rangle$ cualquiera, caracterizado por $\overline{\pi}_1$ y por la función

$$q(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta) & si \quad \theta \in \,]\theta^*, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, \theta^*] \end{cases},$$

tales que se cumplen (R.1) y (R.2). De este modo, sabemos que se satisfacen las condiciones

$$\overline{\pi}_1 \geq 0, \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \widetilde{q}(\theta)(p + c_a), \tag{2}$$

para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$.

Sea θ_1 un elemento en el intervalo $]\theta^*, b]$, tal que

$$\theta_1 \in \underset{\theta \in \,]\theta^*, b]}{\arg\max} \; \widetilde{q}(\theta).$$

Esto significa que

$$\widetilde{q}(\theta_1) \geq \widetilde{q}(\theta), \tag{3}$$

para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$.

Definamos un nuevo mecanismo, $\langle\, \widehat{\mathbf{q}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}\, \rangle$, caracterizado por $\overline{\pi}_1$ y por la función

$$\widehat{q}\,(\theta) = \begin{cases} \widetilde{q}(\theta_1) & si \quad \theta \in \,]\theta^*, b] \\ \\ 0 & si \quad \theta \in [a, \theta^*] \end{cases} ;$$

Notemos que, en este mecanismo, el principal invita al agente a realizar el test con una probabilidad constante. Notemos que este es el único cambio con respecto al mecanismo anterior; $\overline{\pi}_1$ toma el mismo valor que antes.

Veremos primero que $\langle\, \widehat{\mathbf{q}}, \overline{\boldsymbol{\pi}}\, \rangle$ satisface (R.1) y (R.2). Respecto a la primera restricción, debe cumplirse la condición

$$\overline{\pi}_1 \geq 0. \tag{4}$$

Por (1), sabemos que esto se cumple. En cuanto a (R.2), dicha condición requiere que

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \widehat{q}\,(\theta)(p + c_a),$$

para todo $\theta \in \,]\theta^*, b]$. Esto equivale a que

$$\overline{\pi}_1 \leq 1 - \widetilde{q}\,(\theta_1)(p + c_a). \tag{5}$$

Dado que $\theta_1 \in \,]\theta^*, b]$, y sabiendo que (2) se satisface para cualquier θ en ese intervalo, es directo notar que (5) también se cumple. Concluimos, por tanto, que este nuevo mecanismo satisface tanto (R.1) como (R.2).

Ahora veremos que la utilidad esperada del principal jamás disminuye en este nuevo escenario. Sea $\widetilde{EU}_P$ la utilidad esperada que obtenía en el mecanismo $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi_1} \rangle$, y $\widehat{EU}_P$ la que obtiene ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{EU}_P &= \int_a^b \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^b \widetilde{q}(\theta) \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta, \\ \widehat{EU}_P &= \int_a^b \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^b \widehat{q}\,(\theta) \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta, \\ &= \int_a^b \overline{\pi}_1\, \theta f(\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^b \widetilde{q}\,(\theta_1) \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Notemos que ambas expresiones difieren solamente en el último término, que depende de cómo esté definida $q(\theta)$. Luego,

$$\begin{aligned} \widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P &= \int_{\theta^*}^b \widetilde{q}\,(\theta_1) \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta - \int_{\theta^*}^b \widetilde{q}(\theta) \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta, \\ &= \int_{\theta^*}^b \Bigg(\widetilde{q}\,(\theta_1) \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) - \widetilde{q}(\theta) \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big)\Bigg) f(\theta) d\theta, \\ &= \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) \Big(\widetilde{q}\,(\theta_1) - \widetilde{q}(\theta)\Big) f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Es directo ver que el argumento de esta integral es estrictamente creciente en θ, ya que $c_a > 0$ y $p \geq 0$. Luego, tomemos $\theta = \theta^*$, que supone una cota inferior al intervalo $]\theta^*, b]$. Luego,

$$\begin{aligned}\theta &= \theta^*,\\ &= \frac{c_p}{c_a + p}.\end{aligned}$$

En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}\theta\left(c_a + p\right) - c_p &= \frac{c_p}{c_a + p}\left(c_a + p\right) - c_p,\\ &= c_p - c_p,\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto, sabemos que

$$\theta\left(c_a + p\right) - c_p \geq 0,$$

para todo $\theta \in]\theta^*, b]$.

Por otra parte, la condición (3) asegura que

$$\widetilde{q}\left(\theta_1\right) - \widetilde{q}(\theta) \geq 0,$$

para todo $\theta \in]\theta^*, b]$.

De este modo, tenemos una integral cuyo argumento es siempre mayor o igual a 0.Esto implica que

$$\widehat{EU}_P - \widetilde{EU}_P \geq 0;$$

lo cual significa que la utilidad esperada del principal en el nuevo mecanismo nunca es menor a la que obtenía originalmente.

Dado un mecanismo con una función $q(\theta)$ cualquiera, siempre podemos definir un nuevo mecanismo en que $q(\theta) = \overline{q}$, donde $\overline{q}$ es una constante en el intervalo $[0, 1]$. Dicho mecanismo satisface compatibilidad de incentivos, y deja al principal con una utilidad esperada igual o mayor a la que alcanzaba en el mecanismo original.

Queda demostrado, entonces, el ***lema 10***.

Anexo 17

En este apartado se desarrolla el problema reducido planteado en la sección 6 del trabajo, tomando en cuenta los ***lemas 5***, ***6***, ***8***, ***9***, ***10*** y ***11***, todos ya demostrados. Los resultados de esta sección se resumen en la ***proposición 4***.

Proposición 4: Si $\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a$, la solución al problema del principal depende de

$$\mathbb{E}(\theta), \tag{$*$}$$

y

$$\int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta. \tag{$**$}$$

En particular:

(i) Si

$$\mathbb{E}(\theta) < 0,$$

la solución la constituye el vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (1, 0)$.

(ii) Si

$$\mathbb{E}(\theta) = 0,$$

la solución la constituye cualquier vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$ tal que $\overline{q} = 1$ y $0 \leq \overline{\pi}_1 \leq 1 - \overline{q}(p + c_a)$.

(iii) Si

$$0 < \mathbb{E}(\theta) < \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta,$$

la solución la constituye el vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (1, 1 - p - c_a)$.

(iv) Si

$$\mathbb{E}(\theta) = \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta,$$

la solución la constituye cualquier vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$ tal que $0 \leq \overline{q} \leq 1$ y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}(p + c_a)$.

(v) Si

$$\mathbb{E}(\theta) > \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta,$$

la solución la constituye el vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (0, 1)$.

Desarrollo: Recordemos que se está considerando el caso en que $\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a$, y que el problema que enfrenta el principal puede plantearse como:

$$\underset{\overline{\pi}_1, \overline{q}}{\text{Max}} \quad \overline{\pi}_1 \int_a^b \theta f(\theta) d\theta + \overline{q} \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 &\geq 0, && \text{(R.1)} \\ \overline{\pi}_1 &\leq 1 - \overline{q}\,(p + c_a), && \text{(R.2)} \\ \overline{q} &\geq 0, && \text{(R.3)} \\ \overline{q} &\leq 1. && \text{(R.4)} \end{aligned}$$

El lagrangeano de este problema es

$$\begin{aligned} \underset{\overline{\pi}_1, \overline{q}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}{\text{Max}} \quad \mathcal{L} = \overline{\pi}_1 \int_a^b \theta f(\theta) d\theta + \overline{q} \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta - \lambda_1(-\overline{\pi}_1) \\ - \lambda_2(\overline{\pi}_1 - 1 + \overline{q}\,(p + c_a)) - \lambda_3(-\overline{q}) - \lambda_4(\overline{q} - 1); \end{aligned}$$

y las condiciones de primer orden[11] (CPO) serían

$$\begin{aligned} \int_a^b \theta f(\theta) d\theta + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0, && (1) \\ \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta - \lambda_2(p + c_a) + \lambda_3 - \lambda_4 &= 0, && (2) \\ -\overline{\pi}_1 &\leq 0, && (3) \\ \overline{\pi}_1 - 1 + \overline{q}(p + c_a) &\leq 0, && (4) \\ -\overline{q} &\leq 0, && (5) \\ \overline{q} - 1 &\leq 0, && (6) \\ \lambda_1 &\geq 0, && (7) \\ \lambda_2 &\geq 0, && (8) \\ \lambda_3 &\geq 0, && (9) \\ \lambda_4 &\geq 0, && (10) \\ \lambda_1(-\overline{\pi}_1) &= 0, && (11) \\ \lambda_2(\overline{\pi}_1 - 1 + \overline{q}(p + c_a)) &= 0, && (12) \\ \lambda_3(-\overline{q}) &= 0, && (13) \\ \lambda_4(\overline{q} - 1) &= 0. && (14) \end{aligned}$$

[11]También nos referiremos a estas como condiciones de Karush Kuhn Tucker (KKT).

Sabemos que una condición necesaria para la solución de este problema, es que cumpla con estas 14 ecuaciones. Ahora bien, esto no es suficiente. Por ello, evaluaremos cada posible solución (aquellos vectores $(\overline{\pi}_1, \overline{q})$ que cumplan con todas las condiciones de KKT), en la función objetivo; encontrando así aquella que maximice la utilidad esperada del principal. Notemos, mirando las restricciones (11), (12), (13) y (14), que hay 9 casos relevantes a analizar. Revisaremos a continuación cada uno de ellos.

Caso 1

Supongamos $\overline{q} = 0$, y $\overline{\pi}_1 = 1$. Por tanto, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$, y $\lambda_4 = 0$. De la condición (1), se deriva que

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \int_a^b \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \mathbb{E}(\theta).\end{aligned}$$

Por restricciones de no negatividad de los multiplicadores, debe ser cierto que

$$\begin{aligned}&\lambda_2 \geq 0, \\ \Leftrightarrow \quad &\mathbb{E}(\theta) \geq 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, la condición (2) queda como

$$\lambda_3 = \lambda_2(p + c_a) - \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

Reemplazando λ_2, nos queda

$$\lambda_3 = (p + c_a)\,\mathbb{E}(\theta) - \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

Por no negatividad de λ_3, se requiere que

$$\begin{aligned}& (p + c_a)\,\mathbb{E}(\theta) - \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \geq 0, \\ \Leftrightarrow \quad & \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \leq (p + c_a)\,\mathbb{E}(\theta), \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{p + c_a} \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \leq \mathbb{E}(\theta), \\ \Leftrightarrow \quad & \int_{\theta^*}^b \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^b f(\theta) d\theta \leq \mathbb{E}(\theta). \qquad (1^*)\end{aligned}$$

Notemos que esta última condición implica que $\mathbb{E}(\theta) > 0$. Por tanto, cumpliéndose (1*), se satisfacen todas las CPO.

Teniendo en cuenta lo dicho hasta ahora, ¿cuál es la utilidad esperada del principal?

$$
\begin{aligned}
EU_P(\overline{q}=0,\overline{\pi}_1=1) &= \int_a^b \theta f(\theta) d\theta, \\
&= \mathbb{E}(\theta).
\end{aligned}
$$

Básicamente, el principal está entregando el objeto *siempre* al agente, sin verificar *nunca* su tipo (y sin incurrir, por tanto, en ningún costo). Luego, su utilidad esperada corresponde simplemente al valor esperado de θ. Reparemos en que la única condición relevante para que este caso satisfaga todas las condiciones de KKT, es (1*), la cual impone una cota inferior (negativa) para $\int_a^{\theta^*} \theta f(\theta) d\theta$. Si el valor de esta integral fuese menor a dicho umbral, entonces $\overline{q}=0, \overline{\pi}_1=1$ no cumple con todas las CPO, y queda descartado como una potencial solución al problema.

Caso 2

Supongamos $\overline{q}=0$, y $\overline{\pi}_1=0$. Por tanto, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3 \geq 0$, y $\lambda_4=0$. De la condición (1), se deriva que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\int_a^b \theta f(\theta) d\theta, \\
&= -\,\mathbb{E}(\theta).
\end{aligned}
$$

Por restricciones de no negatividad de los multiplicadores, debe ser cierto que

$$
\begin{aligned}
& \lambda_1 \geq 0, \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}(\theta) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, la condición (2) queda como

$$
\lambda_3 = -\int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a+p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.
$$

Por no negatividad de λ_3, se requiere que

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a+p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \geq 0, \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\,(c_a+p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \leq 0.
\end{aligned}
$$

Pero notemos que esta condición jamás se cumple. Esto ocurre porque el argumento de esta integral es positivo para todo $\theta > \theta^*$, donde

$$
\theta^* = \frac{c_p}{c_a+p}.
$$

Para $\theta = \theta^*$, el argumento es igual a 0. Para el resto de los θ, siempre tenemos un término positivo, dado que $f(\theta) > 0$, y

$$\theta\left(c_a + p\right) > c_p.$$

Por último, estamos integrando sobre un intervalo, no un único punto; dado que $\theta^* < b$. Esto está asegurado por las condiciones impuestas sobre p. Concluimos, pues, que esta integral debe ser positiva.

Así, este caso no satisface todas las condiciones de KKT, puesto que (9) nunca se cumple. Los valores de $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$ propuestos quedan descartados inmediatamente, entonces, como una posible solución a este problema.

Caso 3

Supongamos $\overline{q} = 0$, y $0 < \overline{\pi}_1 < 1$. Por tanto, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \geq 0$, y $\lambda_4 = 0$. De la condición (1), se deriva que

$$\begin{aligned} \int_a^b \theta f(\theta) d\theta &= 0, \\ \Leftrightarrow \qquad \mathbb{E}(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, la condición (2) queda como

$$\lambda_3 = -\int_{\theta^*}^b \Big(\theta\left(c_a + p\right) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

Por no negatividad de λ_3, se requiere que

$$\begin{aligned} -\int_{\theta^*}^b \Big(\theta\left(c_a + p\right) - c_p\Big) f(\theta) d\theta &\geq 0, \\ \Leftrightarrow \quad \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\left(c_a + p\right) - c_p\Big) f(\theta) d\theta &\leq 0. \end{aligned}$$

Nuevamente, sabemos que esta condición jamás se cumple. Esto ocurre porque el argumento de esta integral es positivo para todo $\theta > \theta^*$, donde

$$\theta^* = \frac{c_p}{c_a + p}.$$

Para $\theta = \theta^*$, el argumento es igual a 0. Para el resto de los θ, siempre tenemos un término positivo, dado que $f(\theta) > 0$, y

$$\theta\left(c_a + p\right) > c_p.$$

Por último, estamos integrando sobre un intervalo con infinitos elementos, no en un único punto. Esto, porque $\theta^* < b$; lo cual está asegurado por las condiciones impuestas sobre p. Concluimos, pues, que esta integral debe ser positiva.

Así, este caso no satisface todas las condiciones de KKT, puesto que (9) nunca se cumple. Los valores de $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$ propuestos quedan descartados inmediatamente, entonces, como una posible solución a este problema.

Caso 4

Supongamos $\overline{q} = 1$, y $\overline{\pi}_1 = 0$. Esto implica que $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 \geq 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\int_a^b \theta f(\theta) d\theta,\\ &= -\mathbb{E}(\theta).\end{aligned}$$

Notemos que, por no negatividad de los multiplicadores, una condición necesaria para que el caso propuesto sea óptimo, es que

$$\begin{aligned} & -\mathbb{E}(\theta) \geq 0, \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}(\theta) \leq 0. \end{aligned} \tag{4*}$$

La condición (2), por su parte, queda de la forma

$$\lambda_4 = \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\left(c_a + p\right) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

Nuevamente, por no negatividad de los multiplicadores, debe ser cierto que

$$\int_{\theta^*}^b \Big(\theta\left(c_a + p\right) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \geq 0.$$

Como ya se ha explicado, sabemos que esta expresión es positiva. Esto, porque estamos integrando una función que siempre toma un valor positivo, y donde los límites de integración suponen un intervalo con infinitos elementos; sin conformar un conjunto unitario. Entonces, la condición expuesta siempre se satisface.

Notemos que, si se satisface (4*), se estarían cumpliendo todas las CPO del problema. ¿Cuál es la utilidad esperada del principal?

$$EU_P(\overline{q} = 1, \overline{\pi}_1 = 0) = \int_{\theta^*}^b \Big(\theta\left(c_a + p\right) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

En este escenario, el principal jamás entrega el objeto al agente en caso de que no haya habido una verificación exitosa de su tipo. Si el test revela el verdadero tipo del agente, calzando con el mensaje recibido, entonces se lo otorga con probabilidad 1. Una condición necesaria para que esto ocurra es que el agente tenga un tipo superior a θ^*, pues de otro modo el principal jamás le propone verificarlo.

Caso 5

Supongamos $\overline{q} = 1$, y $\overline{\pi}_1 = 1 - p - c_a$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 \geq 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \int_a^b \theta f(\theta) d\theta,\\ &= \mathbb{E}(\theta).\end{aligned}$$

Notemos que, por no negatividad de los multiplicadores, una condición necesaria para que el caso propuesto sea óptimo, es que

$$\mathbb{E}(\theta) \geq 0.$$

La condición (2), por su parte, queda de la forma

$$\lambda_4 = \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta - \lambda_2 (p + c_a).$$

Reemplazando λ_2, se tiene

$$\lambda_4 = \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta - (p + c_a)\,\mathbb{E}(\theta).$$

Nuevamente, por no negatividad de los multiplicadores, debe ser cierto que

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta - (p + c_a)\,\mathbb{E}(\theta) \geq 0, \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \geq (p + c_a)\,\mathbb{E}(\theta), \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{p + c_a} \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \geq \mathbb{E}(\theta), \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta \geq \mathbb{E}(\theta).
\end{aligned}$$

Notemos que, si se satisfacen las dos desigualdades impuestas sobre $\mathbb{E}(\theta)$, se estarían cumpliendo todas las CPO del problema. Ambas pueden resumirse en la siguiente condición:

$$0 \leq \mathbb{E}(\theta) \leq \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta. \tag{5*}$$

Dicho esto, ¿Cómo queda la utilidad esperada del principal?

$$EU_P(\overline{q} = 1, \overline{\pi}_1 = 1 - p - c_a) = (1 - p - c_a)\,\mathbb{E}(\theta) + \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

Cuando el test revela el verdadero tipo del agente, calzando con el mensaje recibido, el principal siempre le da el bien. Si el test falla, o no fuese realizado en absoluto, se lo entrega con una probabilidad positiva, pero menor a 1.

Caso 6

Supongamos $\overline{q} = 1$, y $0 < \overline{\pi}_1 < 1 - p - c_a$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 \geq 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\begin{aligned}
& \int_{a}^{b} \theta f(\theta) d\theta = 0, \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}(\theta) = 0.
\end{aligned} \tag{6*}$$

La condición (2), por su parte, queda de la forma

$$\lambda_4 = \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

Nuevamente, por no negatividad de los multiplicadores, debe ser cierto que

$$\int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta \geq 0.$$

Como ya se ha explicado, sabemos que dicha expresión es positiva. Esto, porque estamos integrando una función que siempre toma un valor positivo, y donde los límites de integración suponen un intervalo con infinitos elementos; sin conformar un conjunto unitario. Entonces, la condición expuesta siempre se satisface.

Notemos que, cumpliéndose (6*), se satisfacen todas las condiciones de KKT. Luego, ¿Cómo queda la utilidad esperada del principal?

$$\begin{aligned} EU_P(\overline{q} = 1, 0 < \overline{\pi}_1 < 1 - p - c_a) &= \overline{\pi}_1\, \mathbb{E}(\theta) + \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta, \\ &= \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Como podemos ver, se ha considerado la condición (6*), por la cual el valor esperado de θ es 0.

Caso 7

Supongamos $0 < \overline{q} < 1$, y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}(p + c_a)$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 = 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \int_{a}^{b} \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \mathbb{E}(\theta). \end{aligned}$$

Por no negatividad de los multiplicadores, una condición necesaria para que el caso propuesto sea óptimo es que

$$\mathbb{E}(\theta) \geq 0.$$

La condición (2), por su parte, queda de la forma

$$\lambda_2 = \frac{1}{p + c_a} \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta.$$

Nuevamente, por no negatividad de los multiplicadores, debe ser cierto que

$$\frac{1}{p+c_a}\int_{\theta^*}^{b}\Big(\theta\left(c_a+p\right)-c_p\Big)f(\theta)d\theta \geq 0.$$

Sabemos que esta integral es positiva. Esto, porque estamos integrando una función que siempre toma un valor positivo, y donde los límites de integración suponen un intervalo con infinitos elementos; sin conformar un conjunto unitario. Por otra parte, tenemos que $p > 0$ y $c_a > 0$, por lo que la fracción que acompaña la integral también es positiva. Entonces, la condición expuesta siempre se satisface.

Por último, hemos igualado λ_2 a dos expresiones potencialmente distintas. De esta forma, se requiere que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\theta) = \frac{1}{p+c_a}\int_{\theta^*}^{b}\Big(\theta\left(c_a+p\right)-c_p\Big)f(\theta)d\theta, \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}(\theta) = \int_{\theta^*}^{b}\theta f(\theta)d\theta - \frac{c_p}{p+c_a}\int_{\theta^*}^{b}f(\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{7*}$$

Notemos que, cumpliéndose (7*), se satisfacen todas las condiciones de KKT. Luego, ¿Cómo queda la utilidad esperada del principal?

$$\begin{aligned} EU_P(0<\overline{q}<1, \overline{\pi}_1 = 1-\overline{q}(p+c_a)) &= \left(1-\overline{q}(p+c_a)\right)\mathbb{E}(\theta) + \overline{q}\int_{\theta^*}^{b}\Big(\theta\left(c_a+p\right)-c_p\Big)f(\theta)d\theta, \\ &= \mathbb{E}(\theta) - \overline{q}(p+c_a)\,\mathbb{E}(\theta) + \overline{q}(p+c_a)\,\mathbb{E}(\theta), \\ &= \mathbb{E}(\theta). \end{aligned}$$

Como podemos ver, se ha considerado la condición (7*) en el desarrollo anterior.

Caso 8

Supongamos $0 < \overline{q} < 1$, y $\overline{\pi}_1 = 0$. Esto implica que $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 = 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\int_{a}^{b}\theta f(\theta)d\theta, \\ &= -\,\mathbb{E}(\theta). \end{aligned}$$

Por no negatividad de los multiplicadores, una condición necesaria para que el caso propuesto sea óptimo es que

$$\begin{aligned} & -\,\mathbb{E}(\theta) \geq 0, \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}(\theta) \leq 0. \end{aligned}$$

La condición (2), por su parte, queda de la forma

$$\int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta = 0.$$

Sin embargo, sabemos que esta integral es positiva. Esto, porque estamos integrando una función que siempre toma un valor positivo, y donde los límites de integración suponen un intervalo con infinitos elementos; sin conformar un conjunto unitario. Por tanto, la condición expuesta jamás se satisface.

Así, este caso no satisface todas las condiciones de KKT, puesto que (2) nunca se cumple. Los valores de $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$ propuestos quedan descartados inmediatamente, entonces, como una posible solución a este problema.

Caso 9

Supongamos $0 < \overline{q} < 1$, y $0 < \overline{\pi}_1 < 1 - \overline{q}(p + c_a)$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, y $\lambda_4 = 0$. En este caso, la condición (1) queda como

$$\begin{aligned} & \int_{a}^{b} \theta f(\theta) d\theta = 0, \\ \Leftrightarrow \qquad & \mathbb{E}(\theta) = 0. \end{aligned}$$

La condición (2), por su parte, queda de la forma

$$\int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a + p) - c_p\Big) f(\theta) d\theta = 0.$$

Sin embargo, sabemos que esta integral es positiva. Esto, porque estamos integrando una función que siempre toma un valor positivo, y donde los límites de integración suponen un intervalo con infinitos elementos; sin conformar un conjunto unitario. Por tanto, la condición expuesta jamás se satisface.

Así, este caso no satisface todas las condiciones de KKT, puesto que (2) nunca se cumple. Los valores de $\overline{\pi}_1$ y $\overline{q}$ propuestos quedan descartados inmediatamente, entonces, como una posible solución a este problema.

Análisis de los Casos

Los casos 2, 3, 8 y 9 han sido descartados como posibles soluciones al problema que enfrenta el principal, pues no satisfacen todas las condiciones de primer orden. Luego, vamos a considerar solamente los casos 1, 4, 5, 6 y 7.

Cada uno de estos últimos casos requiere que se satisfaga una condición en particular, la cual se impone sobre parámetros del modelo. Ahora bien, es fácil apreciar que dichas condiciones son, la mayoría de las veces, excluyentes. Recordemos que (4*) es la condición necesaria para que el caso 4 sea óptimo. Dicha restricción impone que

$$\mathbb{E}(\theta) \leq 0. \tag{4*}$$

Por su parte, el caso 6 requiere que

$$\mathbb{E}(\theta) = 0. \tag{6*}$$

Luego, el caso 5 cumple con todas las condiciones de KKT si

$$0 \leq \mathbb{E}(\theta) \leq \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a} \right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta. \tag{5*}$$

El caso 7 requiere que se cumpla la condición

$$\mathbb{E}(\theta) = \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a} \right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta. \tag{7*}$$

Por último, el caso 1 satisface todas las CPO si

$$\mathbb{E}(\theta) \geq \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a} \right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta. \tag{1*}$$

De este modo, a medida que $\mathbb{E}(\theta)$ va aumentando, la solución potencial cambia. Asimismo, es evidente que ciertas condiciones implican el cumplimiento de otras. Por un lado, si (6*) se satisface, tenemos que (4*), y (5*) también se cumplen. Por otro lado, (7*) implica que tanto (5*) como (1*) se satisfacen.

Sin embargo, veremos que en estos casos particulares en que más de una solución satisface todas las CPO, se tiene que todas ellas dejan al principal con la misma utilidad esperada. De este modo, habrá infinitas soluciones al problema. En cambio, cuando se satisface una condición que excluye la posibilidad de que las otras se cumplan, la solución será única. Para cada posible valor de $\mathbb{E}(\theta)$, identificaremos el vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$ que maximiza la utilidad esperada del principal.

Supongamos que

$$\mathbb{E}(\theta) < 0.$$

En este escenario, la única condición que se satisface, entre todas las expuestas, es (4*). Por tanto, el único caso en que se cumplen todas las condiciones de KKT, sería el caso 4. Concluimos, entonces, que si $\mathbb{E}(\theta) < 0$, la solución al problema del principal está dada por el vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (1, 0)$.

Supongamos ahora que (6*) se cumple. Esto es,

$$\mathbb{E}(\theta) = 0.$$

En este caso, tenemos que

$$
\begin{aligned}
EU_P(\overline{q}=1,\overline{\pi}_1=0) &= \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a+p)-c_p\Big) f(\theta)d\theta,\\
EU_P(\overline{q}=1,\overline{\pi}_1=1-p-c_a) &= (1-p-c_a)\,\mathbb{E}(\theta) + \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a+p)-c_p\Big) f(\theta)d\theta,\\
&= \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a+p)-c_p\Big) f(\theta)d\theta,\\
EU_P(\overline{q}=1,0<\overline{\pi}_1<1-p-c_a) &= \overline{\pi}_1\,\mathbb{E}(\theta) + \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a+p)-c_p\Big) f(\theta)d\theta,\\
&= \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a+p)-c_p\Big) f(\theta)d\theta.
\end{aligned}
$$

Así, los casos 4, 5 y 6 dejarían al principal con la misma utilidad esperada. Básicamente, dado que $\mathbb{E}(\theta)=0$, el valor de $\overline{\pi}_1$ se vuelve irrelevante, y lo único importante es que $\overline{q}$ sea igual a 1. Concluimos, pues, que si se satisface

$$
\mathbb{E}(\theta)=0, \tag{6*}
$$

la solución al problema del principal lo conforma cualquier vector $(\overline{q},\overline{\pi}_1)$ tal que $\overline{q}=1$, y $0\le\overline{\pi}_1\le 1-p-c_a$.

Supongamos ahora que

$$
0<\mathbb{E}(\theta)<\int_{\theta^*}^{b}\theta f(\theta)d\theta-\left(\frac{c_p}{p+c_a}\right)\int_{\theta^*}^{b} f(\theta)d\theta.
$$

En este escenario, la única condición que se satisface, entre todas las expuestas, es (5*). Por tanto, el único caso en que se cumplen todas las condiciones de KKT, sería el caso 5. Concluimos, entonces, que la solución al problema del principal está dada por el vector $(\overline{q},\overline{\pi}_1)=(1,1-p-c_a)$.

Supongamos (7*) se cumple. Esto es,

$$
\mathbb{E}(\theta)=\int_{\theta^*}^{b}\theta f(\theta)d\theta-\left(\frac{c_p}{p+c_a}\right)\int_{\theta^*}^{b} f(\theta)d\theta.
$$

En este caso, tenemos que

$$
\begin{aligned}
EU_P(\overline{q}=0,\overline{\pi}_1=1) &= \mathbb{E}(\theta),\\
EU_P(\overline{q}=1,\overline{\pi}_1=1-p-c_a) &= (1-p-c_a)\,\mathbb{E}(\theta) + \int_{\theta^*}^{b} \Big(\theta\,(c_a+p)-c_p\Big) f(\theta)d\theta,\\
&= \mathbb{E}(\theta)-(p+c_a)\,\mathbb{E}(\theta)+(p+c_a)\,\mathbb{E}(\theta),\\
&= \mathbb{E}(\theta),\\
EU_P(0<\overline{q}<1,\overline{\pi}_1=1-\overline{q}(p+c_a)) &= \mathbb{E}(\theta).
\end{aligned}
$$

Así, los casos 1, 5 y 7 dejarían al principal con la misma utilidad esperada. Concluimos, pues, que si se satisface

$$\mathbb{E}(\theta) = \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta, \tag{7*}$$

la solución al problema del principal lo conforma cualquier vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1)$ tal que $0 \leq \overline{q} \leq 1$, y $\overline{\pi}_1 = 1 - \overline{q}(p + c_a)$.

Por último, supongamos que

$$\mathbb{E}(\theta) > \int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta.$$

En este escenario, la única condición que se satisface, entre todas las expuestas, es (1*). Por tanto, el único caso en que se cumplen todas las condiciones de KKT, sería el caso 1. Concluimos, entonces, que la solución al problema del principal está dada por el vector $(\overline{q}, \overline{\pi}_1) = (0, 1)$.

Notemos que se han cubierto todos los valores posibles para $\mathbb{E}(\theta)$, y su relación con

$$\int_{\theta^*}^{b} \theta f(\theta) d\theta - \left(\frac{c_p}{p + c_a}\right) \int_{\theta^*}^{b} f(\theta) d\theta.$$

Queda determinada, por tanto, la solución del problema de optimización suponiendo que

$$\frac{c_p}{b} - c_a < p < 1 - c_a;$$

quedando demostrados los resultados enunciados en la ***proposición 4***.