INSTITUTO DE ECONOMÍA

TESIS de MAGÍSTER

2015

Subastas con Incertidumbre sobre la Distribución

Nicolás Pastrián C.

www.economia.puc.cl

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

TESIS DE GRADO
MAGISTER EN ECONOMIA

Pastrián, Contador, Nicolás Pastrián

Diciembre, 2015

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

SUBASTAS CON INCERTIDUMBRE SOBRE LA DISTRIBUCIÓN

Nicolás Raúl Pastrián Contador

Comisión

Eugenio Bobenrieth, Rodrigo Harrison, Jaime Casassus, Claudia Martinez,
Juan Pablo Montero, Alejandra Traferri, Felipe Zurita, Gert Wagner

Santiago, Diciembre de 2015

Subastas con incertidumbre sobre la distribución

Nicolás Pastrián

29 de enero de 2016

Resumen

En el presente trabajo estudiamos algunas subastas en presencia de incertidumbre sobre la distribución de valoraciones de los compradores. Se emplea un enfoque de diseño de mecanismos para abordar los distintos problemas, limitándonos al uso de mecanismos directos reducidos. Las soluciones muestran ser generalizaciones de condiciones encontradas en modelos anteriores sin incertidumbre, adaptadas para considerar la incertidumbre presente en nuestros modelos

1. Introducción

En los modelos de subastas es usual asumir que la distribución de valoraciones de los compradores es conocida tanto por el vendedor como por ellos. Esto implica que las valoraciones de cada comprador no aportan información a las creencias del vendedor, es decir, no cambian la estimación de la distribución de valoraciones para el vendedor, sino que solo son una realización de ésta.

Sin embargo, esto supone un grave problema sobre la formación de las distribuciones o creencias, ya que si estas no son usadas para actualizar la estimación entonces ¿de dónde sale esta distribución?

A modo de ejemplo, pensemos en una subasta estándar, en la que se fija un precio de reserva de antemano. Es decir, se fija un precio mínimo al cual se venderá el objeto.

Si no se reciben ofertas sobre el precio de reserva, entonces el objeto no se adjudica a ningún comprador. Repetir la subasta a los mismos compradores ocasionaría el mismo resultado si es que el precio de reserva no se actualiza. Por otro lado, si el precio de reserva se actualiza, esto tambien sería un problema, pues si los compradores anticipan esta actualización y son suficientemente pacientes pueden decidir esperar a que el precio de reserva baje antes de ofertar, generándose así una dinámica de Coase (bien durable) donde el vendedor simplemente no puede fijar un precio de reserva.

Si la información es confiable, la determinación del precio de reserva hará que el evento de que nadie compre no sea tan probable.

¿Pero qué sucede si la información es escasa o menos confiable? Entonces podría ser posible que a un precio de reserva "mal escogido" sea muy probable que nadie oferte.

¿Por qué entonces no permitimos al vendedor intentar usar la información de las ofertas de una subasta en la propia subasta?

Al limitar al vendedor a escoger un precio de reserva fijo e imponer que su estimación sea perfecta dejamos fuera la posibilidad de analizar como el vendedor actualiza su estimación sin usar información externa a la subasta.

El presente trabajo busca abordar este problema desde la perspectiva de diseño de mecanismos.

En particular se estudia un ambiente simple de subastas con valoraciones privadas pero en que el vendedor tiene incertidumbre acerca de la distribución de valoraciones de los compradores.

En la primera parte estudiaremos un ambiente estático (un periodo), caracterizando el mecanismo óptimo para dos restricciones de participación distintas. En la segunda parte introduciremos un mecanismo de dos periodos para analizar cómo puede ser usada la información en un contexto dinámico.

2. Literatura

Riley y Samuelson [6] y Myerson [10] estudian una subasta con valoraciones independientes y en que la distribución es conocida. Para este caso, demuestran que el mecanismo óptimo implica usar un precio de reserva elegido especialmente para la distribución de valoraciones, el cual es potencialmente distinto para cada comprador si las distribuciones son asimétricas. Este mecanismo implica dejar rentas informacionales a los compradores para lograr que revelen sus verdaderas valoraciones. Algunas de las virtudes de este mecanismo es que soporta una implementación en que la transferencia es realizada solo por quien recibe el objeto y es además un mecanismo en estrategias dominantes.

Cremer y McLean [4] y Rahman [12] estudian, en cambio, un ambiente con valoraciones correlacionadas, encontrando que el mecanismo óptimo puede alcanzar las mismas ganancias que un mecanismo con información completa. Para lograrlo es necesario modificar las transferencias del mecanismo eficiente, es decir, de la subasta a segundo precio sin precio de reserva, incorporando transferencias condicionales en las realizaciones de los demás compradores. Estas transferencias permiten extraer las rentas informacionales de todos los compradores. El gran problema de este mecanismo es que solo logra satisfacer participación interim, es decir, que los compradores decidan participar solo conociendo su valoración pero no las de los demás, e implica realizar y recibir transferencias potencialmente de todos los compradores. Son estas características las que hacen cuestionable la implementación de este tipo de mecanismos.

Fu et al. [5] muestran que el resultado anterior no descansa en el supuesto de que la distribución sea conocida, demostrando que en un mecanismo con muestreo y valoraciones correlacionadas, aún cuando la distribución es desconocida, alcanzar el rendimiento del mecanismo con información completa es posible.

Por otro lado, Roughgarden y Talgam-Cohen [13] estudian el rendimiento del mecanismo de Myerson (maximizador de las valoraciones virtuales) en el caso en que las valoraciones son interdependientes. En particular, muestran que logra aproximar las ganancias del mecanismo óptimo y, además, demuestran que para el caso de valoraciones correlacionadas el mecanismo de Myerson es óptimo dentro de la clase de mecanismos ex-post, es decir, óptimo entre los mecanismos que satisfacen participación incluso después de que las valoraciones de todos los compradores sean reveladas.

Farinha Luz [9] estudia una subasta donde la información de los compradores incluye sus valoraciones y sus creencias de orden superior. El autor demuestra que bajo una condición de independencia es posible alcanzar la misma recaudación esperada que se alcanzaría si las creencias fueran conocidas, es decir, cuando solo las valoraciones son información privada. Esto se logra solicitando el perfil completo de tipos (no solo las valoraciones) y utilizando potencialmente apuestas para explotar la información correlacionada de los compradores.

Brooks [3] estudia un problema similar, pero desde un enfoque de peor caso. En particular evalúa el rendimiento del mecanismo usando la razón de extracción, es decir, que tanto del valor social generado en la subasta es capturado en la recaudación, proponiendo el uso de un mecanismo con encuesta para extraer la información de los compradores. Esta encuesta consiste en solicitar junto a las valoraciones, las creencias de primer orden de los compradores. Con esta información, el mecanismo condiciona las transferencias del ganador en la información revelada por los otros compradores.

Si bien los modelos anteriores estudian ambientes similares, el modelo más cercano al estudiado en el presente trabajo es el de Kanoria y Nazerzadeh [7], quienes estudian un modelo dinámico aproximadamente compatible en incentivos, en que el vendedor no conoce la distribución de valoraciones de los compradores y solo solicita información de las valoraciones. Los autores interpretan esta incertidumbre como que el vendedor no conoce la calidad del objeto y aplican su modelo a las subastas de avisos publicitarios. El mecanismo que proponen es un mecanismo de umbral en el que el precio de reserva se mantiene en un cierto nivel hasta que suficientes valoraciones pasan el umbral, lo que hace que el precio de reserva suba. Los autores analizan el rendimiento de este mecanismo comparando las ganancias esperadas que obtiene con las ganancias esperadas del mecanismo óptimo cuando la calidad del objeto es conocida.

La gran diferencia es que en el presente trabajo buscamos caracterizar el mecanismo compatible en incentivos que logre la mayor recaudación; es decir, nos enfocaremos directamente en resolver un problema de maximización del vendedor en vez de compararlo con un benchmark., restringiendonos a la búsqueda de un mecanismo que sea compatible en incentivos y no solo aproximadamente.

3. Modelo de un periodo

Consideremos una subasta de valores privados. Hay un conjunto I de n compradores neutrales al riesgo, cada uno con valoración $\theta_i \in [0,1]$ extraida de forma independiente de una distribución F con densidad f estrictamente positiva. Suponemos además que las valoraciones son información privada y que F es de conocimiento común para todos los compradores.

Así, para una asignación x_i y transferencia ψ_i, la utilidad del comprador i es

$$\theta_i x_i - \psi_i \tag{1}$$

Denotamos por $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ al perfil de valoraciones y por

$$f^n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta_i)$$

a su densidad conjunta.

De manera análoga, denotamos el perfil de valoraciones excluyendo al comprador i y a su densidad por θ_{-i} y $f^{n-1}(\theta_{-i})$ respectivamente.

En lo que sigue, definiremos otros vectores y perfiles de manera análoga.

A diferencia de los modelos clásicos de subastas y diseño de mecanismos, suponemos que el vendedor no conoce la distribución de la cual extraen sus valoraciones los compradores, sino que el vendedor solo sabe que la distribución de valoraciones pertenece a una familia finita $\mathcal{F}$ de distribuciones posibles, sobre la cual tiene una creencia a priori $\mu \in \Delta(\mathcal{F})$.

En otras palabras, suponemos que la naturaleza escoge una distribución y se las revela solo a los compradores.

Por lo tanto, y a diferencia de las subastas clásicas, la información privada del comprador i está dada por (θ_i, F). Es decir, la información del comprador incluye su valoración por el objeto pero además la distribución de la que extraen las valoraciones todos los compradores.

3.1. Mecanismo

Un mecanismo en este contexto está dado por $\mathcal{M} = (x, \psi, M)$ con

$$x : M \to X$$

$$\psi : M \to \mathbb{R}^n$$

donde M_i es el espacio de mensajes para el comprador i y

$$X = \{x \in \{0,1\} | \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\}$$

es el conjunto de asignaciones factibles.

A continuación se presentan dos tipos de mecanismos.

Definición 1 (Mecanismo directo)**.** *Decimos que $\mathcal{M}$ es un mecanismo directo si el espacio de mensajes para cada comprador coincide con su información privada, es decir, si $M_i = [0,1] \times \mathcal{F}$.*

Definición 2 (Mecanismo directo reducido)**.** *Decimos que $\mathcal{M}$ es un mecanismo directo reducido si el espacio de mensajes coincide con el espacio de valoraciones, es decir, $M_i = [0,1]$*

La primera definición es estándar en la literatura de diseño de mecanismos. Un ejemplo en que los compradores tienen un conjunto similar de información es el ambiente en Farinha Luz [9], en que la información es representada por un espacio de tipos que determina las valoraciones y creencias (de orden superior) de los compradores.

La segunda definición es extraida de Börgers [2], quien argumenta que este tipo de mecanismos puede ser más simple que un mecanismo que solicite toda la información de los compradores, y por tanto es relevante de analizar. Algunos modelos se restringen de manera implicita a este tipo de mecanismos, ver por ejemplo Kanoria y Nazerzadeh [7].

Nos centraremos en la búsqueda de un mecanismo directo reducido que sea compatible en incentivos. Notemos que esto es con (potencial) pérdida de generalidad, pues el principio de la revelación aplica a un mecanismo directo pero no necesariamente a un mecanismo de este tipo.

A pesar de que el restringir el espacio de mensajes no permite realizar una caracterización completa del mecanismo al no poder aplicar el principio de la revelación, esto se hace con el objetivo de capturar mejor las subastas de la realidad. Ello, pues el capturar toda la información privada del comprador requeriría incluir una "encuesta" junto a cada oferta, es decir, solicitar la distribución junto a la valoración. Una subasta de este tipo es propuesta por Brooks [3] en un contexto de diseño robusto de mecanismos[1].

El problema es que requerir el uso de esta encuesta hace que el mecanismo sea difícil de implementar ya que requiere que los compradores identifiquen perfectamente un elemento complejo: una distribución completa de valoraciones. Esto hace que en la práctica sea difícil encontrar subastas de este tipo, siendo el formato estándar solicitar solo ofertas (valoraciones).

En lo que sigue omitiremos de la notación al espacio de mensajes y haremos referencia solo a mecanismos directos reducidos a menos que se indique lo contrario.

[1]El modelo de Brooks es una subasta en un ambiente de espacio de tipos, lo que se utiliza para modelar las creencias de orden superior. Si restringimos suficientemente estas creencias, son equivalentes a nuestras distribuciones. Para más detalles respecto a diseño de mecanismos con creencias de este tipo, se recomienda revisar Bergemann y Morris [1] y Börgers [2].

De esta manera, un mecanismo directo reducido en este contexto está definido por $\mathcal{M} = (x, \psi)$ tal que

$$x : [0,1]^n \to X$$

$$\psi : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$$

Definimos la probabilidad condicional de obtener el objeto como

$$Q_i(\theta_i; F) = \int x_i(\theta) f^{n-1}(\theta_{-i}) d\theta_{-i} \tag{2}$$

y la trasferencia esperada como

$$\Psi_i(\theta_i; F) = \int \psi_i(\theta) f^{n-1}(\theta_{-i}) d\theta_{-i} \tag{3}$$

La utilidad esperada del comprador i de reportar $\hat{\theta}_i$ cuando su valoración es θ_i, la verdadera distribución es F y los demás compradores revelan su verdadera valoración es

$$U_i(\theta_i, \hat{\theta}_i; F) = \theta_i Q_i(\hat{\theta}_i; F) - \Psi_i(\hat{\theta}_i; F) \tag{4}$$

Suponemos que los compradores toman sus decisiones en base a su utilidad esperada. Es decir, escogen el reporte $\hat{\theta}_i$ que maximice la expresión anterior.

Definimos la utilidad de revelar su verdadera valoración como

$$V_i(\theta_i; F) = U_i(\theta_i, \theta_i; F) \tag{5}$$

Esto nos permite expresar de manera simple la condición de compatibilidad de incentivos.

Definición 3 (Compatibilidad de incentivos)**.** *Decimos que el mecanismo es compatible en incentivos si*

$$V_i(\theta_i; F) \geq U_i(\theta_i, \hat{\theta}_i; F) \tag{6}$$

para cualquier $\theta_i, \hat{\theta}_i \in [0,1]$ *y* $F \in \mathcal{F}$*.*

Siguiendo a Myerson [10], la compatibilidad de incentivos se puede expresar de manera equivalente en el siguiente lema.

Lema 1. *El mecanismo satisface compatibilidad de incentivos si y solo si para cualquier* $\theta_i \in [0,1]$ *y* $F \in \mathcal{F}$

1. $Q_i(\theta_i; F)$ *es creciente en* θ_i *y*
2. $V_i(\theta_i; F) = V_i(0; F) + \int_0^{\theta_i} Q_i(s; F) ds$

La demostración del lema anterior sigue de Myerson [10] considerando cada F por separado y se encuentra en el apéndice.

Del lema anterior, es directo ver que las transferencias esperadas deben satisfacer

$$\Psi_i(\theta_i; F) = \theta_i Q_i(\theta_i; F) - \int_0^{\theta_i} Q_i(s; F) ds - V_i(0; F) \tag{7}$$

lo que no es otra cosa que la equivalencia de ganancias, es decir, dada una asignación las transferencias esperadas de dos mecanismos compatibles en incentivos solo pueden difererir por una constante.

Vemos que en nuestro ambiente es posible aplicar el resultado de Myerson para caracterizar la compatibilidad de incentivos y las transferencias esperadas. Esto se debe a que, desde el punto de vista de los compradores, las distribución de valoraciones son independientes. Como es sabido, de Cremer y McLean, bajo correlación ya no es posible establecer esta equivalencia y, por tanto, la caracterización anterior deja de ser válida.

Además de la compatibilidad de incentivos, suponemos que no es posible obligar a los compradores a participar en la subasta. Por ello es necesario que el mecanismo satisfaga una condición de participación o racionalidad individual.

Definición 4 (Participación interim)**.** *Decimos que el mecanismo satisface participación interim si*

$$V_i(\theta_i; F) \geq 0 \tag{8}$$

para cualquier $\theta_i \in [0, 1]$ *y* $F \in \mathcal{F}$*.*

Definición 5 (Participación ex-ante)**.** *Decimos que el mecanismo satisface participación ex-ante si*

$$\int V_i(\theta_i; F) f(\theta_i) d\theta_i \geq 0 \tag{9}$$

para cualquier $F \in \mathcal{F}$*.*

La primera condición de participación implica que los compradores deben decidir si participar o no de la subasta después de conocer su valoración, pero antes que los demás compradores revelen las suyas. En cambio, la segunda requiere que los compradores decidan si participar o no de la subasta antes de extraer su valoración.

El objetivo del vendedor es encontrar la subasta (mecanismo) que maximice su recaudación esperada. Si la distribución de las valoraciones fuese conocida, el vendedor evaluaría el rendimiento del mecanismo usando esta distribución.

Como desconoce la verdadera distribución, deberá ponderar cada distribución factible por su creencias a priori. De esta manera, la distribución con la que evaluará el mecanismo es

$$\beta(\theta) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) F(\theta) \tag{10}$$

lo que corresponde a sus creencias ex-ante sobre las valoraciones, es decir, a la probabilidad que asigna a cada perfil de valoraciones con la información que tiene antes de implementar el mecanismo.

Notemos que aunque las distribuciones son independientes desde el punto de vista de los compradores, no lo son desde el punto de vista del vendedor. Esto se debe a que las distribuciones están correlacionadas y, como el vendedor obtiene información acerca de ellas a través de las valoraciones, esto hace que la distribución de valoraciones para él pierda la independencia entre compradores.

Al implementar el mecanismo, los compradores revelarán sus valoraciones y con esta nueva información el vendedor actualizara sus creencias usando la regla de Bayes. De esta manera, sus creencias ex-post sobre las distribuciones están dadas por

$$\frac{\mu(F) f^n(\theta)}{\sum_{G \in \mathcal{F}} \mu(G) g^n(\theta)} \tag{11}$$

Así, la probabilidad que se le asigna a una distribución en particular aumentará cuando se observen valoraciones que sean más probables bajo dicha distribución.

La función objetivo del vendedor es entonces

$$\int \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\theta) d\beta(\theta) \tag{12}$$

y el problema que debe resolver es encontrar la asignación y transferencias que maximice (12) sujeto a la restriccion de compatibilidad de incentivos (3) y a una restricción de participación (4) o (5).

3.2. Participación interim

Cuando la restricción de participación es interim, el siguiente lema ofrece una forma alternativa de representar el problema del vendedor.

Lema 2. *El problema del vendedor con participación interim puede ser reescrito como*

$$\text{máx} \int \sum_i \zeta_i(\theta) x_i(\theta) d\beta(\theta) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) V_i(0; F)$$

sujeto a:

$$Q_i(\theta_i; F) \text{ creciente en } \theta_i, \text{ para cualquier } \theta_i \in [0,1] \text{ y } F \in \mathcal{F}$$

$$V_i(0; F) \geq 0 \text{ para cualquier } F \in \mathcal{F}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\theta) \leq 1 \text{ para cualquier } \theta \in [0,1]^n$$

donde

$$\zeta_i(\theta) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{\mu(F) f^n(\theta)}{\sum_{G \in \mathcal{F}} \mu(G) g^n(\theta)} \left(\theta_i - \frac{1 - F(\theta_i)}{f(\theta_i)} \right) \tag{13}$$

Demostración. En el apéndice □

La expresión en (13) puede ser interpretada como la valoración virtual promedio del comprador. Ésta pondera la clásica valoración virtual, $\theta_i - \frac{1-F(\theta_i)}{f(\theta_i)}$, para cada distribución en $\mathcal{F}$ por la creencia ex-post asociada a esa distribución. En otras palabras, corresponde a la valoración virtual esperada actualizada con la información revelada en el mecanismo.

Siguiendo un enfoque clásico en diseño de mecanismos, primero buscamos una solución al problema relajado, es decir, al problema sin considerar la restricción sobre Q_i, para luego buscar condiciones bajo las cuales esta solución sea tambien solución del problema completo.

Lema 3. *En el problema relajado, la asignación óptima está dada por*

$$x_i(\theta) = \begin{cases} 1 & si\ (\zeta_i(\theta) > \text{máx}_{j \neq i} \zeta_j(\theta)) \wedge (\zeta_i(\theta) > 0) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{14}$$

Demostración. Directa, basta ver que el problema es lineal en las asignaciones. □

Esto es análogo a lo que sucede en Myerson [10], donde el mecanismo óptimo implica asignar al comprador con la valoración virtual más alta. La diferencia es que aqui, en vez de utilizar la valoración virtual para una distribución fija, se utiliza la valoración virtual promedio para evaluar a quién es más rentable asignarle el objeto.

Para que esta asignación sea solución del problema completo necesitamos que las funciones $Q_i(\cdot; F)$ inducidas por esta asignación sean crecientes.

Una condición suficiente para que esto suceda es que la asignación $x_i(\theta)$ sea creciente en θ_i. A continucación proponemos dos condiciones que garantizan que esto se cumpla.

Definición 6 (Regularidad)**.** *Decimos que el ambiente es regular si*

$$J^F(\theta_i) = \theta_i - \frac{1 - F(\theta_i)}{f(\theta_i)}$$

es creciente en θ_i para cualquier $F \in \mathcal{F}$.

Definición 7 (Concavidad)**.** *Decimos que se cumple la condición de concavidad si*

$$\frac{\partial \log (f(\theta))}{\partial \theta} \geq \frac{-2}{\theta}$$

para cualquier $F \in \mathcal{F}$*.*

La primera condición surge simplemente de aplicar la condición de regularidad en Myerson [10] sobre toda la familia de distribuciones factibles $\mathcal{F}$. Esto sucede por ejemplo si las distribuciones tienen función de riesgo (*hazard rate*) creciente y, cómo veremos, garantiza que al aumentar la valoración del comprador i, su propia valoración virtual promedio crezca más que la de los otros compradores. Esto es necesario pues al aumentar la valoración de un comprador, potencialmente todas las valoraciones virtuales promedio cambian, lo que hace necesario una condición para garantizar que la dominancia de un comprador se mantenga.

La segunda condición restringe la concavidad de las distribuciones. Ésta condición permite garantizar que si la valoración virtual promedio es positiva para un valor de θ_i, al aumentar la valoración del comprador i esta valoración virtual se mantenga positiva. Esto se debe a que la valoración virtual promedio incluye una actualización de creencias, por lo que puede evolucionar de forma no monótona, siendo la condición de regularidad insuficiente para garantizar que el signo de la valoración virtual no cambie al aumentar la valoración del comprador.

Veamos que si $f' \geq 0$, es decir, si F es convexa, entonces ambas condiciones se satisfacen. Ejemplo de distribuciones que satisfacen esta condición es la beta con parámetros $(1,1)$, que corresponde a la uniforme, y parámetros $(2,1)$. Cualquier combinación lineal de estas estas distribuciones tambien la satisfacen.

Proposición 1. *Bajo las condiciones de regularidad y concavidad, el mecanismo*

$$x_i(\theta) = \begin{cases} 1 & si\ (\theta_i > \max_{j\neq i} \theta_j) \wedge (\zeta_i(\theta) > 0) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{15}$$

$$\psi_i(\theta) = \begin{cases} \max_{j\neq i} \theta_j & si\ \theta_i > \max_{j\neq i} \theta_j > r_i(\theta_{-i}) \\ r_i(\theta_{-i}) & si\ \theta_i > r_i(\theta_{-i}) > \max_{j\neq i} \theta_j \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{16}$$

donde

$$r_i(\theta_{-i}) = \{r_i \in [0,1] | \zeta_i(r_i, \theta_{-i}) = 0\} \tag{17}$$

es solución al problema del vendedor con restricción interim.

Demostración. Bajo regularidad, para cualquier $F \in \mathcal{F}$

$$J(\theta_i; F) \geq J(\theta_j; F) \iff \theta_i \geq \theta_j$$

lo que implica que

$$\zeta_i(\theta) \geq \zeta_j(\theta) \iff \theta_i \geq \theta_j$$

Necesitamos además que si para θ_i, $\zeta_i(\theta) \geq 0$ entonces para cualquier $\epsilon > 0$, $\zeta_i(\theta_i + \epsilon, \theta_{-i}) \geq 0$

Supongamos $\zeta_i(\theta) \geq 0$, entonces

$$\sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(F) f^n(\theta) J(\theta_i; F) \geq 0$$

Derivando al lado derecho respecto a θ_i,

$$\sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(F) f^{n-1}(\theta_{-i}) \left[f'(\theta_i) J(\theta_i; F) + f(\theta_i) \frac{\partial J(\theta_i; F)}{\partial \theta_i} \right]$$

Veamos que

$$\frac{\partial J(\theta_i;F)}{\partial\theta_i}=2+\frac{f'(\theta_i)}{f(\theta_i)}\frac{1-F(\theta_i)}{f(\theta_i)}$$

reemplazando

$$\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)f^{n-1}(\theta_{-i})\left[f'(\theta_i)\theta_i+2f(\theta_i)\right]$$

La condición de concavidad se puede reescribir como

$$\frac{f'(\theta_i)}{f(\theta_i)}+\frac{2}{\theta_i}\geq 0 \iff f'(\theta_i)\theta_i+2f(\theta_i)\geq 0$$

Por lo tanto

$$\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)f^{n-1}(\theta_{-i})\left[f'(\theta_i)\theta_i+2f(\theta_i)\right]\geq 0$$

Luego, x_i definido en (14) es creciente en θ_i. Para las transferencias, basta ver que (7) haciendo $V_i(0;F)=0$

$$\begin{aligned}
\Psi_i(\theta_i;F)&=\int\psi_i(\theta)f^{n-1}(\theta_{-i})d\theta_{-i}\\
&=\theta_iQ_i(\theta_i;F)-\int_0^{\theta_i}Q_i(s;F)ds\\
&=\int\theta_ix_i(\theta)f^{n-1}(\theta_{-i})d\theta_{-i}-\int_0^{\theta_i}\int x_i(s,\theta_{-i})f^{n-1}(\theta_{-i})d\theta_{-i}ds\\
&=\int\theta_ix_i(\theta)f^{n-1}(\theta_{-i})d\theta_{-i}-\int\int_0^{\theta_i}x_i(\theta)f^{n-1}(\theta_{-i})ds\,d\theta_{-i}\\
&=\int\left(\theta_ix_i(\theta)-\int_0^{\theta_i}x_i(s,\theta_{-i})ds\right)f^{n-1}(\theta_{-i})d\theta_{-i}
\end{aligned}$$

Una forma de lograrlo es

$$\psi_i(\theta)=\theta_ix_i(\theta)-\int_0^{\theta_i}x_i(s,\theta_{-i})ds$$

de (15) es directo ver que

$$\begin{aligned}
\psi_i(\theta)&=\begin{cases}\theta_i-\int_{\max_{j\neq i}\theta_j}^{\theta_i}1ds & si\ \theta_i>\max_{j\neq i}\theta_j>r_i(\theta_{-i})\\ \theta_i-\int_{r_i(\theta_{-i})}^{\theta_i}1ds & si\ \theta_i>r_i(\theta_{-i})>\max_{j\neq i}\theta_j\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}\\
&=\begin{cases}\max_{j\neq i}\theta_j & si\ \theta_i>\max_{j\neq i}\theta_j>r_i(\theta_{-i})\\ r_i(\theta_{-i}) & si\ \theta_i>r_i(\theta_{-i})>\max_{j\neq i}\theta_j\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}
\end{aligned}$$

□

La función $r_i(\theta_{-i})$ corresponde al precio de reserva para el comprador i condicional en las valoraciones de los otros compradores, representando tanto el valor cobrado cuando las demás valoraciones son bajas, como el valor mínimo para el cual se le asigna el objeto.

Notemos que este precio de reserva depende del reporte de los demás compradores pero no del reporte del propio comprador i. La razón de la primera condición es que en este caso los reportes de los compradores no entregan solo información sobre cuánto valoran el objeto sino tambien sobre el proceso que genera estas valoraciones. Por lo tanto, dada la incertidumbre que enfrenta, al vendedor le es óptimo usar parte de esa información a la hora de decidir cómo asignar. La segunda condición viene del hecho de que el vendedor no puede usar la información del comprador i en esta evaluación. Esto debido a que de lo contrario el comprador tendría incentivos a reportar un valor distinto a su verdadera valoración con el fin de influir en el valor que le es cobrado, violando asi la compatibilidad de incentivos.

Extender este mecanismo al caso asimétrico no es tan sencillo como el caso sin incertidumbre, pues las condiciones de regularidad y la concavidad ya no son suficientes para garantizar que la asignación sea creciente. Esto se debe a que sin simetría no podemos asegurar una relación de dominancia monótona de las valoraciones virtuales entre compradores aún bajo estas condiciones. Por tanto, ante cambios en la valoración del comprador i, la ponderación de cada valoración virtual varía de forma no necesariamente monótona, lo que implica que, para algunas combinaciones, una mayor valoración suponga asignar un mayor peso a una distribución que favorezca más a un comprador j, pudiendo entonces perder la monotonía en la asignación, y violando así la compratibilidad de incentivos.

3.2.1. Ejemplo

Consideremos un caso de dos compradores ($n = 2$) con dos distribuciones posibles definidas por

$$F_1(z) = z$$

$$F_2(z) = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2}$$

con densidades $f_1(z) = 1$ y $f_2(z) = \frac{1}{2} + z$ respectivamente. Como vemos, las densidades en este caso son crecientes; por lo tanto, estas distribuciones satisfacen la condición de concavidad.

Las valoraciones virtuales en cada caso están dadas por

$$\begin{aligned} J_i^{F_1}(\theta_i) &= \theta_i - (1 - \theta_i) \\ &= 2\theta_i - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_i^{F_2}(\theta_i) &= \theta_i - \left(\frac{1 - \frac{\theta_i}{2} - \frac{\theta_i^2}{2}}{\theta_i + \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{\frac{3}{2}\theta_i^2 + \theta_i - 1}{\theta_i + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

de donde podemos verificar de forma directa que tambien se cumple la condición de regularidad, pues las valoraciones virtuales son crecientes.

Analicemos primero qué sucedería si la distribución fuese conocida.

En este caso el mecanismo óptimo está dado por el mecanismo de Myerson [10]. De esta manera, el mecanismo queda determinado por el precio de reserva óptimo para cada distribución. Es decir,

$$r_i^F : r_i = \frac{1 - F(r_i)}{f(r_i)} \tag{18}$$

En particular, $r_i^{F_1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ y $r_i^{F_2} = \frac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0{,}5486$.

La asignación óptima implica asignar al comprador con la valoración más alta siempre y cuando ésta supere el precio de reserva. Una transferencia que implementa esta asignación es cobrar al ganador el máximo entre la segunda mayor oferta y su precio de reserva, pero a los demás compradores no solicitar ninguna transferencias.

Veamos ahora que sucede cuando la distribución no es conocida. Para simplificar aún más el análisis, supongamos que el vendedor asigna la misma probabilidad a cada distribución.

En este caso, la valoración virtual promedio está dada por

$$\zeta_i(\theta) = \frac{\frac{3}{2}(\theta_j + \frac{1}{2})\theta_i^2 + (\theta_j + \frac{5}{2})\theta_i - (\theta_j + \frac{3}{2})}{1 + (\theta_i + \frac{1}{2})(\theta_j + \frac{1}{2})}$$

por lo que el precio de reserva condicional está dado por

$$r_i(\theta_j) = \frac{\sqrt{28\theta_j^2 + 68\theta_j + 43} - 2\theta_j - 5}{6\theta_j + 3} \in \left[\frac{\sqrt{43} - 5}{3}, \frac{\sqrt{139} - 7}{9}\right] \approx [0{,}5191, 0{,}5322]$$

Notemos que en este ejemplo el precio de reserva del comprador i es creciente en el reporte del otro comprador.

Es importante destacar que no siempre es así, ya que el precio de reserva no aumenta porque la oferta del otro comprador sea más alta sino porque una oferta más alta indica que las distribución que rige las valoraciones es la que tiene asociada el precio de reserva más alto (F_2 en este caso). Esto es análogo a lo que sucede en los contratos de riesgo moral, donde se realiza un mayor pago no para repartir los resultados, sino porque es indicador de esfuerzo y permite reducir las rentas informacionales de los compradores.

Para el caso de dos compradores y dos distribuciones posibles, una condición suficiente para que el precio de reserva sea creciente es que si $r_i^{F_1} > r_i^{F_2}$, entonces la diferencia $f_1(\theta_i) - f_2(\theta_i)$ sea creciente en θ_i para todo $\theta_i > r_i^{F_2}$. Es fácil verificar que esta condición se cumple en el ejemplo anterior.

Comparemos el mecanismo con incertidumbre con el mecanismo sin incertidumbre.

Cuando la distribución es conocida, el precio de reserva no varía. Esto se debe a que, como el vendedor está seguro que la distribución es F, dos valoraciones bajas cercanas al precio de reserva no cambian sus creencias acerca de la distribución que rige al mercado. Por lo tanto, el que ambos compradores obtengan valoraciones bajas es solo mala suerte y no producto de que la estimación de la distribución no es la adecuada. Es esto lleva a que no se ajuste el precio de reserva.

En cambio, cuando hay incertidumbre respecto a la distribución, dos valoraciones bajo un precio de reserva "alto" indican que es menos probable que estas provengan de la distribución que tiene asociado un precio de reserva más alto (F_2 en el ejemplo), por lo que ajustar el precio de reserva es óptimo para el vendedor.

¿En qué contexto podría observarse un mecanismo como este en la realidad?

En una subasta bien planificada, en que el vendedor conoce los detalles del objeto y la información es suficientemente confiable como para tener una "buena" estimación de la distribución de valoraciones de los compradores es poco probable que un mecanismo como este pueda ser observado. En este caso la información revelada por el mecanismo no es utilizada activamente, pues no se requiere estimar la distribución de la cual se extraen las valoraciones. Este es el caso en que las creencias son degeneradas o la familia de distribuciones solo posee un elemento.

En cambio, en un ambiente donde la información es escasa o poco confiable, es mucho más razonable que el vendedor tome la decisión de asignar o no el objeto luego de conocer las valoraciones de los compradores, usando activamente la información revelada por el mecanismo pero sin violar la compatibilidad de incentivos. Así, esperaríamos encontrar mayor discreción a la hora de decidir si asignar o no el objeto cuando la incertidumbre del ambiente es mayor y, por tanto, la información es más valiosa.

3.3. Participación ex-ante

Consideremos ahora un ambiente idéntico al del problema anterior pero considerando una restricción de participación ex-ante en vez de una interim.

En este caso, es conveniente expresar la transferencia esperada como

$$\Psi_i(\theta_i; F) = \theta_i Q_i(\theta_i; F) - V_i(\theta_i; F) \tag{19}$$

para luego reemplazarla en la función objetivo del comprador, obteniendo

$$\int \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i(\theta) d\beta(\theta) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{F \in \mathcal{F}} \int V_i(\theta_i; F) dF(\theta) \tag{20}$$

Supongamos que es posible hacer $\int V_i(\theta_i; F) f(\theta_i) d\theta_i = 0, \; \forall F \in \mathcal{F}$ de forma simultánea.

Como el problema es lineal, la solución es entonces usar la asignación eficiente, es decir, asignar al comprador con la valoración más alta. Esto es

$$x_i(\theta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \theta_i > \max_{j \neq i} \theta_j \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{21}$$

Consideremos una regla de transferencias que implementa esta asignación, por ejemplo, la subasta de segundo precio sin precio de reserva

$$\psi_i(\theta) = \begin{cases} \max_{j \neq i} \theta_j & \textit{si } \theta_i > \max_{j \neq i} \theta_j \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{22}$$

Es fácil ver que este mecanismo es compatible en incentivos y además satisface participación[2].

La utilidad esperada del comprador con este mecanismo antes de conocer su valoración cuando la distribución es F es

$$\int F(\theta_i)^{n-1}(1 - F(\theta_i)) d\theta_i \tag{23}$$

Necesitamos encontrar transferencias que, en esperanza, logren extraer estas rentas.

Así, buscamos una solución al sistema definido por

$$\int B_i(\theta_{-i}) dF^{n-1}(\theta_{-i}) = \int F(\theta_i)^{n-1}(1 - F(\theta_i)) d\theta_i, \; \forall F \in \mathcal{F} \tag{24}$$

Asumamos que este sistema tiene solución, lo que nos permite establecer lo siguiente.

Proposición 2. *Si el sistema definido por (24) tiene solución, entonces el mecanismo $(x, \psi + B)$ con x definido en (21) y ψ definido en (22) es compatible en incentivos y extrae todas las rentas esperadas.*

Demostración. Para la compatibilidad de incentivos, basta ver que B_i no depende de θ_i, luego no altera incentivos. Como (x, ψ) es compatible en incentivos, entonces $(x, \psi + B)$ tambien lo es. La extracción de rentas es directa de la construcción del sistema. □

[2] Revisar por ejemplo Krishna [8].

3.3.1. Ejemplo

Consideremos el mismo ejemplo del caso anterior.

En el caso de que F sea conocida, con transferencias

$$\psi_i(\theta) = \begin{cases} \theta_j + E^F & si\ \theta_i > \theta_j \\ E^F & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde $E^F = \int F(\theta_i)(1 - F(\theta_i))d\theta_i$, es posible extraer todas las rentas informacionales de los compradores.

Para este caso particular, $E^{F_1} = \frac{1}{6}$ y $E^{F_2} = \frac{19}{120}$.

Esto se puede interpretar como una subasta con "boleto de entrada", en que el vendedor cobra una entrada a los compradores antes de que vean el objeto y obtengan sus valoraciones, para luego realizar una subasta a segundo precio sin precio de reserva.

Esto pues mientras más utilidad reciban los compradores, mayor es lo que se puede extraer con el boleto de entrada. Por lo tanto en este caso los incentivos de la busqueda de ganancias están alineados con los de la eficiencia.

Cuando F es deconocida, ya no es posible extraer las rentas informacionales esperadas de los compradores con un cobro fijo, pues para cada distribución las rentas informacionales esperadas de la subasta a segundo precio son distintas.

Esto hace necesario introducir una "apuesta" que esté correlacionada con la verdadera distribución y que permita extraer las rentas informacionales esperadas de forma simultánea, aunque solo en esperanza.

En este caso, lo que buscamos es una función $B_i(\theta_j)$ tal que

$$\int B_i(\theta_j)dF_1(\theta_j) = \frac{1}{6}$$

$$\int B_i(\theta_j)dF_2(\theta_j) = \frac{19}{120}$$

Una forma de lograrlo es

$$B_i(\theta_j) = \begin{cases} 2/15 & si\ \theta_j > \frac{1}{2} \\ 1/5 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Así, con transferencias

$$\psi_i(\theta) = \begin{cases} \theta_j + B_i(\theta_j) & si\ \theta_i > \theta_j \\ B_i(\theta_j) & en\ otro\ caso \end{cases}$$

junto a la regla de asignación eficiente (asignar al comprador con mayor valoración) se logra extraer todas las rentas esperadas de los compradores y, por tanto, alcanzar la maxima recaudación posible en este ambiente.

3.3.2. Existencia de solución al sistema

Tal como Rahman [12] demuestra en un contexto extracción de rentas en espacios continuos, que bajo la condición de *independencia convexa fuerte* es posible encontrar una solución a un sistema como el definido en (24).[3]

Definición 8 (Independencia convexa)**.** *Decimos que una famila de distribuciones $\mathcal{P}$ satisface independencia convexa si, para cualquier $p \in \mathcal{P}$*

$$p \notin conv\{\hat{p} \in \mathcal{P} : \hat{p} \neq p\}$$

Decimos que $\mathcal{P}$ satisface independencia convexa fuerte si es finita y satisface independencia convexa.

[3]Rahman estudia valoraciones potencialmente correlacionadas usando tipos para describir valoraciones y creencias. Si reinterpretamos estos tipos como distribuciones, podemos aplicarlo a nuestro ambiente.

Es decir, si p no es una combinación lineal de las otras distribuciones de la familia.

Considermos la familia generada por las distribuciones del perfil de valoraciones que excluye al comprador i

$$\mathcal{F}^{n-1} = \{F^{n-1} \in \Delta([0,1]^{n-1}) : F \in \mathcal{F}\}$$

Dado que $\mathcal{F}$ es finito, $\mathcal{F}^{n-1}$ tambien lo es.

En lo que sigue supondremos que $\mathcal{F}^{n-1}$ satisface independencia convexa. Esta condición es necesaria para lograr que el sistema definido en (24) tenga solución. Solo para entender la razón detras de esta condición, supongamos, por un momento, que el perfil de valoraciones factibles para los otros compradores es finito. Entonces el sistema se puede escribir de forma matricial como

$$Ab = c$$

donde c es un vector que contiene la utilidad de los compradores con la subasta de segundo precio sin precio de reserva. b correspoden a las apuestas con las que queremos extraer las rentas de los compradores. A es simplemente la matriz de probabilidades que surge de las distribuciones.

Para que este sistema tenga solución necesitamos que A sea invertible. Para ello se requiere una condición de independencia en la matriz de probabilidades. Análogamente, para el caso continuo necesitamos que el sistema definido en (24) tenga solución. Si las distribuciones son combinaciones de la otras distribuciones del conjunto, las ecuaciones del sistema serían ahora combinaciones lineales de otras ecuaciones, lo que puede ser inviable encontrar una solución al sistema. Para más detalles revisar el trabajo de Rahman [12].

4. Modelo de dos periodos

Consideremos ahora una subasta secuencial para estudiar el uso de la información en un contexto dinámico en que compradores son estratégicos, es decir, que consideran los efectos de las decisiones que toman hoy en el futuro.

Hay un conjunto I de n compradores neutrales al riesgo que viven dos periodos. En cada periodo extraen de forma independiente una valoración $\theta_i^t \in [0,1]$ de una distribución F.

Asumimos que F tiene una densidad f estrictamente positiva y que es de conocimiento común entre los compradores.

Denotaremos por $\theta^t = (\theta_1^t, ..., \theta_n^t)$ al perfil de valoraciones del periodo t y a su distribución por $f^n(\theta^t) = \prod_{i=1}^n f(\theta_i^t)$.

De forma análoga al caso de un periodo, denotaremos por θ_{-i}^t al perfil que excluye a i y por $f^{n-1}(\theta_{-i}^t)$ a su distribución.

No hay descuento, por lo que la utilidad del comprador i para asignaciones x_i^1 y x_i^2 cada periodo, y transferencias ψ_i^1 y ψ_i^2 es

$$\theta_i^1 x_i^1 - \psi_i^1 + \theta_i^2 x_i^2 - \psi_i^2$$

La información de las valoraciones se revela de forma dinámica. En el primer periodo, la infomación privada del comprador i está dada por (θ_i^1, F), mientras que en el segundo periodo está dada por $(\theta_i^1, \theta_i^2, F)$. Es decir, en el primer periodo el comprador aún no conoce su valoración para el segundo periodo.

Dado que en este caso tambien nos centraremos en la búsqueda de un mecanismo directo reducido, nos limitaremos a definir solo este tipo de mecanismo.

Definición 9 (Mecanismo de dos periodos). *Un mecanismo directo reducido esta dado por* $\mathcal{M} = (x^1, x^2, \psi^1, \psi^2)$ *tal que*

$$x^1 : [0,1]^n \to X$$

$$x^2 : [0,1]^n \times [0,1]^n \to X$$
$$\psi^1 : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\psi^2 : [0,1]^n \times [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$$

con $X = \left\{(x_1^t, ..., x_n^t) \in \{0,1\}^n | \sum_{i=1}^n x_i^t \leq 1\right\}$

Asumimos que el vendedor puede comprometerse en el primer periodo a un mecanismo para los dos periodos y, además, que los reportes son públicos.

La secuencia del modelo es la siguiente

- Vendedor se compromete al mecanismo de dos periodos
- Naturaleza escoge F y se las revela a los compradores
- Compradores extraen sus valoraciones de forma independiente de F
- Compradores reportan publicamente
- Mecanismo resuelve asignaciones y transferencias del primer periodo usando los reportes
- Compradores extraen valoraciones del segundo periodo
- Compradores reportan
- Mecanismo resuelve asignaciones y transferencias del segundo periodo con los reportes de ambos periodos

Como es usual en el análisis de un juego dinámico, comencemos analizando qué sucede en el segundo periodo.

Definimos las probabilidades condicionales de recibir el objeto y las transferencias esperadas en cada periodo para cada distribución $F \in \mathcal{F}$ como

$$Q_i^1(\theta_i^1; F) = \int x_i^1(\theta^1) f^{n-1}(\theta_{-i}^1) d\theta_{-i}^1 \tag{25}$$

$$Q_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F) = \int x_i^2(\theta^1, \theta^2) f^{n-1}(\theta_{-i}^2) d\theta_{-i}^2 \tag{26}$$

$$\Psi_i^1(\theta_i^1; F) = \int \psi_i^1(\theta^1) f^{n-1}(\theta_{-i}^1) d\theta_{-i}^1 \tag{27}$$

$$\Psi_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F) = \int \psi_i^2(\theta^1, \theta^2) f^{n-1}(\theta_{-i}^2) d\theta_{-i}^2 \tag{28}$$

La utilidad esperada del comprador en el periodo 2 si el reporte del primer periodo fue θ^1, su valoración es θ_i^2, su reporte $\hat{\theta}_i^2$ y la verdadera distribución es F cuando todos los demás compradores revelan su verdadera valoración, es

$$U_i^2(\theta^1, \theta_i^2, \hat{\theta}_i^2; F) = \theta_i^2 Q_i^2(\theta^1, \hat{\theta}_i^2; F) - \Psi_i^2(\theta^1, \hat{\theta}_i^2; F) \tag{29}$$

Definimos la utilidad de revelar su verdadera valoración en el segundo periodo como

$$V_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F) = U_i^2(\theta^1, \theta_i^2, \theta_i^2; F) \tag{30}$$

Notemos que la utilidad del periodo 2 no depende del verdadero perfil de valoraciones del primer periodo, sino solo del reporte. Esto se debe a dos razones. Primero, a que la distribución y la utilidad del periodo 2 no dependen directamente de estos valores, pues las valoraciones son independientes entre periodos. La segunda razón es que el vendedor solo puede condicionar en los reportes, pues no tiene acceso a las verdaderas valoraciones.

Definición 10 ($CI2$)**.** *Decimos que el mecanismo satisface $CI2$ si*

$$V_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F) \geq U_i^2(\theta^1, \theta_i^2, \hat{\theta}_i^2; F) \tag{31}$$

para cualquier $\theta^1 \in [0,1]^n$, $\theta_i^2, \hat{\theta}_i^2 \in [0,1]$ y $F \in \mathcal{F}$.

Condicional en que se cumpla $CI2$, es decir, que el mecanismo sea compatible en incentivos en el segundo periodo, la utilidad en el primer periodo del comprador i, cuando su valoración es θ_i^1, reporta $\hat{\theta}_i^1$, la distribución es F y todos los demás compradores revelan su verdadera valoración es

$$\begin{aligned} U_i(\theta_i^1, \hat{\theta}_i^1; F) = \theta_i^1 Q_i^1(\hat{\theta}_i^1; F) - \Psi_i(\hat{\theta}_i^1; F) \\ + \int V_i^2(\hat{\theta}_i^1, \theta_{-i}^1, \theta_i^2; F) f(\theta_i^2) d\theta_i^2 \, f^{n-1}(\theta_{-i}^1) d\theta_{-i}^1 \end{aligned} \tag{32}$$

Definimos la utilidad de revelar su verdadera valoración en el primer periodo como

$$V_i(\theta_i^1; F) = U_i(\theta_i^1, \theta_i^1; F) \tag{33}$$

Definición 11 ($CI1$)**.** *Decimos que el mecanismo satisface $CI1$ si*

$$V_i(\theta_i^1; F) \geq U_i(\theta_i^1, \hat{\theta}_i^1; F) \tag{34}$$

para cualquier $\theta_i^1, \hat{\theta}_i^1 \in [0,1]$ y $F \in \mathcal{F}$.

Definición 12 (Compatibilidad de incentivos)**.** *Decimos que el mecanismo es compatible en incentivos si satisface $CI1$ y $CI2$.*

Es decir, el mecanismo será compatible en incenvios solo si lo es para ambos periodos.

Al igual que para el modelo de un periodo, a continuación estableceremos una condición equivalenta a la compatibilidad de incentivos en este contexto.

Lema 4. *El mecanismo es compatible en incentivos si y solo si*

- $\forall F \in \mathcal{F}$, $\forall \theta_i^1 \in [0,1]$
  1. $Q_i^1(\theta_i^1; F)$ *es creciente en* θ_i^1
  2. $V_i(\theta_i^1; F) = V_i(0; F) + \int_0^{\theta_i^1} Q_i^1(s; F) ds$
- $\forall F \in \mathcal{F}$, $\forall \theta^1 \in [0,1]^n$, $\forall \theta_i^2 \in [0,1]$
  1. $Q_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F)$ *es creciente en* θ_i^2 *y*
  2. $V_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F) = V_i^2(\theta_i^1, 0; F) + \int_0^{\theta_i^2} Q_i^2(\theta^1, s; F) ds$

Este resultado puede derivarse de Pavan et al. [11] para cada F.

Usando el lema anterior, es fácil ver que las transferencias esperadas en cada periodo deben satisfacer

$$\Psi_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F) = \theta_i^2 Q_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F) - \int_0^{\theta_i^2} Q_i^2(\theta^1, s; F) ds - V_i^2(\theta^1, 0; F) \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \Psi_i^1(\theta_i^1; F) = \theta_i^1 Q_i(\theta_i^1; F) - \int_0^{\theta_i^1} Q_i(s; F) ds - V_i(0; F) \\ + \int V_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F) f(\theta_i^2) d\theta_i^2 f^{n-1}(\theta_{-i}^1) d\theta_{-i}^1 \end{aligned} \tag{36}$$

Al igual que en el modelo de un periodo, suponemos que el vendedor desconoce la distribución de valoraciones y sabe que esta en una familia $\mathcal{F}$, sobre la cual tiene creencias definidas por $\mu \in \Delta(\mathcal{F})$. De esta manera, sus creencias ex-ante en el primer periodo sobre el perfil de valoraciones están dadas por

$$\beta(\theta) = \sum_{F \in \mathcal{F}} f^n(\theta^1) f^n(\theta^2) \tag{37}$$

Como suponemos que el vendedor puede comprometerse en el primer periodo a un mecanismo para los dos periodos, su función objetivo es

$$\int \sum_{i=1}^{n} \left(\psi_i^1(\theta^1) + \psi_i^2(\theta^1, \theta^2) \right) d\beta(\theta^1, \theta^2) \tag{38}$$

y lo que busca es un mecanismo $\mathcal{M}$ compatible en incentivos que satisfaga una restricción de participación y maximice la expresión anterior.

Consideraremos una restricción de participación interim solo para el primer periodo. No incorporar una restricción de este tipo para el segundo periodo es sin pérdida de generalidad, como se discute en Pavan et al. [11].

Sin embargo, esta formulación deja fuera del análisis la posibilidad de que un comprador decida no participar de la primera subasta y entrar directamente a la segunda, es decir, prohibimos la entrada de nuevos compradores para el segundo periodo.

Al igual que para el caso de un periodo, este problema puede ser reescrito para que dependa solo de las asignaciones .

Lema 5. *El problema del vendedor se puede reescribir como*

$$\text{máx} \int \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(\theta^1) x_i^1(\theta^1) d\beta(\theta^1) + \int \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i^2(\theta^1, \theta^2) d\beta(\theta^1, \theta^2) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) V_i(0; F) \tag{39}$$

sujeto a

$$\begin{gathered} Q_i^1(\theta_i^1; F),\ \textit{creciente en } \theta_i^1,\ \forall \theta_i^1 \in [0,1], F \in \mathcal{F} \\ Q_i^2(\theta^1, \theta_i^2; F)\ \textit{creciente en } \theta_i^2\ \forall \theta^1 \in [0,1]^n, \theta_i^2 \in [0,1], F \in \mathcal{F} \\ V_i(0; F) \geq 0\ \forall F \in \mathcal{F} \end{gathered}$$

Demostración. En el apéndice □

La solución a este problema será establecido en dos partes siguiendo lo planteado para el mecanismo ex-ante de la sección anterior. Primero, propondremos un mecanismo compatible en incentivos y que satisface participación. Luego, modificaremos las transferencias para extraer las rentas de los compradores.

La primera parte se establece a continuación.

Proposición 3. *Bajo regularidad y concavidad, el mecanismo*

$$x_i^1(\theta^1) = \begin{cases} 1 & \textit{si } (\theta_i^1 > \text{máx}_{j \neq i} \theta_j^1) \wedge (\theta_i^1 > r_i(\theta_{-i}^1)) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{40}$$

$$\psi_i^1(\theta^1) = \begin{cases} \text{máx}_{j \neq i} \theta_j^1 & \textit{si } \theta_i^1 > \text{máx}_{j \neq i} \theta_j^1 > r_i(\theta_{-i}^1) \\ r_i(\theta_{-i}^1) & \textit{si } \theta_i^1 > r_i(\theta_{-i}^1) > \text{máx}_{j \neq i} \theta_j^1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{41}$$

$$x_i^2(\theta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \theta_i^2 > \text{máx}_{j \neq i} \theta_j^2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{42}$$

$$\psi_i^2(\theta) = \begin{cases} \text{máx}_{j \neq i} \theta_j^2 & \textit{si } \theta_i^2 > \text{máx}_{j \neq i} \theta_j^2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{43}$$

satisface compatibilidad de incentivos y participación.

Demostración. Basta ver que las asignaciones y transferencias del primer periodo son identicas a las definidas en la proposición 1, de donde sabemos que satisfacen participación y compatibilidad de incentivos si se cumplen las condiciones de regularidad y concavidad.

Las asignaciones y transferencias del segundo periodo corresponden a la subasta de segundo precio, por tanto, son compatibles en incentivos y satisfacen participación. □

Las asignaciones y transferencias del primer periodo vienen dadas por la solución del problema de un periodo cuando la participación es interim. Esto se debe a que, nuevamente, una parte de la recaudación del vendedor se puede escribir como la suma de las valoraciones virtuales promedio y a que la asignación del primer periodo no influye en el resultado del segundo periodo, de manera que el problema es separable. Si en cambio, la distribución para el segundo periodo dependiera de la asignación del primero esto ya no sería cierto.

Para el segundo periodo, lo óptimo es usar una subasta sin precio de reserva. Como veremos, esto se debe a que desde la perspectiva del primer periodo es como si la subasta del segundo periodo tuviera que satisfacer una restricción de participación ex-ante, pues al decidir participar en el mecanismo el comprador desconoce su valoración para el segundo periodo.

Para la segunda parte, teniendo como antecedente el resultado de la subasta con participación ex-ante, consideremos la siguiente función $B_i(\theta^1_{-i}, \theta^2_{-i})$ tal que

$$\int B_i(\theta^1_{-i}, \theta^2_{-i}) f^{n-1}(\theta^1_{-i}) f^{n-1}(\theta^2_{-i}) d\theta^1_{-i}\, d\theta^2_{-i} = \int F(\theta^2_i)^{n-1}(1 - F(\theta^2_i) d\theta^2_i,\ \forall F \in \mathcal{F} \tag{44}$$

Éste sistema es análogo al de la apuesta que buscabamos en el mecanismo ex-ante. La diferencia es que ahora se condiciona en las valoraciones de los otros compradores para ambos periodos.

Proposición 4. *Si el sistema definido en (44) tiene solución, el mecanismo óptimo está dado por* $(x^1, x^2, \psi^1, \psi^2 + B)$*, con* x^1, x^2, ψ^1, ψ^2 *definidos en la Proposición 3.*

Demostración. De la Proposición 3, sabemos que el mecanismos $\tilde{\mathcal{M}} = (x^1, x^2, \psi^1, \psi^2)$ es compatible en incentivos y satisface participación.

Veamos que $B_i(\theta^1_{-i}, \theta^2_{-i})$ no depende de las valoraciones del compradores i y, por lo tanto, no alteran incentivos. Luego, $(x^1, x^2, \psi^1, \psi^2 + B)$ es compatible en incentivos.

Definimos la utilidad del comprador i en el primer periodo bajo el mecanismo $\tilde{\mathcal{M}}$ como

$$\tilde{V}_i(\theta^1_i; F) = \int \left[\theta^1_i x^1_i(\theta^1) - \int_0^{\theta^1_i} x^1_i(\theta^1)\right] f^{n-1}(\theta^1_{-i}) d\theta^1_{-i} + \int F(\theta^2_i)^{n-1}(1 - F(\theta^2_i) d\theta^2_i$$

de donde la última expresión viene la utilidad esperada del comprador i en la subasta a segundo precio sin precio de reserva.

Considerando el sistema definido en (44), para el mecanismo propuesto, la utilidad esperada del comprador i se puede escribir como

$$V_i(\theta^1_i; F) = \tilde{V}_i(\theta^1_i; F) - \int B_i(\theta^1_{-i}, \theta^2_{-i}) f^{n-1}(\theta^1_{-i}) f^{n-2}(\theta^2_{-i}) d\theta^1_{-i}\, d\theta^2_{-i} \tag{45}$$

$$= \int \theta^1_i x^1_i(\theta^1) - \int_0^{\theta^1_i} x^1_i(s, \theta^1_{-i}) ds \tag{46}$$

Ahora, esta expresión es simplemente la utilidad esperada del comprador i en el modelo de un periodo con el mecanismo definido en la Proposición 1 reemplazando el argumento por θ_i^1. Como demostramos en esa proposición, el comprador i obtiene una utilidad no negativa de este mecanismo. Por lo tanto, $V_i(\theta_i^1; F) \geq 0$ para cualquier $\theta_i \in [0,1]$ y $F \in \mathcal{F}$.

Del Lema 4, y dado que el mecanismo es compatible en incentivos, sabemos que V_i es creciente, por lo que basta verificar para la valoración más baja θ_i^1.

Veamos además que reemplazando la asignación propuesta

$$V_i(0; F) = 0, \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

Recordemos que del Lema 5, la función objetivo puede reescribirse como

$$\int \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(\theta^1) x_i^1(\theta^1) d\beta(\theta^1) + \int \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i^2(\theta^1, \theta^2) d\beta(\theta^1, \theta^2) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) \underbrace{V_i(0; F)}_{=0}$$

$$= \int \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(\theta^1) x_i^1(\theta^1) d\beta(\theta^1) + \int \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i^2(\theta^1, \theta^2) d\beta(\theta^1, \theta^2)$$

esta expresión es lineal en las asignaciones, por lo que alcanza el máximizo con las asignaciones definidas en esta proposición.

□

Vemos que el mecanismo óptimo para el modelo de dos periodos es simplemente utilizar un mecanismo estático para el primer periodo y un mecanismo ex-ante para el segundo.

Notemos, sin embargo, que para el caso de dos periodos, la implementación de la segunda parte del mecanismo tiene mayor flexibilidad que la del mecanismo ex-ante, pues es posible condicionar tambien en las valoraciones del primer periodo de los otros compradores. Esto permite acomodar las transferencias para, por ejemplo, satisfacer restricciones de participación ex-post por periodo, es decir, implementar el mecanismo aún cuando se les permite la salida a los compradores luego de revelar las valoraciones de todos los compradores en cada periodo.

4.1. Ejemplo

El mecanismo óptimo puede implementarse exactamente con las mismas transferencias encontradas en los ejemplos anteriores. Esto se debe a que, visto desde el primer periodo, el ambiente involucra dos subastas: una en el primer periodo con una restricción interim, es decir, en que los compradores conocen su propia valoración; y una con restricción ex-ante, en que los compradores no conocen su valoración.

Es decir, la solución viene dada por usar un precio de reserva definido por

$$r_i(\theta_j^2) = \frac{\sqrt{28(\theta_j^2)^2 + 68(\theta_j^2) + 43} - 2\theta_j^2 - 5}{6\theta_j^2 + 3} \in \left[\frac{\sqrt{43} - 5}{3}, \frac{\sqrt{139} - 7}{9}\right] \approx [0{,}5191, 0{,}5322]$$

para el primer periodo. La asignación del primer periodo, por tanto, viene dada por

$$x_i^1(\theta^1) = \begin{cases} 1 & si\ \theta 1_i > \max\{\theta_j^1, r_i(\theta_j^1)\} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para el segundo periodo, lo óptimo es usar un mecanismo sin precio de reserva, de manera que la asignación es

$$x_i^2(\theta^1, \theta^2) = \begin{cases} 1 & si\ \theta_i^2 > \theta_j^2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Como vimos en el mecanismo ex-ante, es necesario incluir una apuesta junto a las transferencias de la subasta a segundo precio que se utiliza en el segundo periodo para extraer las rentas informacionales de los compradores en este periodo, es decir, las rentas esperadas de una subasta para la cual no conocen aún su valoración. Una apuesta posible es la encontrada en el ejemplo anterior.

$$B_i(\theta_j^1, \theta_j^2) = \begin{cases} 2/15 & si\ \theta_j^2 > \frac{1}{2} \\ 1/5 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

con lo que las transferencias para cada periodo quedan determinadas por

$$\psi_i^1(\theta^1) = \begin{cases} \text{máx}\{\theta_j^1, r_i(\theta_j^1)\} & si\ \theta_i^1 > \text{máx}\{\theta_j^1, r_i(\theta_j^1)\} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\psi_i^2(\theta^1, \theta^2) = \begin{cases} \theta_j + 2/15 & si\ (\theta_i^2 > \theta_j^2) \wedge (\theta_j^2 > 1/2) \\ \theta_j + 1/5 & si\ (\theta_i^2 > \theta_j^2) \wedge (\theta_j^2 < 1/2) \\ 2/15 & si\ (\theta_i^2 < \theta_j^2) \wedge (\theta_j^2 > 1/2) \\ 1/5 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

En este caso podemos interpretar nuevamente las transferencias como el cobro de un "boleto de entrada" para poder participar de las subastas, incorporando una devolución dependiendo del reporte de la competencia en el segundo periodo. Así, se cobra un boleto de entrada de 1/5 y se realiza una devolución de 1/15 si la valoración del otro comprador es inferior a 1/2.

Notemos que, al igual que en el caso del mecanismo ex-ante, esta implementación no es la única posible, sino que existen más apuestas que logran alcanzar el mismo objetivo. Sin embargo ahora existen aún más apuestas factibles, pues se pueden incorporar las realizaciones de valoraciones de los otros compradores tanto para el primer como para el segundo periodo ya que ambas son desconocidas para el comprador i en un principio y están fuera de su control.

5. Conclusiones

En este trabajo estudiamos qué sucede en una subasta cuando el vendedor tiene incertidumbre acerca de la distribución de valoraciones de los compradores. Usando un enfoque de diseño de mecanismo, encontramos que el mecanismo óptimo cuando el espacio de mensajes coincide con el de valoraciones en una subasta de un periodo es una extensión del mecanismo de Myerson [10] e implica asignar de acuerdo a la valoración virtual promedio, la cual incorpora la información de las valoraciones de los otros compradores. Esto implica fijar un precio de reserva condicional para cada comprador, el cual depende de los reportes de los otros compradores.

Se estudió tambien como puede explotarse la correlación en las distribuciones para extraer las rentas esperadas de los compradores con la restricción de participación es ex-ante. Este resultado sigue la linea de Fu et al. [5] quienes, a través del uso de muestreo, logran extraer todas las rentas esperadas de los compradores aún sin conocer la distribución de la que extraen sus valoraciones. Ambos mecanismos guardan similitudes e implican el uso de la información correlacionada de los compradores junto al uso de un mecanismo ex-ante para lograr su objetivo.

Usando los resultados de estas subastas, estudiamos que sucede en una subasta de dos periodos, en que cada comprador extrae una nueva valoración cada periodo. En este caso el mecanismo óptimo implica usar el precio de reserva condicional el primer periodo pero no usar un precio de reserva el segundo periodo, e incorporar transferencias que logren extrar las rentas informacionales esperadas del segundo periodo explotando la información correlacionada de las distribuciones y el hecho de que los compradores no conocen su valoración para el segundo periodo.

Aunque el uso de toda la información revelada en la subasta es imposible pues viola la compatibilidad de incentivos, los distintos modelos estudiados muestran que parte importante de esta información aún puede ser usada para aumentar las ganancias. Esto nos puede ayudar a entender porque en algunas subastas vemos resultados más discrecionales que en otras, con una justificación a la confiabilidad de la información disponible para el vendedor.

Dos comentarios finales sobre ambientes similares para el caso de dos periodos.

Primero, si los compradores viven solo un periodo, entonces el mecanismo óptimo a implementar cada periodo es el mecanismo estático usando las creencias actualizadas. Es decir, en cada periodo se ocupa toda la información pasada para determinar el precio de reserva, pero solo parte de la información del periodo actual. En este contexto el cobro de "boletos de entrada" ya no es posible, pues los compradores solo viven un periodo y no aceptan un contrato de "largo plazo" (dos periodos). La ventaja es que tampoco consideran los incentivos dinámicos de la información por lo que toda la información pasada puede ser utilizada en la implementación del mecanismo en cada periodo.

Segundo, si el vendedor no puede comprometerse al mecanismo de dos periodos, entonces la comunicación falla y no es posible implementar un mecanismo que involucre revelación completa en el primer periodo. Esto ya que cuando no hay compromiso, en el segundo periodo siempre se utilizará toda la información pasada, lo que no es compatible con la compatibilidad de incentivos del primer periodo. El mecanismo, entonces, implica usar menos información el segundo periodo, lo que sin compromiso solo es posible acotando el espacio de mensajes que se puede usar en el primer periodo.

Explorar de forma más exhaustiva el uso de esta información con mecanismos más generales así como su implementabilidad en la realidad son tareas pendientes a abordar en futuros estudios.

Apéndice

Demostración del Lema 1. La compatibilidad de incentivos requiere que para cualquier $\theta_i, \hat{\theta}_i \in [0,1]$ y $F \in \mathcal{F}$

$$\theta_i Q_i(\theta_i; F) - \Psi_i(\theta_i; F) \geq \theta_i Q_i(\hat{\theta}_i; F) - \Psi_i(\hat{\theta}_i; F)$$

lo que es equivalente a

$$\theta_i \left(Q_i(\theta_i; F) - Q_i(\hat{\theta}_i; F) \right) \geq \Psi_i(\theta_i; F) - \Psi_i(\hat{\theta}_i; F)$$

y alternando los lugares de θ_i y $\hat{\theta}_i$ podemos llegar a

$$\Psi_i(\theta_i; F) - \Psi_i(\hat{\theta}_i; F) \geq \hat{\theta}_i \left(Q_i(\theta_i; F) - Q_i(\hat{\theta}_i; F) \right)$$

Combinando ambas expresiones

$$\theta_i \left(Q_i(\theta_i; F) - Q_i(\hat{\theta}_i; F) \right) \geq \hat{\theta}_i \left(Q_i(\theta_i; F) - Q_i(\hat{\theta}_i; F) \right)$$

$$(\theta_i - \hat{\theta}_i) \left(Q_i(\theta_i; F) - Q_i(\hat{\theta}_i; F) \right) \geq 0$$

lo que se cumple solo si $Q_i(\cdot; F)$ es creciente.

Una forma alternativa de expresar la compatibilidad de incentivos es

$$V_i(\theta_i; F) \geq V_i(\hat{\theta}_i; F) + (\theta_i - \hat{\theta}_i) Q_i(\hat{\theta}_i; F)$$

y alternando lugares

$$V_i(\hat{\theta}_i; F) \geq V_i(\theta_i; F) - (\theta_i - \hat{\theta}_i)Q_i(\theta_i; F)$$

de donde

$$(\hat{\theta}_i - \theta_i)Q_i(\hat{\theta}_i; F) \geq V_i(\hat{\theta}_i; F) - V_i(\theta_i; F) \geq (\hat{\theta}_i - \theta_i)Q_i(\theta_i; F)$$

equivalentemente

$$Q_i(\hat{\theta}_i; F) \geq \frac{V_i(\hat{\theta}_i; F) - V_i(\theta_i; F)}{(\hat{\theta}_i - \theta_i)} \geq Q_i(\theta_i; F)$$

cuando $\hat{\theta}_i \to \theta_i$,

$$\frac{\partial V_i(\theta_i; F)}{\partial \theta_i} = Q_i(\theta_i; F)$$

y aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$V_i(\theta_i; F) = V_i(0; F) + \int_0^{\theta_i} Q_i(s; F)ds$$

$$\begin{aligned} U_i(\theta_i, \hat{\theta}_i; F) &= V_i(\hat{\theta}_i; F) + (\theta_i - \hat{\theta}_i)Q_i(\hat{\theta}_i; F) \\ &= V_i(0; F) + \int_0^{\hat{\theta}_i} Q_i(s; F)ds + (\theta_i - \hat{\theta}_i)Q_i(\hat{\theta}_i; F) \end{aligned}$$

como $Q_i(\cdot; F)$, es creciente

$$\int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} Q_i(s; F)ds \geq \int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} Q_i(\hat{\theta}_i; F)ds$$

por lo tanto,

$$U_i(\theta_i, \hat{\theta}_i; F) \leq V_i(0; F) + \int_0^{\hat{\theta}_i} Q_i(s; F)ds + \int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} Q_i(s; F)ds = V_i(\theta_i; F)$$

□

Demostración del Lema 2. Reemplazando la definición de las creencias del vendedor en su función objetivo

$$\begin{aligned} \int \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\theta) \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) f^n(\theta) d\theta &= \sum_{i=1}^{n} \int \psi_i(\theta) \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) f^n(\theta) d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) \int \psi_i(\theta) f^n(\theta) d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) \int \Psi_i(\theta_i; F) f(\theta_i) d\theta_i \end{aligned}$$

reemplazando (7),

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) \int \left(\theta_i Q_i(\theta_i; F) - \int_0^{\theta_i} Q_i(s; F)ds - V_i(0; F) \right) f(\theta_i) d\theta_i$$

Cambiando el orden de integración del segundo término

$$\begin{aligned}\int\int_0^{\theta_i} Q_i(s;F)f(\theta_i)ds\,d\theta_i &= \int\int_s^1 Q_i(s;F)f(\theta_i)d\theta_i\,ds\\ &= \int Q_i(\theta_i;F)(1-F(\theta_i))d\theta_i\\ &= \int Q_i(\theta_i;F)\left(\frac{1-F(\theta_i)}{f(\theta_i)}\right)f(\theta_i)d\theta_i\end{aligned}$$

Reemplazando, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)\int\left[\left(\theta_i-\frac{1-F(\theta_i)}{f(\theta_i)}\right)Q_i(\theta_i;F)-V_i(0;F)\right]f(\theta_i)d\theta_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)\int\left(\theta_i-\frac{1-F(\theta_i)}{f(\theta_i)}\right)x_i(\theta)f(\theta_i)d\theta_i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)V_i(0;F)$$

$$=\int\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)\left(\theta_i-\frac{1-F(\theta_i)}{f(\theta_i)}\right)x_i(\theta)f^n(\theta)d\theta-\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)V_i(0;F)$$

$$=\int\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\frac{\mu(F)f^n(\theta)}{\sum_{G\in\mathcal{F}}\mu(G)g^n(\theta)}\left(\theta_i-\frac{1-F(\theta_i)}{f(\theta_i)}\right)x_i(\theta)\left(\sum_{G\in\mathcal{F}}\mu(G)g^n(\theta)\right)d\theta-\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)V_i(0;F)$$

$$=\int\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\zeta_i(\theta)x_i(\theta)d\beta(\theta)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)V_i(0;F)$$

Del Lema 1 además, $V_i(\theta_i;F)$ es creciente pues $\frac{\partial V_i(\theta_i;F)}{\partial\theta_i}=X_i(\theta_i;F)\geq 0$. Por lo tanto basta verificar la restricción de participación solo para valoración más baja, es decir, $\theta_i=0$.

$\square$

Demostración del Lema 4. La prueba sigue la línea de Myerson [10] y Pavan et al. [11] fijando F para este caso particular.

Para un reporte del primer periodo θ^1 fijo, el problema del segundo periodo es idéntico al problema de un periodo. Por lo tanto, la demostración sigue de la demostración del Lema 1 considerando las valoraciones del segundo periodo θ_i^2.

Para el primer periodo, la compatibilidad de incentivos requiere que

$$\theta_i^1Q_i^1(\theta_i^1;F)-\Psi_i^1(\theta_i^1;F)+\mathbb{E}(V_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F))\geq\theta_i^1Q_i^1(\hat\theta_i^1;F)-\Psi_i^1(\hat\theta_i^1;F)+\mathbb{E}(V_i^2(\hat\theta_i^1,\theta_{-i}^1,\theta_i^2;F))$$

Reordenando los términos

$$\theta_i^1(Q_i^1(\theta_i;F)-Q_i^1(\hat\theta_i^1;F))\geq\Psi_i^1(\theta_i^1;F)-\Psi_i^1(\hat\theta_i^1;F)+\mathbb{E}(V_i^2(\hat\theta_i^1,\theta_{-i}^1,\theta_i^2;F))-\mathbb{E}(V_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F))$$

Alternando los lugares de $\theta_i^1,\hat\theta_i^1$

$$\Psi_i^1(\theta_i^1;F)-\Psi_i^1(\hat\theta_i^1;F)+\mathbb{E}(V_i^2(\hat\theta_i^1,\theta_{-i}^1,\theta_i^2;F))-\mathbb{E}(V_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F))\geq\hat\theta_i^1(Q_i^1(\theta_i;F)-Q_i^1(\hat\theta_i^1;F))$$

de donde,

$$(\theta_i^1-\hat\theta_i^1)(Q_i^1(\theta_i;F)-Q_i^1(\hat\theta_i^1;F))\geq 0$$

Lo anterior implica que $Q_i^1(\cdot;F)$ debe ser creciente.

Para la segunda parte, una forma alternativa de escribir la compatibilidad de incentivos es

$$V_i(\theta_i;F)\geq V_i(\hat\theta_i^1;F)+(\theta_i^1-\hat\theta_i^1)Q_i^1(\hat\theta_i^1;F)$$

y alternando lugares

$$V_i(\hat{\theta}_i;F) \geq V_i(\theta_i^1;F) - (\theta_i^1 - \hat{\theta}_i^1)Q_i^1(\theta_i^1;F)$$

de donde

$$(\hat{\theta}_i^1 - \theta_i^1)Q_i^1(\hat{\theta}_i^1;F) \geq V_i(\hat{\theta}_i^1;F) - V_i(\theta_i^1;F) \geq (\hat{\theta}_i^1 - \theta_i^1)Q_i^1(\theta_i^1;F)$$

equivalentemente

$$Q_i^1(\hat{\theta}_i^1;F) \geq \frac{V_i(\hat{\theta}_i^1;F) - V_i(\theta_i^1;F)}{(\hat{\theta}_i^1 - \theta_i^1)} \geq Q_i^1(\theta_i^1;F)$$

cuando $\hat{\theta}_i^1 \to \theta_i^1$,

$$\frac{\partial V_i(\theta_i^1;F)}{\partial \theta_i^1} = Q_i^1(\theta_i^1;F)$$

y aplicando el teorema fundamental del cálculo obtenemos que

$$V_i(\theta_i^1;F) = V_i(0;F) + \int_0^{\theta_i^1} Q_i^1(s;F)ds$$

Finalmente, veamos que

$$\begin{aligned} U_i(\theta_i^1,\hat{\theta}_i^1;F) &= V_i(\hat{\theta}_i^1;F) + (\theta_i^1 - \hat{\theta}_i^1)Q_i^1(\hat{\theta}_i^1;F) \\ &= V_i(0;F) + \int_0^{\hat{\theta}_i^1} Q_i^1(s;F)ds + (\theta_i^1 - \hat{\theta}_i^1)Q_i^1(\hat{\theta}_i^1;F) \end{aligned}$$

como $Q_i^1(\cdot;F)$ es creciente,

$$\int_{\hat{\theta}_i^1}^{\theta_i^1} Q_i^1(s;F)ds \geq \int_{\hat{\theta}_i^1}^{\theta_i^1} Q_i^1(\hat{\theta}_i^1;F)ds$$

luego

$$\begin{aligned} U_i(\theta_i^1,\hat{\theta}_i^1;F) &\leq V_i(0;F) + \int_0^{\hat{\theta}_i^1} Q_i^1(s;F)ds + \int_{\hat{\theta}_i^1}^{\theta_i^1} Q_i^1(s;F)ds \\ &= V_i(0;F) + \int_0^{\theta_i^1} Q_i^1(s;F)ds = V_i(\theta_i;F) \end{aligned}$$

□

Demostración del Lema 5. De la función objetivo tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(F)\left[\int \psi_i^1(\theta^1)f^n(\theta^1)d\theta^1 + \int \psi_i^2(\theta^1,\theta^2)f^n(\theta^1,\theta^2)d(\theta^1,\theta^2)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}} \mu(F)\left[\int \Psi_i^1(\theta_i^1;F)f(\theta_i^1)d\theta_i^1 + \int \left(\int \Psi_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F)f(\theta_i^2)d\theta_i^2\right) f^n(\theta^1)d\theta^1\right]$$

Es conveniente ver que la transferencia esperada del segundo periodo se puede escribir como

$$\Psi_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F) = \theta_i^2 Q_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F) - V_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F)$$

y en esperanza

$$\int \Psi_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F)f^n(\theta^1)f(\theta_i^2)d\theta^1 d\theta_i^2 = \int \theta_i^2 Q_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F)f(\theta_i^2)f^n(\theta^1)d\theta_i^2 d\theta^1 - \int V_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F)f(\theta_i^2)d\theta_i^2 f^n(\theta^1)d\theta^1$$

aplicando esperanza a la transferencia esperada del primer periodo

$$\int \Psi_i^1(\theta_i^1;F)f(\theta_i^1)d\theta_i^1 = \int \left(\theta_i^1 Q_i^1(\theta_i^1;F) - \int_0^{\theta_i^1} Q_i^1(s;F)ds - V_i(0;F)\right) f(\theta_i^1)d\theta_i^1 + \int V_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F)f(\theta_i^2)d\theta_i^2 f^n(\theta^1)d\theta^1$$

Veamos que el último término aparece en ambas expresiones, pero con signo contrario. Por lo tanto se eliminarán al sumar ambas expresiones.

Asi la recaudación esperada obtenida del comprador i para una distribución F se puede escribir como

$$\int \left(\theta_i^1 Q_i^1(\theta_i^1;F) - \int_0^{\theta_i^1} Q_i^1(s;F)ds - V_i(0;F)\right) f(\theta_i^1)d\theta_i^1 + \int \theta_i^2 Q_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F)f(\theta_i^2)f^n(\theta^1)d\theta_i^2 d\theta^1$$

y la función objetivo como

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)\left[\int \left(\theta_i^1 Q_i^1(\theta_i^1;F) - \int_0^{\theta_i^1} Q_i^1(s;F)ds - V_i(0;F)\right) f(\theta_i^1)d\theta_i^1\right] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}}\mu(F)\left[\int \theta_i^2 Q_i^2(\theta^1,\theta_i^2;F)f(\theta_i^2)f^n(\theta^1)d\theta_i^2 d\theta^1\right]$$

El primer término es idéntico a la recaudación estática pero para θ^1. Luego, se puede escribir como

$$\int \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(\theta^1)x_i^1(\theta^1)d\beta(\theta^1) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}} V_i(0;F)$$

De forma directa, el segundo término se puede reescribir como

$$\int \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 x_i(\theta^1,\theta^2)d\beta(\theta^1,\theta^2)$$

Finalmente, como $V_i(\theta_i^1;F)$ es creciente, basta verificar participación para $\theta_i^1 = 0$, lo que nos entrega la última condición. □

Referencias

[1] Dirk Bergemann and Stephen Morris. Robust mechanism design. *Econometrica*, 73(6):pp. 1771–1813, 2005.

[2] Tilman Börgers. *An Introduction to the Theory of Mechanism Design*. Oxford University Press, 2015.

[3] Benjamin A Brooks. Surveying and selling: Belief and surplus extraction in auctions. 2013.

[4] Jacques Cremer and Richard P McLean. Full Extraction of the Surplus in Bayesian and Dominant Strategy Auctions. *Econometrica*, 56(6):1247–57, 1988.

[5] Hu Fu, Nima Haghpanah, Jason Hartline, and Robert Kleinberg. Optimal auctions for correlated buyers with sampling. In *Proceedings of the fifteenth ACM conference on Economics and computation*, pages 23–36. ACM, 2014.

[6] William F. Samuelson John G. Riley. Optimal auctions. *The American Economic Review*, 71(3):381–392, 1981.

[7] Yash Kanoria and Hamid Nazerzadeh. Dynamic reserve prices for repeated auctions: Learning from bids. *Available at SSRN 2444495*, 2014.

[8] Vijay Krishna. *Auction Theory*. Academic Press, 2010.

[9] Vitor Farinha Luz. Surplus extraction with rich type spaces. *Journal of Economic Theory*, 148(6):2749 – 2762, 2013.

[10] Roger B. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):pp. 58–73, 1981.

[11] Alessandro Pavan, Ilya Segal, and Juuso Toikka. Dynamic mechanism design: A myersonian approach. *Econometrica*, 82(2):601–653, 2014.

[12] David Rahman. Surplus extraction on arbitrary type spaces. *Working paper*, 2013.

[13] Tim Roughgarden and Inbal Talgam-Cohen. Optimal and near-optimal mechanism design with interdependent values. In *Proceedings of the Fourteenth ACM Conference on Electronic Commerce*, EC '13, pages 767–784, New York, NY, USA, 2013. ACM.