INSTITUTO DE ECONOMÍA

TESIS de MAGÍSTER

2016

Agregar o separar: Estrategias de un monopolista bajo asimetría informacional

Matías Villagra M.

www.economia.puc.cl

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

TESIS DE GRADO
MAGISTER EN ECONOMIA

Villagra, Morales, Matías Javier

Julio, 2016

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA

Agregar o separar: estrategias de un monopolista bajo asimetría informacional

Matías Javier Villagra Morales

Comisión

Martín Besfamille
Fernando Coloma
Constanza Fosco

Santiago, julio de 2016

Agregar o separar: estrategias de un monopolista bajo asimetría informacional

Matías J. Villagra*

Julio, 2016

Resumen

Esta tesis estudia cuál es la estrategia de venta que maximiza el beneficio esperado de un monopolista que opera en un mercado en el que los consumidores comparten información sobre su tipo. Los resultados se han divido en dos partes: mercados *grandes* y *pequeños*. Cuando los mercados son grandes, se prueba que la estrategia óptima es que establezca un distribuidor y que este se encargue de proveer los bienes. Este resultado es válido para cualquier distribución continua no-negativa de creencias con tasa de riesgo creciente soportada sobre un conjunto convexo. Mientras que cuando el monopolista enfrenta mercados pequeños se presentan casos particulares y soluciones numéricas para valoraciones que distribuyen uniforme estándar y exponencial. Para ambas distribuciones se obtiene que es óptimo delegar la provisión de bienes a un distribuidor. Para mercados de tamaño arbitrario se presentan algunos resultados generales. Además, se estudian la eficiencia de asignación de los bienes, el bienestar de los agentes involucrados en el intercambio y la política de precios de cada estrategia de venta.

Abstract

This thesis explores which is the optimal sales strategy for a monopolist who supplies consumers that share information about their type. Results are divided in two parts: *big* and *small* markets. When markets are big, it is proven that monopolist's expected profit is maximized by establishing a distributor. This result holds for any continuous non-negative distribution of types with increasing hazard rate supported on a convex set. When markets are small particular cases and numerical solutions are presented for types that distribute standard uniform and exponential. For both distributions it is shown that it is optimal to establish a distributor. Some general results are presented for markets of arbitrary size. Also, efficiency of goods allocation, welfare implications and the pricing policy of each sales strategy are studied.

*He realizado esta tesis para optar al grado de Magíster en Economía del Instituto de Economía de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Estoy sumamente agradecido de mi profesor guía de tesis, Nicolás Figueroa, quien me propuso desarrollar este tema y me guió con paciencia por este proceso. Agradezco a los profesores de la Facultad de Matemáticas de la PUC, Duvan Henao y Gregorio Moreno, quienes me ayudaron a probar algunos resultados importantes; las correcciones y sugerencias de la profesora Constanza Fosco, miembro de la Comisión de Tesis de Microeconomía; Alexandra Elbakyan y sus colaboradores del proyecto *Sci-Hub*, plataforma que promueve el libre acceso al conocicimiento y fue crucial para la búsqueda de referencias e información; y a Tool, quienes me acompañaron estos meses de arduo trabajo. Todo error u omisión es de mi completa responsabilidad. Comentarios pueden ser enviados a mi correo electrónico `mjvillagra@uc.cl`.

Índice

1. Introducción

Considérese un mercado de innovación y tecnología donde el monopolista es una compañía dedicada a la I&D que acaba de fabricar un chip de última generación – con un costo marginal de replicación cercano a cero –. Este descubrimiento es un insumo para una variada clase de firmas que pertenecen a industrias tecnológicas diferentes, i.e. sus productos finales no están relacionados. Debido a la naturaleza de sus procesos productivos, es plausible suponer que el grado de conocimiento de las valoraciones entre firmas por el chip es mayor que el que tiene el desarrollador del chip de sus valoraciones. Las firmas comparten una misma necesidad productiva – necesidad que ahora puede ser satisfecha por el chip –, pero que antes era suplida por medios alternativos que es posible considerar comunes.

Dado el contexto, una pregunta natural es: ¿cuál es el esquema de venta que maximiza el beneficio del monopolista?

Gracias al Principio de Revelación, de Teoría de Diseño de Mecanismos, el conjunto de posibles esquemas de venta puede reducirse significativamente. Los mecanismos de este conjunto más acotado son conocidos como mecanismos directos.[1] Pero hay un *caveat*. Debido a que cada firma podría declarar un vector de valoraciones – conocen mutuamente sus tipos – existen mecanismos directos muy complejos que son poco robustos. Esto se debe a que tienen múltiples equilibrios. En la práctica este tipo de mecanismos no se observan y se han convertido en un *puzzle* para la teoría económica [16]. Bajo estos juegos, el soplonaje y la venta de información pertenecen al conjunto de acciones posibles de las firmas. Este trabajo no los considerará.[2]

Entonces, ¿es posible acotar aún más el conjunto de esquemas de venta que puede utilizar el monopolista? Con herramientas de Diseño de Mecanismos [11] es estándar demostrar que las estrategias de precios uniformes – *posted prices* – son óptimas. Por lo tanto, el problema del monopolista, que quiere maximizar su beneficio esperado, se reduce a decidir entre estas dos estrategias de venta:

- proveer directamente a cada una de las firmas, i.e. elegir un precio p_i y cobrárselo a cada una
- vender derechos de distribución a sólo una de ellas y que luego esta se encargue de proveer al resto, i.e. elegir un único precio P por el paquete de derechos

El *tradeoff* es el siguiente: el monopolista le puede vender a uno – llámese distribuidor – quien logrará extraer mejor las rentas del resto, pero no es claro cuánto el monopolista le puede extraer al distribuidor. Esto es precisamente lo que este trabajo pretende investigar.

La organización de este documento es la siguiente: en § 1.1 se hace una revisión de la literatura de esquemas de venta monopólicos; en § 2 se presenta formalmente el modelo y pregunta a responder junto con una aplicación a un problema de teoría de inventarios; en § 3 se prueba que los problemas están bien definidos y se presentan resultados cuando el número de consumidores es muy grande; en § 4 se abordan los problemas para dos distribuciones de probabilidad y además se presentan resultados para un número arbitrario de consumidores; y en § 5 se discuten las implicancias económicas y conclusiones. Por último, el apéndice está dividido en tres partes: en la parte A se presentan instrumentos matemáticos necesarios; mientras que en el Apéndice B se demuestran los principales resultados de este trabajo; en C se prueba la aplicación del modelo al problema de teoría de inventarios presentado en § 2; y en D se presenta una versión fuerte del Teorema 3.2.

[1] Para una introducción a la teoría de Diseño de Mecanismos, referirse a [11].

[2] Estos mecanismos complejos se caracterizan por funciones de asignación $[\underline{v}, \overline{v}]^{n^2} \to [0,1]^n$. Las que considera este trabajo son del tipo $[\underline{v}, \overline{v}]^n \to [0,1]^n$.

1.1. Literatura relacionada

El trabajo de Harris y Raviv (1981) es el punto de partida y motivación teórica de esta investigación. Estos autores fueron pioneros en derivar de manera endógena el esquema de venta óptimo – no imponen uno *a priori* – para un monopolista que enfrenta demandas estocásticas. El conjunto de esquemas factibles es bastante amplio; este incluye precio único, *priority pricing*, subastas, descuentos por cantidad, entre otros. El modelo considera un monopolista que produce un bien homogéneo a un costo marginal constante hasta una cierta capacidad y N potenciales consumidores con demandas unitarias. Además, cuenta con información asimétrica entre agentes – cada consumidor sólo conoce su propia valoración por el bien y el monopolista no conoce la valoración de ninguno –. Salvo la información privada, los consumidores son idénticos. Los autores encuentran que el esquema óptimo depende del contexto económico, en particular de la capacidad productiva. Si la demanda potencial por bienes es mayor a la producción entonces *priority pricing* y subastas son esquemas óptimos. Mientras que si la restricción de capacidad cuenta con holgura o es posible aumentarla capacidad a un costo *bajo* un esquema de venta de precio único es óptimo.

Riley y Zeckhauser (1983) elaboran un juego secuencial de dos jugadores con aprendizaje en el que un monopolista ofrece un solo bien a una serie de potenciales compradores que lo visitan en su tienda. Las estrategias de precio posibles consideradas por los autores son todas aquellas a las que el monopolista pueda comprometerse, por ejemplo, precio fijo – inflexible –, negociación, entre otras. Finalmente demuestran que la estrategia de un precio fijo es óptima, inclusive superior a las que involucran una negociación con el consumidor.

Wilson (1988) supone un monopolista que vende un bien homogéneo y demanda generada por un número fijo de consumidores que llega en orden aleatorio a comprar el bien – la demanda no es incierta –. Luego, dado un nivel fijo de producto, el problema es caracterizar la política de precios que maximiza el beneficio del monopolista. El autor prueba que la política óptima de precios nunca considera más de dos precios. Además, muestra que dado un nivel de producto, el esquema de precio único es óptimo si y sólo si la función de beneficio del monopolista bajo esta política es cóncava. Así, si la condición anterior no se cumple un esquema de ofertas introductorias es óptimo.

Spulber (1993) presenta un monopolista que enfrenta N consumidores y debe diseñar un esquema de precios maximizador de beneficio. El modelo contempla información incompleta sobre la demanda individual y agregada de los consumidores. Además, considera un costo marginal creciente – que genera interdependencia de los niveles de consumo – y demandas multi-unidad a diferencia de lo planteado por Harris y Raviv (1981). Spulber muestra que tres estrategias de precio – *reference point pricing*, *competitive bidding* y *generalized priority pricing* – determinan el mismo producto y beneficio e implementan el mecanismo maximizador de beneficio para el monopolista.

Che y Gale (2000) investigan el esquema de venta óptimo que puede llevar a cabo un monopolista que enfrenta un continuo de consumidores cuya valoración y capacidad de pago es información privada. En los trabajos anteriores, por ejemplo, en Harris y Raviv (1981), la capacidad de pago de los consumidores es siempre mayor que la valoración que tienen por el bien. Los autores muestran que la posibilidad de que un consumidor cuente con una restricción sin holgura, produce que el mecanismo óptimo de venta pueda a ser un menú de contratos en vez de un precio único.

Nocke y Peitz (2004, 2007) abordan la política de venta óptima de un monopolista que enfrenta demandas estocásticas provenientes de consumidores que pueden adquirir el bien en dos períodos – no hay descuento –. Consideran tres esquemas potencialmente óptimos para el monopolista: precio único, ventas finales o *clearance sales* y ofertas introductorias. El principal resultado de su trabajo es que el esquema de ventas finales siempre domina las ofertas introductorias. En contraste a mucha de la literatura, muestran que los precios uniformes no son necesariamente óptimos.

Moller y Watanabe (2010) consideran un modelo de dos períodos y dos estrategias de venta del monopolista: ofertas introductorias y venta finales. El monopolista enfrenta un continuo de consumidores heterogéneos que en el primer período no conocen exactamente sus demandas – ingrediente distintivo y clave del modelo – pero en el segundo esta incertidumbre es resuelta. Además los consumidores son racionados de forma aleatoria y no existe la reventa. Los autores muestran que mientras exista el riesgo de ser racionado para los consumidores, ambos esquemas constituyen estrategias de venta óptima para el monopolista bajo distintos parámetros.

Así, este trabajo considera una estrategia de venta junto con un contexto informacional no estudiados antes en la literatura de teoría del monopolio. Este nuevo modelo extiende y complementa, en cierta medida, la clase de esquemas posibles con las que cuenta un monopolista que provee un bien digital.

2. El modelo

Considere un monopolista neutral al riesgo que provee un único bien y enfrenta n consumidores dispuestos a comprar como máximo una unidad. El monopolista no conoce la valoración asignada por cada consumidor, pero sí tiene creencias independientes sobre la valoración de cada uno de ellos. Por otro lado, los consumidores tienen un grado de conocimiento perfecto entre sí – con respecto a sus valoraciones –. Además, supóngase que el monopolista no incurre en costos al producir el bien.

Las creencias del monopolista se modelan con variables aleatorias continuas no-negativas con distribución de probabilidad y densidad diferenciables en todo punto. Por lo tanto, de ahora en adelante, cada vez que se defina una variable aleatoria se supondrá que cumple lo anterior, a menos que se especifique lo contrario.

Sea V_i una variable aleatoria distribución de probabilidad F_i. Se denotará por f_i la función de densidad asociada a V_i y cuyo soporte será $[\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha_i}]$, con $0 \leq \underline{\alpha_i} < \overline{\alpha_i} \leq \infty$. Así, se dirá que V_i representa la valoración del consumidor i. Por lo tanto, el bien será comprado por el consumidor i si y sólo si la valoración por el mismo es mayor o igual que el precio, i.e. dado un precio $p \in [\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha_i}]$ si ocurre el evento $\{V_i \geq p\}$. Se puede concebir la probabilidad del evento $\{V_i \geq p\}$ como el porcentaje esperado del bien que es comprado por i. Por lo anterior, es posible representar la función de demanda de i por $1 - F_i$.

A continuación, se presentan formalmente las dos alternativas excluyentes que podría seguir el monopolista.

Proveer directamente a n consumidores

Bajo esta alternativa el beneficio esperado por proveer el bien al consumidor i está descrito por la función $\pi_{M,i} : [\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha_i}] \to \mathbb{R}$, definida por $\pi_{M,i}(p) := p\,[1 - F_i(p)]\,,\ \forall p \in [\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha_i}]$. Por lo tanto, el problema del monopolista consiste en maximizar el beneficio esperado para cada i , i.e. $\forall i \in \{1, ..., n\}$,

$$\max_{p \in [\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha_i}]} p\,[1 - F_i(p)]$$

A menos que se explicite lo contrario, los consumidores serán considerados idénticos *ex ante*, es decir el monopolista tendrá las mismas creencias sobre cada uno. Entonces, de ahora en adelante será omitido el subíndice i. Esto simplifica este problema y se traduce en una única maximización

$$n \left\{ \max_{p \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]} p\,[1 - F(p)] \right\} \tag{1}$$

Este problema será referido de ahora en adelante por **problema** A.

Vender derechos de distribución

Como los consumidores cuentan con información relevante y desconocida por el monopolista, una alternativa es que el monopolista venda los derechos para distribuir sus bienes a uno de estos n consumidores. Luego, el consumidor que se los adjudique – que será referido como distribuidor – venderá los bienes al resto y les extraerá todo su excedente – además de proveerse a sí mismo–.

El precio que elige el monopolista no es por un único bien sino por un paquete de n bienes que serán distribuidos. El monopolista podría ofrecerlos a $n\underline{\alpha}$ y de esta manera se aseguraría que sus derechos sean comprados, ya que la menor valoración posible de cada consumidor – son idénticos *ex ante* – es $\underline{\alpha}$. Luego un monopolista racional no elegirá un precio menor a este, ya que solo recaudaría menos. Mediante un razonamiento análogo, es directo notar que cobrar un precio mayor a $n\overline{\alpha}$ no tiene sentido. Por lo tanto, los posibles precios que el monopolista puede cobrar por los derechos pertenecen al intervalo $[n\underline{\alpha}, n\overline{\alpha}]$.

Ahora, sea $\tilde{V}_n := \sum_{i=1}^{n} V_i$ la variable aleatoria que representa los ingresos del distribuidor – desde el punto de vista del monopolista, ya que él no observa las valoraciones efectivas –. Es claro que para cada $p_n \in [n\underline{\alpha}, n\overline{\alpha}]$, la variable aleatoria $\tilde{V}_n - p_n$ representa el beneficio del distribuidor, dado el precio p_n fijado por el monopolista. Entonces, el evento de interés para el monopolista es cuando esta variable es no-negativa, i.e. cuando la demanda por derechos es no-negativa. Así, para cada precio $p_n \in [n\underline{\alpha}, n\overline{\alpha}]$, se puede interpretar la probabilidad del evento $\{\tilde{V}_n \geq p_n\}$ como porcentaje demandado del paquete de derechos.

Como $\tilde{V}_n$ es la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, su distribución de probabilidad se puede representar como la convolución enésima de F, i.e. $\tilde{V}_n \sim F^{n*}$. Así, $1 - F^{n*}$ es la función de demanda por el paquete de derechos. La función de beneficio esperado es $\pi_D : [n\underline{\alpha}, n\overline{\alpha}] \to \mathbb{R}$ definida por $\pi_D(p_n) := p_n\left[1 - F^{n*}(p_n)\right], \ \forall p_n \in [n\underline{\alpha}, n\overline{\alpha}]$. Así, el problema del monopolista bajo este esquema de venta está descrito por

$$\underset{p_n \in [n\underline{\alpha}, n\overline{\alpha}]}{max} \ p_n\left[1 - F^{n*}(p_n)\right] \tag{2}$$

Este problema será llamado **problema** B.

Entonces, **la pregunta** es determinar, si es posible, cuál esquema de precios y bajo qué condiciones reporta mayor beneficio al monopolista. Antes de presentar el teorema que garantiza la existencia de los máximos, i.e. que los problemas están bien definidos, se expone una aplicación de este modelo a un problema sobre decisiones de stock.

2.1. Una aplicación: el vendedor de periódicos

En Investigación de Operaciones, en particular en Teoría de Inventarios y Cadenas de Suministro – *Supply Chain* –, existe un modelo muy popular que ha sido extensamente estudiado: el problema del vendedor de periódicos – *the Newsvendor problem* –. El modelo más general contempla tres tipos de agentes: productores, vendedores y consumidores finales. El planteamiento clásico considera solo un vendedor neutral al riesgo que enfrenta una demanda estocástica. Su problema consiste en decidir de cuántas unidades del bien perecible se provee para maximizar su beneficio esperado. Las revisiones bibliográficas [10] y [21] proporcionan buenas referencias sobre las numerosas variantes y extensiones de este modelo.

Esta aplicación considera el problema de decisión del productor con contratos de precio único entre productor y vendedor – *price-only contracts* –. El planteamiento del problema que se presenta a continuación está basado en [14]. En dicho trabajo, los autores consideran solo un vendedor, mientras que en este estudio esto se extiende a un número arbitrario. De acuerdo al conocimiento de este autor, la extensión planteada a continuación no ha sido estudiada.

Considérese un monopolista neutral al riesgo, de ahora en adelante llamado "productor", que produce un único bien perecible y provee a n agentes, llamados "retailers", que luego se encargan de vender el bien a consumidores finales. El productor puede discriminar entre retailers y tiene todo el poder de negociación. Supóngase que este enfrenta dos opciones excluyentes: establecer un contracto *tómalo o déjalo* con cada retailer y estos aceptarán si y sólo si obtienen un beneficio no-negativo o decidir no proveer arbitrariamente a algunos bajo un contrato de exclusividad. Luego, la pregunta es: ¿cuál y bajo qué condiciones reporta mayor beneficio al productor?

En el Apéndice C se muestra que el problema A es matemáticamente equivalente a establecer un contracto con cada retailer y que el problema B es equivalente a firmar un contrato de exclusividad con solo uno de los retailers. Esto implica que resolver cuál es el esquema óptimo de venta para un monopolista que provee un bien digital cuando los consumidores se conocen, también resuelve el problema de un productor que enfrenta retailers a quienes puede proveer individualmente o mediante un intermediario con contrato de exclusividad. Es interesante como dos problemas económicos bajo contextos muy distintos tienen una formulación matemática equivalente.

3. Existencia del máximo y mercados grandes

Antes de iniciar la discusión sobre cuál esquema de venta es más rentable para el monopolista, es necesario estudiar condiciones que garanticen un beneficio esperado óptimo finito para ambas estrategias. Si al menos uno de los máximos no existiera la pregunta sería trivial. Esto es lo que se aborda a continuación. Una vez resuelto lo anterior, se presentan los primeros resultados cuando el número de consumidores que enfrenta el monopolista es *muy grande*.

3.1. Existencia y condiciones de suficiencia para la maximización

Sea V una variable aleatoria con distribución F y densidad f. Recuérdese que los problemas A y B asociados a la variable V para un $n \in \mathbb{N}$, están dados por

$$A: \; n\left\{ \underset{p \in supp(f)}{max} \; p\,[1 - F(p)] \right\} \;\; \text{y} \;\; B: \underset{p_n \in supp(f^{n*})}{max} \; p_n\,[1 - F^{n*}(p_n)]$$

Es claro que si $n = 1$ los problemas A y B son equivalentes. Además, para todo n natural el argumento maximizador del problema A siempre es el mismo; el máximo sólo es escalado por una constante positiva. Por lo tanto, es suficiente discutir la existencia y condiciones para la maximización del problema B para un n arbitrario[3]. Para comenzar, es necesario introducir la función de riesgo de una variable aleatoria continua.

Definición 3.1. (Función de riesgo) Sea V una variable aleatoria con distribución de probabilidad F y densidad f. Luego, la función de riesgo de V es $h : \{p \in \mathbb{R}_+ : F(p) < 1\} \to \mathbb{R}$, definida por $h(p) := lim_{\Delta p \to 0} \frac{Prob(p<V<p+\Delta p | V>p)}{\Delta p} = \frac{f(p)}{1-F(p)}$, $\forall p \in dom_h$.

La función de riesgo es un objeto muy estudiado en Teoría de Confiabilidad – *Reliability Theory* –.[4] Su interpretación es la siguiente: si V representa la valoración de un consumidor, luego $h(p)\,\Delta p$ es la probabilidad de que su valoración se encuentre en el intervalo $(p, p + \Delta p)$ condicional en que es mayor que p, cuando Δp es pequeño. Es decir, $h(p)\,\Delta p$ puede comprenderse como una probabilidad condicional, mientras que $f(p)\,\Delta p$ es aproximadamente una probabilidad incondicional. Con esto en consideración, se define la propiedad común a todas las variables aleatorias en este trabajo.

[3] Si bien algún grado de concavidad de la función objetivo – para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ – sería suficiente para garantizar la existencia del máximo – e.g. pseudoconcavidad, Teorema 9.3.4 de [15] – el problema es cómo garantizar dicha propiedad para todo $n \in \mathbb{N}$.

[4] Esta función también es conocida como función de *hazard*. Para mayores referencias sobre sus diversos alcances y aplicaciones ver [4].

Definición 3.2. (Tasa de riesgo creciente)[5] Sea V una variable aleatoria. Entonces, V tiene tasa de riesgo creciente – de ahora en adelante IHR por sus siglas en inglés – si su función de riesgo es monótona creciente.[6]

La función de riesgo también admite una interpretación económica cuando las demandas se representan por $1 - F$; corresponde a la semi-elasticidad precio de la demanda. Esto ya que, para un Δp pequeño

$$\begin{aligned} h(p) &\approx \frac{Prob\,(p < V < p + \Delta p | V > p)}{\Delta p} \\ &= \frac{F(p + \Delta p) - F(p)}{[1 - F(p)]\,\Delta p} \\ &= \frac{|\Delta\,\%\,\text{Probabilidad de venta}|}{\Delta p} \end{aligned}$$

En síntesis, el tipo de variables aleatorias que modelarán las valoraciones de los consumidores son aquellas tales que su semi-elasticidad precio de la demanda es creciente en el precio. En otras palabras, demandas tales que cada vez responden más fuerte las cantidades demandadas del bien – disminución porcentual en la probabilidad de venta – ante un aumento marginal del precio.

¿Cuál es el tipo de bienes que no admite modelamiento por sus valoraciones con variables con IHR? Los bienes de lujo en mercados no segmentados por ingreso podrían no calificar para ser modelados por variables IHR. Esto ya que para precios muy altos siempre existe una masa no despreciable de consumidores aún dispuesta a comprarlos. No hay monotonía en la tasa de crecimiento de la probabilidad de venta.

Por último, nótese que si las demandas provienen de variables con IHR, conforme aumenta el precio, también son cada vez más precio elásticas. Esto es directo al notar que $h(p)\,p$ es creciente en p si h es creciente en p y los precios son no-negativos.[7]

Una propiedad fundamental para este trabajo de la clase de variables aleatorias con IHR es que es cerrada bajo la suma. Por lo tanto, como se ha supuesto que las valoraciones de los consumidores son independientes, la convolución enésima de una distribución IHR es IHR por el Lema A.3. Esta propiedad motiva el teorema de esta sección que asegura la existencia del máximo para el problema B.

Teorema 3.1. *Sea V una variable aleatoria con IHR, distribución F y densidad f. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $[a, b]$ el soporte de la convolución enésima de F, donde $a \in \mathbb{R}_+$ y $b \in \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$. Entonces, el problema B tiene un máximo único y global y la función objetivo es* single-peaked. *Si además se cumple que $\frac{1}{f^{n*}(a)} > a$, entonces el máximo es interior y satisface la condición de primer orden del problema de maximización.*

Demostración. Ver Apéndice B. ☐

Observación. La hipótesis $\frac{1}{f^{n*}(a)} > a$ no es restrictiva si se considera que todo soporte con $a = 0$ ya cumple esto.

Las distribuciones de probabilidad más usuales son IHR; algunas de ellas son: la normal, la exponencial, gamma y Weibull – cuando el parámetro de forma es mayor a 1 –, familia de distribuciones de valores extremos, logística, Laplace, entre otras. En [3] los autores presentan un catálogo de distribuciones IHR.

[5] Si V es una variable aleatoria que tiene IHR se dirá que su distribución es IHR.

[6] En este trabajo se utilizará la siguiente convención: si un objeto tiene la propiedad de ser monótono creciente (decreciente) esto será equivalente a ser monótono no decreciente (no creciente). Si la propiedad es ser monotóno estrictamente creciente (decreciente), entonces esto equivale a ser monótono creciente (decreciente).

[7] Las variables aleatorias tales que sus demandas asociadas son cada vez más precio elásticas conforme aumenta el precio son conocidas como variables con función de riesgo generalizada creciente, IGHR por sus siglas en inglés. Las variables con IHR conforman una subclase de estas variables. Ver [14], [13] y [3] para mayores referencias.

En esta sección se presentan resultados que permitirán comparar los problemas A y B cuando el mercado es *muy grande*, es decir, cuando el número de participantes tiende a infinito. Debido a que ambos problemas son no acotados – en el tamaño del mercado –, una manera conveniente de compararlos es en términos *por comprador*. Esto se define a continuación.

Definición 3.3. (Precio normalizado) Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias donde $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\tilde{V}_n := \sum_{i=1}^n V_i$. Luego, $\tilde{V}_n \sim F^{n*}$. Entonces, el precio normalizado está definido como una realización, $p(n)$, de la variable aleatoria $V(n) := \frac{\tilde{V}_n}{n}$ que distribuye $\tilde{F}_n(p) := F^{n*}(np)$ con densidad $\tilde{f}_n(p) := f^{n*}(np)n$, con $p \in supp(f)$.[8]

El precio normalizado es el precio promedio por consumidor que cobra el monopolista al distribuidor. Desde el punto de vista del distribuidor puede entenderse como el costo promedio por bien distribuido – ya que el distribuidor compra un paquete de derechos de distribución al monopolista –.

Así, los problemas A y B normalizados son

$$\widetilde{A} : \max_{p \in supp(f)} \; p\,[1 - F(p)] \;\; \text{y} \;\; \widetilde{B} : \max_{p(n) \in supp(\tilde{f}_n)} \; p(n)\left[1 - \tilde{F}_n(p(n))\right]$$

ya que por definición $\tilde{F}_n(p(n)) := F^{n*}(np(n)) = F^{n*}(p_n)$. Nótese que la equivalencia se obtiene luego de dividir ambos problemas por n y utilizar la definición de precio normalizado y su distribución.

Por un lado, el beneficio y precio normalizado asociados al problema $\widetilde{A}$ son fijos; siempre es el mismo problema independiente de n. ¿Qué ocurre con el precio normalizado del problema $\widetilde{B}$? ¿Y el beneficio normalizado?

El primer teorema de esta sección establece qué ocurre con el precio normalizado óptimo cuando el número de consumidores que provee el monopolista tiende a infinito. La ley fuerte de los Grandes Números implica que al agregar más agentes la asimetría informacional va decayendo – la varianza del promedio de las variables aleatorias i.i.d. tiende a cero – y se conoce exactamente la valoración del agente promedio. Por lo tanto, es de esperar que el precio óptimo normalizado asintótico sea igual a la media de la variable aleatoria.

Teorema 3.2. *Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con IHR y donde $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$, $\mathbb{E}[V_i] = \mu$. Además, sea $p^*(n) = argmax\,\{\, p(n)[1 - \tilde{F}_n(p(n))] \,\}$ interior, donde $n \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$lim_{n\to\infty} p^*(n) = \mu$$

Demostración. Ver Apéndice B. □

La intuición es directa, como el precio normalizado es casi seguramente igual a la media, luego no tiene sentido cobrar un precio que se desvíe de la media en mercados grandes: si es más alto casi seguramente no se venderá, mientras que si es más bajo siempre es posible incrementar el beneficio si se cobra un *epsilon* más.[9]

Una implicancia del Teorema 3.2 es la siguiente: si el precio óptimo del problema $\widetilde{A}$ es μ, i.e. $p^* = \mu$, entonces

[8] Para cada $n \in \mathbb{N}$, la variable aleatoria $p(n)$ es IHR. Ver Proposición A.1. Esta propiedad es fundamental para demostrar los resultados de esta sección.

[9] En el Apéndice D se presenta una versión más fuerte – con hipótesis más exigentes – del Teorema 3.2. Para ciertas variables aleatorias, es posible asegurar que el precio óptimo normalizado siempre se encuentra bajo la media en mercados grandes, i.e. converge por abajo a la media. Debido a que aún no se ha obtenido una caracterización completa de la clase de variables que cumplen estas hipotesis es que este trabajo sólo se limita a presentar dichos resultados en el apéndice mas no discutirlos.

$$lim_{n\to\infty} p^*(n) = p*$$

Es decir, el precio óptimo normalizado bajo un distribuidor es asintóticamente igual al precio normalizado bajo discriminación individual.

Ahora bien, ¿qué ocurre con el beneficio óptimo normalizado asintótico? Como el monopolista conoce exactamente la valoración del consumidor promedio, este cobrará μ y venderá con probabilidad uno. Esto es lo que afirma el próximo resultado.

Teorema 3.3. *Considérese las hipótesis del Teorema 3.2. Entonces,*

$$lim_{n\to\infty} p^*(n)\left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right] = \mu$$

Demostración. Ver Apéndice B. □

Este resultado establece que el monopolista logra extraer el excedente esperado completo por consumidor. La extracción total de la renta informacional al distribuidor responde al mejor conocimiento del monopolista sobre los consumidores.

Otra pregunta interesante es con qué probabilidad se asignan estos bienes. El siguiente corolario aborda esto.

Corolario 3.3.1. *Considérese las hipótesis del Teorema 3.2. Entonces,*

$$lim_{n\to\infty}\left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right] = 1$$

Es decir, la probabilidad de venta converge a 1*.*

Demostración. La demostración es directa por propiedad de límites y teoremas 3.2 y 3.3. □

Este resultado es revelador ya que establece que cuando el monopolista opera mediante un distribuidor en un mercado muy grande, la probabilidad de asignar todos los bienes demandados es cercana a uno. Como el costo marginal de producción del bien es cero, este esquema de venta elimina la ineficiencia de asignación natural de los monopolios. Mientras que bajo la discriminación directa individual la probabilidad de asignación es constante y menor a uno, por consiguiente la ineficiencia asignativa por cada transacción es independiente del tamaño del mercado. Esta es una manera alternativa de estudiar la eficiencia asignativa para este problema. Más adelante se presentan resultados con respecto al bienestar que utilizan al excedente como medida. En § 4.4 se presentan condiciones que aseguran monotonicidad en la probabilidad de venta para mercados de tamaño arbitrario.

Por último, este corolario responde cuál es el esquema de venta que reporta mayor beneficio esperado al monopolista.

Corolario 3.3.2. *Considérese las hipótesis del Teorema 3.2. Entonces el esquema de venta óptimo para un monopolista que enfrenta un mercado con muchos consumidores es delegar la distribución, es decir*

$$\widetilde{A} \preceq \widetilde{B}$$

Más aún $\widetilde{B}$ es estrictamente preferido[10] *a $\widetilde{A}$ si el soporte de la distribución es de la forma $[0, b]$, donde $b \in \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$.*

[10] Se define la relación de preferencia $\preceq$ ($\prec$) de la siguiente manera: si A y B son dos estrategias de venta, luego $A \preceq B$ ($\prec$) si el beneficio esperado asociado a la estrategia A es menor o igual (estrictamente menor) al beneficio esperado asociado a B.

Demostración. Ver Apéndice B. Intuitivamente no tiene sentido que $p^* [1 - F(p^*)] > \mu$ ya que lo máximo que el monopolista puede extraer en términos esperados a cada consumidor es μ – veáse a continuación Excedente Social Normalizado óptimo –. $\square$

En consecuencia, la pregunta sobre cuál es la mejor estrategia de venta en mercados grandes está resuelta. La extracción de rentas al distribuidor es mayor que la obtenida al discriminar individualmente a los compradores. En mercados grandes la asimetría informacional se diluye y por lo tanto el monopolista logra 'conocer' las valoraciones a través del intermediario, a quien le extrae toda su renta informacional.

Antes de iniciar el estudio de los problemas en mercados pequeños se presentan consecuencias sobre el bienestar de los agentes involucrados en el intercambio. Si bien el objetivo de esta investigación es estudiar el beneficio esperado del monopolista, i.e. su excedente privado bajo dos estrategias de venta, es interesante notar cuáles son las implicancias de estas sobre el bienestar de los consumidores y el excedente social[11]. Antes de iniciar esta discusión es necesaria una definición.

Definición 3.4. (Excedente del consumidor normalizado)[12] Sea $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con IHR y donde $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$. Luego, el Excedente del Consumidor Normalizado para cada $n \in \mathbb{N}$ se define como:

$$\text{EC}(n) := \frac{\int_{p_n^*}^{\infty} [1 - F^{n*}(p_n)] \, dp_n}{n}$$

Esta medida del excedente es útil para poder comparar el bienestar de los consumidores bajo las distintas estrategias; tiene la misma utilidad práctica que las variables normalizadas anteriormente definidas.

Nótese que cuando hay un distribuidor el excedente de los $n-1$ consumidores es siempre cero debido a que este los discrimina perfectamente. Como el distribuidor también es un consumidor tiene sentido referirse a su excedente como excedente del consumidor. Ahora bien, también existe la posibilidad de concebir la figura del distribuidor como una asociación de consumidores – cooperativa, asociación gremial – luego el EC normalizado será entonces el excedente que se lleva cada consumidor de la asociación si hay una repartición equitativa.

Definición 3.5. (Excedente social normalizado) Sea $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con IHR y donde $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$. Luego, el Excedente Social Normalizado para cada $n \in \mathbb{N}$ se define como:

$$\text{ES}(n) := \text{EP}(n) + \text{EC}(n)$$

donde $\text{EP}(n) := \frac{p_n^*[1-F^{n*}(p_n^*)]}{n}$, i.e. beneficio esperado óptimo normalizado del monopolista.

Así, debido a que el costo marginal de producción para el monopolista es cero, es claro que el excedente social normalizado óptimo para cualquier n está dado por

$$\begin{aligned} \text{ES}^* &= \frac{\int_0^{\infty} [1 - F^{n*}(p_n)] \, dp_n}{n} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n V_i\right]}{n} \\ &= \mu \end{aligned}$$

[11]Nótese que como este estudio modela las valoraciones con variables aleatorias, la discusión sobre bienestar es en términos esperados. Por simplicidad, por excedente se entenderá excedente esperado.

[12]Obsérvese que para $n = 1$ el EC normalizado es el excedente de un consumidor cualquiera bajo discriminación individual.

Con esto en consideración, se presenta el último teorema de esta sección que caracteriza los excedentes normalizados cuando el monopolista opera en mercados grandes.

Teorema 3.4. *Considérese las hipótesis del Teorema 3.2. Entonces,*

a. $\lim_{n\to\infty} EC(n) = 0$

b. $\lim_{n\to\infty} ES(n) = ES^*$

Demostración. Ver Apéndice B. □

Este resultado es intuitivo y los argumentos son los mismos que los utilizados para explicar el beneficio normalizado del monopolista cuando el mercado es grande. Cuando hay un distribuidor la asimetría informacional se diluye y el monopolista logra la discriminación en primer grado, i.e. extracción total de renta, y por lo tanto, se alcanza la eficiencia asignativa. Mientras que si hay discriminación individual, siempre habrá pérdida social – independiente del tamaño del mercado – y el excedente del consumidor normalizado será $\int_{p^*}^{\infty} [1 - F(p)]\, dp > 0$. Luego, los consumidores obtienen un mayor bienestar cuando son discriminados directamente por el monopolista en mercados grandes.

4. Mercados pequeños

En esta sección se presentan resultados cuando el mercado que sirve el monopolista está compuesto por pocos consumidores. Para mercados grandes la pregunta sobre el mejor esquema de venta está resuelta para variables aleatorias con IHR; delegar la distribución domina a la discriminación individual. Ahora bien, ¿qué pasa cuando hay pocos consumidores en el mercado, sigue siendo mejor agregar?¿Basta suponer IHR para lograr esta dominancia? A continuación se presenta una situación en la que discriminar individualmente reporta mayor beneficio esperado al monopolista.

4.1. Agregar no siempre es mejor: un ejemplo discreto

Considérese la situación descrita en la introducción pero en la que ahora los posibles compradores son sólo dos. El monopolista no conoce las valoraciones de los individuos y tiene creencias i.i.d.; los tipos pueden ser a o b, donde $a, b \in \mathbb{R}_+$ tal que $a < b$. Nótese que este mercado es el más pequeño para el que tiene sentido la pregunta sobre estrategias de venta y además contempla la incertidumbre más simple que puede enfrentar el monopolista.

Entonces este problema se puede modelar de la siguiente forma. Sean $p \in (0, 1)$ y $X_1 \sim Ber(p)$, $X_2 \sim Bin(2, p)$. Luego, la variable aleatoria $V_1 := (a - b)X_1 + b$ representa la valoración de una persona por el bien, i.e. con probabilidad p la persona valora el bien en a y con probabilidad $(1 - p)$ lo valora en b. La distribución de probabilidad de V_1 está definida por $F_{V_1}(v) := F_{X_1}\left(\frac{b-v}{b-a}\right)$ para $v \in \{a, b\}$.

La suma de las valoraciones de dos personas puede representarse por la variable aleatoria $V_2 = (a - b)X_2 + 2b$, con distribución de probabilidad definida por $F_{V_2}(v) := F_{X_2}\left(\frac{2b-v}{b-a}\right)$ para todo $v \in \{2a, a + b, 2b\}$. Entonces V_2 puede ser: $2a$, con probabilidad p^2; $a + b$, con probabilidad $2p(1 - p)$; y $2b$, con probabilidad $(1 - p)^2$.

Por último, la Proposición A.3 muestra que las variables V_1 y V_2 son IHR. Así, la representación de los problemas A y B para este caso discreto es:

$$A : 2\, max\{a, b(1 - p)\} \quad \text{y} \quad B : max\{2a, (a + b)(1 - p^2), 2b(1 - p)^2\}$$

Como el espacio de acciones del monopolista es un conjunto finito y discreto el máximo existe para ambos problemas. La siguiente figura describe la estrategia y precio óptimo para el monopolista en función de la probabilidad p de observar la valoración más baja.[13]

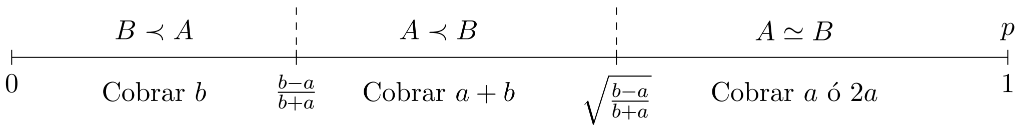


Figura 1: Esquemas de venta y precio óptimo

Así, si $p < \frac{b-a}{b+a}$, es óptimo para el monopolista cobrar b por separado a cada consumidor, i.e. $B \prec A$. Una baja probabilidad asociada a que los consumidores sean tipo a lo induce a apostar por extraer los excedentes directamente y cobrar la valoración más alta. Si más bien $\frac{b-a}{b+a} < p < \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$, le es conveniente establecer un distribuidor y venderle a $a+b$ los derechos, i.e. $A \prec B$. Mientras que si $\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} < p$ el monopolista está indiferente entre discriminar individualmente (cobra a a cada uno) o establecer un intermediario (cobra $2a$).

¿Cómo se relacionan el valor de los tipos con las decisiones óptimas?

- Supóngase que b es mucho mayor que a, i.e. existe una gran diferencia en las valoraciones máxima y mínima. Entonces, la fracción $\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \approx 1$. Por lo anterior, esto implica que para casi cualquier probabilidad p, es óptimo cobrar b por separado. El monopolista se *ahorra* el paso por el intermediario y apuesta por la valoración más alta.

- Por otro lado, supóngase que $b \approx a$. Esto implica que $\frac{b-a}{b+a} < \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \approx 0$, luego solo convendría discriminar por separado y cobrar b si la probabilidad de que los individuos valoren el bien en b es cercana a 1. Si el monopolista no tiene este nivel de 'certeza' prefiere simplemente cobrar a a cada uno (o agregar y cobrar $2a$) y se asegura concretar la venta y obtener $2a$. La pérdida, en valor esperado, por no cobrar la valoración más alta es insignificante.

Por lo tanto, la discriminación individual no siempre es dominada por la agregación de consumidores cuando se considera un espacio más amplio de distribuciones. Más aún, los dos casos límite anteriores muestran que el problema A domina débilmente a B para cualquier $p \in (0,1)$. Si bien esta situación modela las valoraciones con una variable aleatoria discreta, por lo tanto está fuera de este estudio, es un ejemplo ilustrativo y motiva la idea de que esto pueda ocurrir con una variable aleatoria continua. Es una tarea pendiente probar la (in)existencia de un ejemplo continuo.

A continuación se estudian los problemas para dos distribuciones de probabilidad usuales en un mercado con pocos compradores.

4.2. Distribución Uniforme

El nivel de complejidad de esta pregunta no es menor, inclusive para distribuciones específicas. Una razón es que solo algunas de las distribuciones de variables aleatorias continuas más usuales en la práctica, tales como la Erlang, uniforme y exponencial, tienen expresiones analíticas para sus convoluciones enésimas [1, p. 18]. Por lo tanto, como primera aproximación para el estudio de este problema en mercados pequeños se han considerado las distribuciones uniforme y exponencial.

[13] La Figura 1 resume los resultados de la Proposición A.4. Nótese que la figura supone que $a > 0$. Si $a = 0$ el resultado es obvio; los puntos críticos de la figura colapsan a 1 y siempre conviene separar – A – y cobrar b.

La fórmula utilizada para obtener la convolución enésima de la distribución uniforme con parámetros a y b es[14]:

$$F^{n*}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < na \\ \sum_{j=0}^{\tau} \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!}(\frac{x-na}{b-a} - j)^n & \text{si } na \leq x < nb \\ 1 & \text{si } x \geq nb \end{cases}$$

donde $\tau := \lfloor \frac{x-na}{b-a} \rfloor$, que corresponde al entero más grande que es menor que $\frac{x-na}{b-a}$.

La convolución de dos distribuciones uniforme es una función por tramos. El número de tramos corresponde al número de veces que la distribución fue convolucionada. Así, para resolver el problema B es necesario trabajar n subproblemas de optimización – debido a que son n tramos –. A continuación se presenta el problema del tramo k-ésimo:

$$\underset{p_n \in I_k}{max} \{ p_n \; [1 - F^{n*}(p_n)] \}$$

donde $I_k := [ka + (n-k)b, (k-1)a + (n-k+1)b)$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$.

Debido a que la distribución es IHR, por el Teorema 3.1 basta estudiar la condición de primer orden de este problema de maximización:

$$1 - F^{n*}(p_n^*) = p_n^* f^{n*}(p_n^*)$$

$$\iff 1 - \sum_{j=0}^{\tau} \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!} \left(\frac{p_n^* - na}{b-a} - j \right)^n = \frac{p_n^*}{b-a} \sum_{j=0}^{\tau} \frac{n(-1)^j}{j!(n-j)!} \left(\frac{p_n^* - na}{b-a} - j \right)^{n-1}$$

Después de reordenar los términos se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{(b-a)^n} \left\{ \sum_{j=0}^{\tau} \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!} (np_n^*(p_n^* - na - j(b-a))^{n-1} + (p_n^* - na - j(b-a))^n \right\} - 1 = 0$$

Por lo tanto, para obtener p_n^* del tramo k-ésimo es necesario resolver un polinomio de grado n. Es sabido que no existen soluciones cerradas generales – soluciones en términos de radicales – para los ceros de un polinomio de grado mayor o igual a 5 con coeficientes arbitrarios [15]. Así, una alternativa para enfrentar este tipo de problemas es utilizar métodos númericos. En § 4.2.2 se presentan aproximaciones númericas para $a = 0$ y $b = 1$. En la siguiente sección se presenta la solución para a y b arbitrarios y $n = 2$.

4.2.1. Caso $n = 2$

Problema A

$$\underset{p \in [a,b]}{max} \{ 2 \, p \; [1 - F(p)] \}$$

[14]Obtenida de [8].
[15]Teorema de Abel-Ruffini.

Condición de primer orden:

$$\begin{aligned} 1 - F(p^*) &= p^* f(p^*) \\ &\Longleftrightarrow 1 - \frac{p^* - a}{b - a} = p^* \frac{1}{b - a} \\ &\Longleftrightarrow p^* = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Entonces, el precio óptimo del problema A está dado por:

$$p_A^* = \begin{cases} p^* & \text{si } a \leq \frac{b}{2} \\ a & \text{si otro caso} \end{cases}$$

Luego, el beneficio óptimo del monopolista está dado por:

$$\pi_A^* = \begin{cases} \frac{b^2}{2(b-a)} & \text{si } a \leq \frac{b}{2} \\ 2a & \text{si otro caso} \end{cases}$$

<u>Problema B</u>

$$\max_{p_2 \in [2a, 2b]} \left\{ p_2 \left[1 - F^{2*}(p_2)\right] \right\}$$

donde

$$F^{2*}(p) := \begin{cases} 0 & \text{si } p < 2a \\ \frac{p^2 - 4ap + 4a^2}{2(b-a)^2} & \text{si } 2a \leq p < a + b \\ \frac{2a^2 - 4ab - 2b^2 + 4bp - p^2}{2(b-a)^2} & \text{si } a + b \leq p \leq 2b \\ 1 & \text{si } p > 2b \end{cases}$$

◀ Tramo $[2a, a+b)$

$$\max_{p_2 \in [2a, a+b)} \left\{ p_2 \left[1 - F^{2*}(p_2)\right] \right\}$$

Condición de primer orden:

$$\begin{aligned} 1 - F^{2*}(p_2^*) &= p_2^* f^{2*}(p_2^*) \\ &\Longleftrightarrow 1 - \frac{p_2^{*2} - 4ap_2^* + 4a^2}{2(b-a)^2} = p_2^* \frac{p_2^* - 2a}{(b-a)^2} \\ &\Longleftrightarrow \frac{3}{2} p_2^{*2} - 4ap_2^* + 2a^2 - (b-a)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow p_2^* = \frac{4a \pm \sqrt{4a^2 + 6(b-a)^2}}{3} \end{aligned}$$

Pero como $\frac{4a - \sqrt{4a^2 + 6(b-a)^2}}{3} < 2a$ mientras que $2a \leq \frac{4a + \sqrt{4a^2 + 6(b-a)^2}}{3} < a + b$, entonces

$$p_{tramo[2a,a+b)} = \frac{4a + \sqrt{4a^2 + 6(b-a)^2}}{3}$$

Luego, el beneficio óptimo corresponde a

$$\pi_{tramo[2a,a+b)} = \left(\frac{4a + \sqrt{4a^2 + 6(b-a)^2}}{54(b-a)^2} \right) \left(12(b-a)^2 - 8a^2 + 4a\sqrt{4a^2 + 6(b-a)^2} \right)$$

◀ Tramo $[a+b, 2b]$

$$\underset{p_2 \in [a+b,2b]}{max} \left\{ p_2 \left[1 - F^{2*}(p_2) \right] \right\}$$

Condición de primer orden:

$$\begin{aligned} 1 - F^{2*}(p_2^*) = p_2^* f^{2*}(p_2^*) \\ &\iff 1 - \frac{2a^2 - 4ab - 2b^2 + 4bp_2^* - p_2^{*2}}{2(b-a)^2} = p_2^* \frac{2b - p_2^*}{(b-a)^2} \\ &\iff \frac{3}{2} p_2^{*2} - 4bp_2^* + 2b^2 = 0 \\ &\iff p_2^* = \frac{4b \pm 2b}{3} \end{aligned}$$

Pero como $\frac{2b}{3}$ no pertenece a $[a+b, 2b]$ y $p_{tramo[a+b,2b]} = 2b$ implica que $\pi_{tramo[2a,a+b)} = 0$, entonces la solución óptima se encuentra en el tramo $[2a, a+b)$. Por lo tanto,

$$\pi_B^* = \left(\frac{4a + \sqrt{4a^2 + 6(b-a)^2}}{54(b-a)^2} \right) \left(12(b-a)^2 - 8a^2 + 4a\sqrt{4a^2 + 6(b-a)^2} \right)$$

Dado que la relación entre π_A^* y π_B^* depende de dos parámetros, a y b, ésta se puede representar en $\mathbb{R}^2$. La región de desigualdad se presenta a continuación.

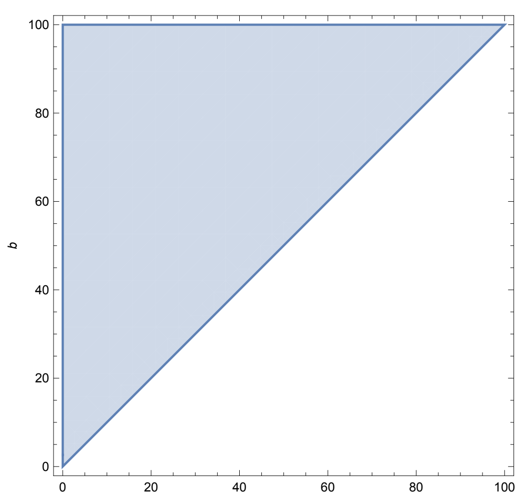


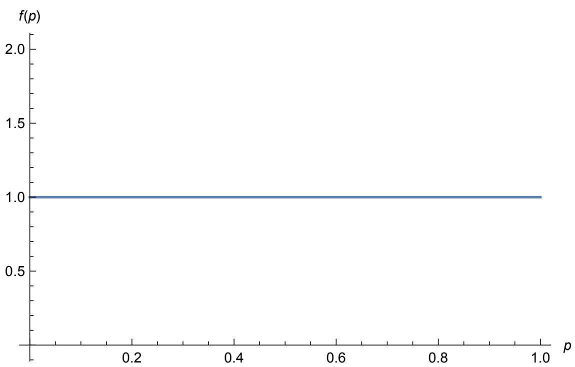
Figura 2: Región de desigualdad para $\pi_A^*(a,b)$ y $\pi_B^*(a,b)$. La zona destacada representa los (a,b) tales que $\pi_A^*(a,b) < \pi_B^*(a,b)$, $\forall (a,b) \in [0,100]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

La zona de interés es el conjunto $\{(a,b) : \ a < b\}$. Luego como esta zona coincide con la región destacada en la Figura 2, vender derechos de distribución reporta mayor beneficio esperado que proveer a los dos consumidores por separado para este caso particular. Cuando $a = 0$ y $b = 1$, es decir cuando las valoraciones distribuyen uniforme estándar, el beneficio del monopolista bajo A y B es respectivamente $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{\frac{8}{27}}$ (aprox. $0,54$), en clara sintonía con el hecho anterior.

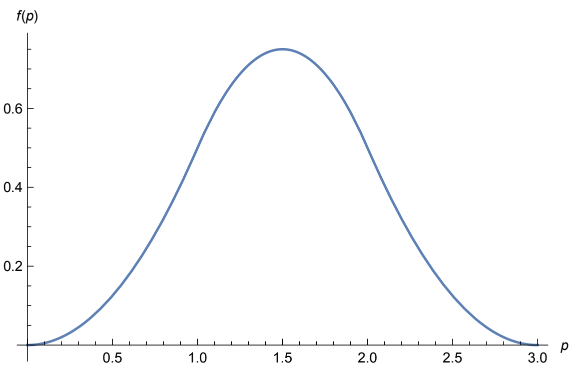
4.2.2. *Caso $n > 2$: soluciones númericas*

Debido a la dificultad para determinar la relación entre los problemas cuando hay dos consumidores y soporte arbitrario, en esta sección se presentan soluciones numéricas para distintos valores de n, asociados a una distribución uniforme con soporte $[0, 1]$. De esta manera se espera obtener una mayor intuición sobre el comportamiento de ambos problemas en mercados pequeños.

Para ilustrar las convoluciones a continuación se adjuntan los gráficos de las densidades para distintos valores de n. Como puede observarse, la densidad de la convolución muestra un mayor nivel de kurtosis positiva a medida que aumenta n. Esto es consecuencia del teorema central de límite; al agregar las valoraciones promedio se van *apretando*, son más probables las resultados en torno a la media.

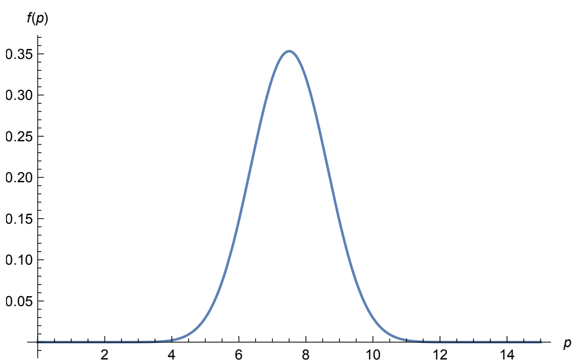


(a) $n = 1$

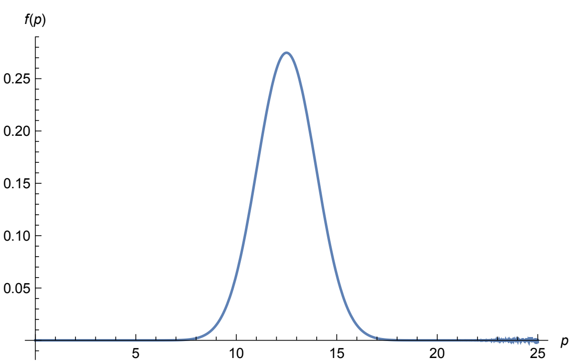


(b) $n = 3$

Figura 3: Densidades asociadas a distribuciones F^{n*}



(a) $n = 15$



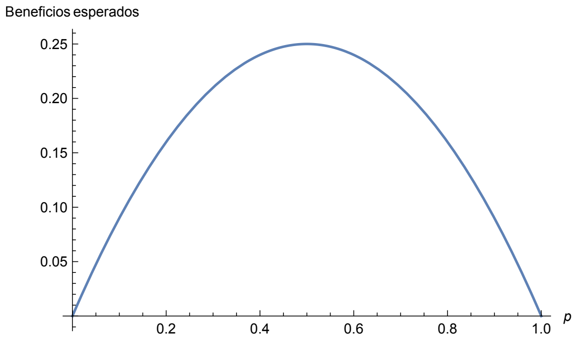
(b) $n = 25$

Figura 4: Densidades asociadas a distribuciones F^{n*}

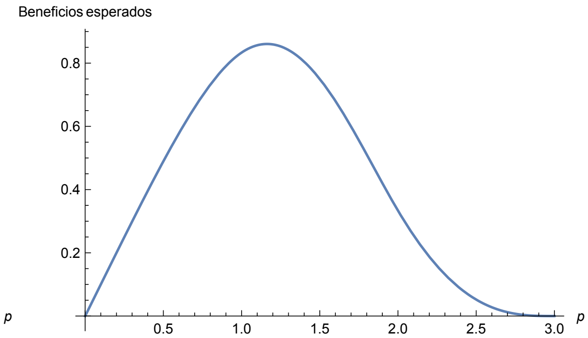
Las resultados muestran que la función de beneficio esperado – función objetivo del problema B – es *single-peaked* y además posee asimetría positiva que va aumentando a medida que aumenta n. Esto se puede apreciar al comparar las figuras 5 y 6, que corresponden al problema B para $n = 1$, $n = 3$, $n = 15$, y $n = 25$. El hecho que su grado de asimetría sea creciente en n es una consecuencia del aumento del nivel de kurtosis de las funciones de densidad asociadas.

Tal como lo afirma el Teorema 3.1, el máximo resulta ser interior, global y único para todas las iteraciones que se han realizado. Esto implica que existe solo un tramo óptimo. Así, claramente los óptimos locales en los tramos no-óptimos son soluciones esquina.

La Figura 7a presenta la relación entre el beneficio esperado óptimo normalizado de cada una de las estrategias. El beneficio óptimo normalizado es constante para el problema A, mientras

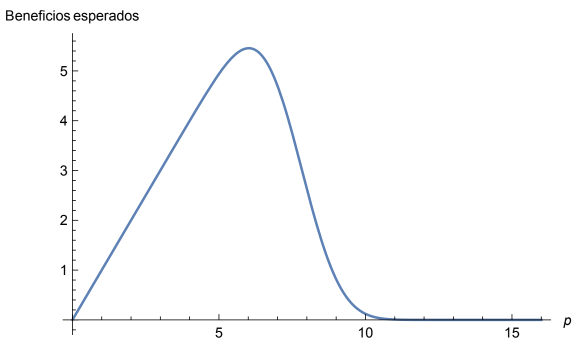


(a) $n = 1$

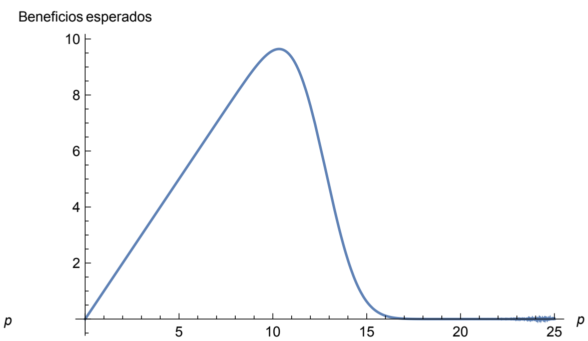


(b) $n = 3$

Figura 5: Gráficos de funciones de beneficio esperado



(a) $n = 15$



(b) $n = 25$

Figura 6: Gráficos de funciones de beneficio esperado

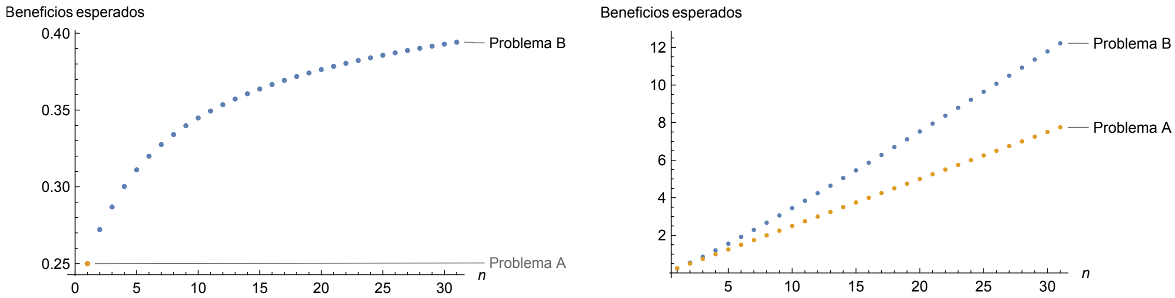
que el beneficio asociado al problema B es creciente en n. Por tanto, vender los derechos de distribución es la estrategia óptima $\forall n \in \{1, .., 31\}$. La Figura 7b muestra el beneficio esperado óptimo total para ambos problemas; una mirada alternativa equivalente. Los gráficos muestran que el beneficio total del problema B cada vez se va distanciando más del beneficio asociado al problema A. En síntesis, para valores pequeños de n y una distribución uniforme estándar de las valoraciones es óptimo agregar y vender derechos.

Para valores grandes de n, por el Teorema 3.3 se sabe que el beneficio óptimo normalizado converge a $\mu = 0{,}5$, que es la media de la distribución uniforme estándar. Por lo tanto, asintóticamente, el problema $\widetilde{B}$ es superior al problema $\widetilde{A}$.

Intuitivamente, si para valores bajos de n vender derechos de distribución es más rentable, lo será si el número de potenciales compradores crece a $n+1$ ya que disminuye la varianza sobre la valoración promedio de los individuos, si se supone que la probabilidad de venta se mantiene o aumenta. Esto será discutido en detalle a continuación.

La Figura 8a presenta el gráfico del precio óptimo normalizado para cada una de la estrategias. El precio óptimo normalizado asociado al problema B muestra ser monótono creciente desde $n = 5$. Por el Teorema 3.2 se sabe que esta sucesión de precios converge a $\mu = 0{,}5$.

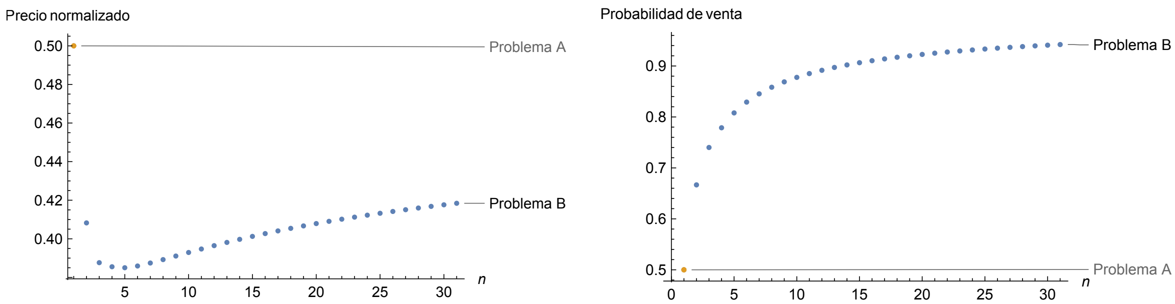
Es posible reconocer dos efectos – opuestos – que conducen la trayectoria del precio óptimo normalizado del problema B. El efecto *negativo* que induce al monopolista a bajar el precio será llamado efecto *todo o nada*. Debido a que bajo este esquema de venta el monopolista ofrece un único paquete de bienes – i.e. tiene una única oportunidad para vender – no vender le resulta muy costoso en términos esperados. Claramente este efecto es creciente en n debido a que el precio óptimo es creciente – precio óptimo normalizado de la Figura 8a multiplicado por n –. Por otro lado, el efecto *positivo* que induce al monopolista a subir el precio será llamado *mejor*



(a) Beneficio esperado óptimo normalizado

(b) Beneficio esperado óptimo total

Figura 7: Beneficio esperado óptimo, normalizado y total, para distintos valores de n



(a) Precio óptimo normalizado

(b) Probabilidad de venta

Figura 8: Precio óptimo y probabilidad de venta – bajo precio óptimo – para distintos valores de n

conocimiento. La agregación de individuos idénticos *a priori* reduce la varianza de la valoración promedio, i.e. el monopolista tiene una mayor *certeza* sobre en cuánto valora su bien el promedio de los demandantes. Es evidente que este efecto también es creciente en n.[16]

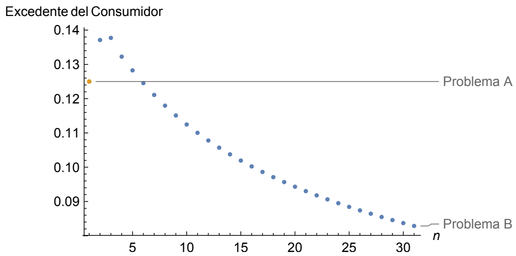
Con estos dos efectos es posible analizar la interesante trayectoria del precio óptimo de la Figura 8a. El efecto *todo o nada* domina al efecto *mejor conocimiento* para valores pequeños de n. Es necesario agregar más individuos para poder neutralizar los costos de tener una única oportunidad para vender. Así, el monopolista decide bajar el precio. Esto se ve reflejado en el primer salto negativo, de $n = 1$ a $n = 2$ y en las siguientes reducciones. Existe un punto crítico, un n^*, desde donde el monopolista comienza a subir el precio óptimo. De ahí en adelante el efecto *mejor conocimiento* comienza a dominar a *todo o nada*. Como la agregación va eliminando la asimetría informacional, si bien sería muy costoso no vender, el monopolista está cada vez *más seguro* de la valoración del promedio de consumidores, y por lo tanto, *más seguro* de realizar la venta. En otras palabras, a pesar de que el monopolista va subiendo el precio la probabilidad de venta va aumentando.

Lo anterior puede corroborarse con el gráfico de la Figura 8b. Este representa la probabilidad de venta[17] bajo el precio óptimo para cada problema. Es claro que la probabilidad de venta para el problema A es constante, mientras que la probabilidad de venta del problema B es monótona creciente en el número de consumidores que enfrenta el monopolista. Como se discutió en § 3.2 la probabilidad de venta también entrega una medida de eficiencia asignativa. Luego, de la Figura 8b se observa que proveer mediante un distribuidor es siempre más eficiente para valoraciones que distribuyen uniforme estándar. Nótese también la *acelerada* convergencia de la probabilidad

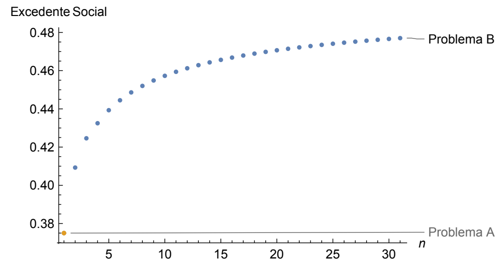
[16]Ver discusión en § 3.2.

[17]Definida por $1 - F^{n*}(p_n^*)$, donde p_n^* es el precio óptimo de venta para $n \in \mathbb{N}$. Puede observarse que esta probabilidad es equivalente a $1 - \tilde{F}_n(p^*(n))$.

de venta a 1.[18]



(a) Excedente del Consumidor



(b) Excedente Social

Figura 9: Excedentes esperados normalizados

Por último, la Figura 9 presenta los gráficos de los excedentes normalizados. Cuando el mercado es muy pequeño – no más 5 consumidores – el excedente del consumidor normalizado es mayor cuando hay un distribuidor que bajo discriminación individual directa. Esto se debe a la fuerte baja en el precio óptimo normalizado cuando n es pequeño. Pero la trayectoria del excedente cambia rápidamente y muestra una clara monotonía decreciente – de hecho, por el Teorema 3.4a se sabe que converge a 0 –. Luego los consumidores obtienen un mayor bienestar bajo discriminación directa por el monopolista.

En evidente sintonía con lo mostrado por la probabilidad de venta y la mayor eficiencia asignativa, se observa que el excedente social también es creciente en el tamaño del mercado para el problema B. Por el Teorema 3.4 se sabe el excedente social normalizado converge a la media de la variable aleatoria, i.e. 0,5. Y al igual que la probabilidad de venta, bajo un distribuidor es notoria una *rápida* convergencia a la media. Mientras que el problema A presenta una pérdida social normalizada constante, invariante al tamaño del mercado.

4.3. Distribución Exponencial

La convolución enésima de la distribución exponencial con parámetro $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$ es la distribución Erlang con parámetro n de forma – entero positivo – y tasa λ. La fórmula para esta distribución está dada por:

$$G^{n*}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

A diferencia de la distribución uniforme, la convolución de dos distribuciones exponencial no es una función por tramos; por lo tanto, resolver el problema B para esta distribución requiere de solo un problema de optimización. Este problema para un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario está dado por:

$$\underset{p_n \in supp(g^{n*})}{max} \{ p_n \; [1 - G^{n*}(p_n)] \}$$

donde g es la función de densidad asociada a la distribución G.

Debido a que la función de *hazard* de una distribución exponencial con parámetro λ es constante [19], la distribución es IHR. Así, basta analizar la siguiente condición de primer orden del problema de optimización

[18] La convergencia es más rápida que la observada para el caso de la distribución exponencial en § 4.3.2.

[19] $\forall p \geq 0, h_{exp(\lambda)}(p) = \lambda$.

$$
\begin{aligned}
1 - G^{n*}(p_n^*) = p_n^*\, g^{n*}(p_n^*) \\
&\iff \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda\, p_n^*}(\lambda\, p_n^*)^k}{k!} = p_n^* \left(\frac{\lambda^n\, p_n^{*n-1}\, e^{-\lambda p_n^*}}{(n-1)!} \right) \\
&\iff \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda p_n^*)^k}{k!} = \frac{(\lambda p_n^*)^n}{(n-1)!} \\
&\iff (\lambda p_n^*)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} (\lambda p_n^*)^k = 0
\end{aligned}
$$

Nuevamente se obtiene un polinomio de grado n. Por lo tanto pareciera ser que la complejidad para encontrar la raíz relevante de este polinomio es similar a la del problema con la distribución uniforme. En la misma línea de § 4.2, primero se presenta la solución para $n = 2$ y un valor de λ arbitrario y en § 4.3.2 se presentan soluciones númericas que ayudarán a obtener mayor intuición sobre el problema para valores de n pequeños.

4.3.1. Caso $n = 2$

Problema A

$$\underset{p \in [0,\infty)}{max} \{2\, p\, [1 - G(p)]\}$$

Condición de primer orden:

$$
\begin{aligned}
1 - G(p^*) = p_{max}\, g(p^*) \\
&\iff 1 - (1 - e^{-\lambda p^*}) = p^*(\lambda e^{-\lambda p^*}) \\
&\iff e^{-\lambda p^*} = p^*(\lambda e^{-\lambda p^*} \\
&\iff p^* = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Es decir, el precio óptimo para el problema A es igual a la media de la distribución exponencial. Luego, el beneficio óptimo asociado a A es:

$$\pi_A^* = \frac{2}{\lambda} e^{-1}$$

Problema B

$$\underset{p_2 \in [0,\infty)}{max} \left\{ p_2 \left[1 - G^{2*}(p_2)\right] \right\}$$

Condición de primer orden:

$$
\begin{aligned}
1 - G^{2*}(p_2^*) = p_2^*\, g^{2*}(p_2^*) \\
&\iff 1 - (1 - e^{-\lambda p_2^*} - e^{-\lambda p_2^*}(\lambda p_2^*) = p_2^*(\lambda^2\, p_2^*\, e^{-\lambda p_2^*}) \\
&\iff (\lambda p_2^*)^2 - (\lambda p_2^*) - 1 = 0 \\
&\iff p_2^* = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2\lambda}
\end{aligned}
$$

Como $1-\sqrt{5}<0$, entonces,

$$p_B^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda}$$

Y el beneficio óptimo asociado a este problema es:

$$\pi_B^* = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda}\right)\left(e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

Así, al comparar π_A^* y π_B^* se obtiene que el problema B es mayor al A para todo λ positivo, ya que

$$\begin{aligned}
\pi_B^* > \pi_A^* & \\
&\iff \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\lambda}\right)\left(e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > \frac{2}{\lambda}e^{-1} \\
&\iff \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) > 1 \\
&\iff \left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} > 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la pregunta sobre qué debe hacer el monopolista cuando enfrenta dos consumidores cuyas valoraciones distribuyen exponencial está resuelta. A continuación se estudia qué ocurre cuando son más de dos.

4.3.2. Caso $n>2$: soluciones numéricas

La Figura 10 muestra los gráficos de las funciones de beneficio esperado asociadas a distribuciones Erlang con parámetro $\lambda = 1$[20] y distintos valores de n.

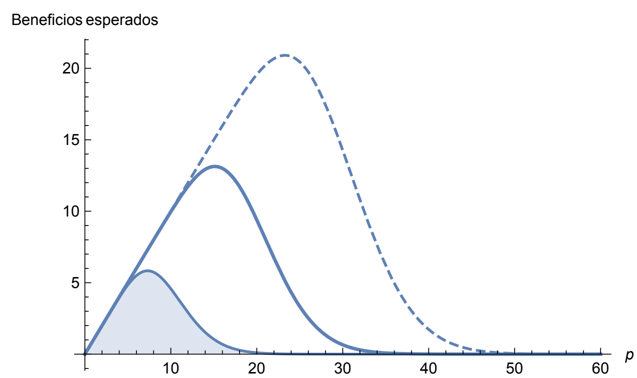


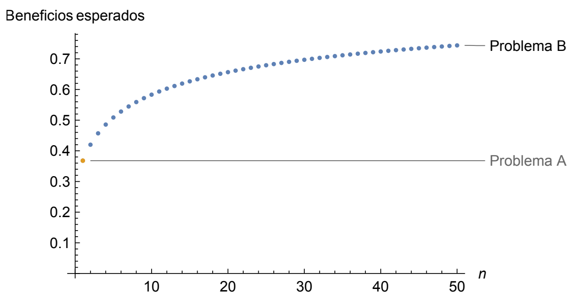
Figura 10: Gráficos de beneficio esperado asociados a distribuciones Erlang con $\lambda = 1$ y $n = 10$ (curva con relleno), $n = 20$ (curva del medio) y $n = 30$ (curva punteada)

Por el Teorema 3.1, la función de beneficio esperado asociada a la distribución Erlang con parámetros n, λ es *single-peaked* y la Figura 10 corrobora esto para mercados pequeños.

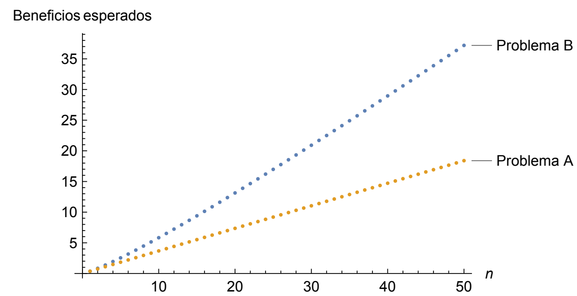
[20] Cambios en λ sólo modifican la escala de la función de beneficio esperado – pero conserva su forma –.

A diferencia de la distribución uniforme, la distribución exponencial tiene soporte $[0, \infty)$. Luego, no tiene mucho sentido hablar de su simetría. La Figura 10 muestra un aparente aumento en la kurtosis de la curva de beneficio esperado a medida que crece el mercado.

Las figuras 11a y 11b muestran los gráficos del beneficio esperado óptimo normalizado y total para $n \in \{1, ..., 50\}$ y $\lambda = 1$, respectivamente.



(a) Beneficio esperado óptimo normalizado

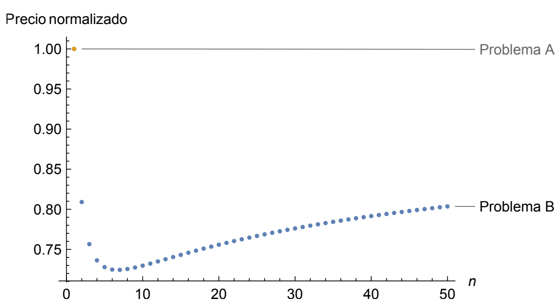


(b) Beneficio esperado óptimo total

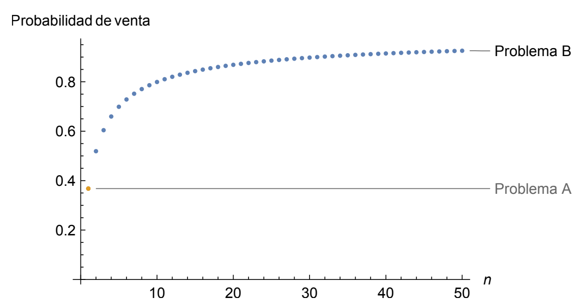
Figura 11: Beneficio esperado óptimo, normalizado y total, para distintos valores de n y $\lambda = 1$

Estos gráficos muestran que, al igual que con la distribución uniforme, el beneficio esperado óptimo es creciente en n. Cambios en λ no afectan esta propiedad, ya que son sólo cambios en la escala de la distribución y por tanto cambios en la escala de la función de beneficio esperado. Además, por el Teorema 3.3 se sabe que esta sucesión converge a $\mu = 1$, la media de la distribución exponencial con $\lambda = 1$. Por lo tanto, por el Corolario 3.3.2, el problema $\widetilde{B}$ es superior al $\widetilde{A}$ para esta distribución IHR – independiente de λ – cuando el mercado es grande.

La Figura 12a muestran el gráfico del precio óptimo normalizado para $\lambda = 1$. La Figura 12b muestra la probabilidad de venta asociada al precio óptimo para cada n.



(a) Precio óptimo normalizado

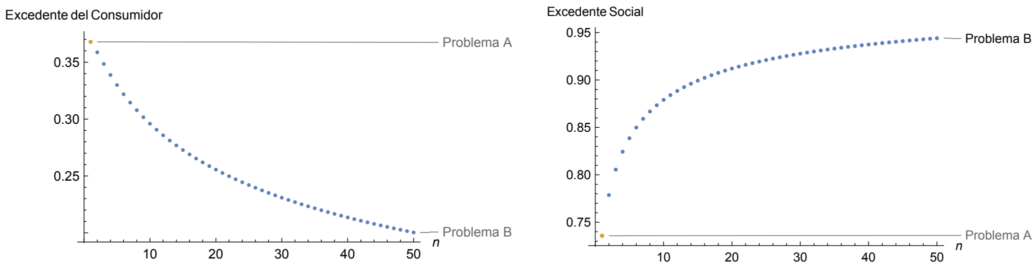


(b) Probabilidad de venta

Figura 12: Precio óptimo y probabilidad de venta – bajo precio óptimo – para distintos valores de n y $\lambda = 1$

El gráfico de la Figura 12a muestra que el precio óptimo normalizado es decreciente en n hasta un n^* – entre 5 y 6 –. Desde n^* en adelante la sucesión de precios óptimos muestra ser monótona creciente; el efecto *todo o nada* eventualmente es dominado por el efecto *mejor conocimiento*. Al igual que con el beneficio esperado óptimo, λ no afecta esta propiedad; cambios en λ reescalan la trayectoria del precio. Un hecho interesante es que la trayectoria del precio óptimo normalizado tiene la misma forma que la de la distribución uniforme y la intuición y análisis de por qué ocurre esto es el mismo que el presentado en § 4.2.2. Ambas sucesiones tienen un punto de inflexión y colas crecientes. Además, de acuerdo a los resultados numéricos, el n^* de ambas sucesiones pareciera ser similar. Por el Teorema 3.2, la sucesión de precios óptimos converge a $\mu = 1$.

La Figura 12b muestra una probabilidad de venta creciente en n para el problema B al igual que la asociada a la distribución uniforme, por consiguiente una mayor eficiencia asignativa conforme aumenta el tamaño del mercado El análisis es equivalente al de la sección § 4.2.2. Puede observarse que la convergencia de la probabilidad de venta a 1 es más lenta que la asociada a la distribución uniforme.



(a) Excedente del Consumidor (b) Excedente Social

Figura 13: Excedentes esperados normalizados

Finalmente, la Figura 13 presenta los gráficos de los excedentes normalizados. Cuando hay un distribuidor, el excedente del consumidor normalizado siempre se encuentra por debajo del excedente obtenido mediante discriminación directa individual. La fuerte baja inicial en el precio óptimo normalizado no es suficiente para que el excedente normalizado aumente, es decir la trayectoria es monótona decreciente desde el mercado más pequeño. Luego, los consumidores siempre obtienen un mayor bienestar bajo discriminación directa por el monopolista para esta distribución.

Nuevamente, el excedente social es creciente en el tamaño del mercado para el problema B. Por el Teorema 3.4 se sabe el excedente social normalizado converge a la media de la variable aleatoria, i.e. 1. Mientras que la discriminación directa presenta una pérdida social normalizada constante, invariante al tamaño del mercado.

4.4. Resultados generales: monotonía

En § 3.2 se demostró que agregar es una estrategia dominante cuando los mercados son grandes. En § 4 se presentaron dos ejemplos en los que las soluciones núмericas para mercados con pocos consumidores muestran que agregar nuevamente es dominante. Entonces, una pregunta natural es qué ocurre en mercados con un número arbitrario de consumidores. Esto es lo que aborda esta sección. Se presentan resultados para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y familias de distribuciones de probabilidad para las que agregar es una estrategia dominante.

El primer resultado muestra que el beneficio total asociado al problema B es siempre creciente en el tamaño del mercado.

Proposición 4.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y V una variable aleatoria IHR con distribución F. Defínase $\pi_n^* := \underset{p_n \in supp(f^n)}{max} p_n \left[1 - F^{n*}(p_n)\right]$. Entonces,*

$$\pi_n^* \leq \pi_{n+1}^*$$

Demostración. Ver Apéndice B. □

Nótese que la única hipótesis necesaria para este resultado es que la variable aleatoria tenga IHR. Por lo tanto es bastante general.

Antes de presentar un hecho sobre la monotonía del precio total, i.e. por paquete de derechos, es necesario introducir un orden estocástico. Los órdenes estocásticos son útiles para comparar variables aleatorias. Existen distintos criterios de comparación tales como magnitud, dispersión, de forma, entre otros. Para mayores referencias sobre órdenes estocásticos ver [23].

Definición 4.1. (Orden de *hazard*) Sean X e Y dos variables aleatorias y sean sus respectivas funciones de riesgo r y q. Se dice que Y domina a X en el orden de *hazard* si $q(t) \leq r(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta relación se denota por $X \leq_{hr} Y$.

Como fue explicado en § 3.1, la función de riesgo es la semi-elasticidad de la función de demanda. Entonces, si $X \leq_{hr} Y$, la demanda asociada a X es más semi-elástica precio que la asociada a Y. Esto quiere decir que ante un cambio marginal en el precio, la disminución porcentual en la probabilidad de venta del bien es mayor para la demanda asociada a X que a Y. Con esto en consideración es natural el resultado a continuación.

Proposición 4.2. *Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con IHR tal que $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$ y densidad f. Supóngase que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n+1} V_i$ domina en el orden de* hazard *a $\sum_{i=1}^{n} V_i$. Entonces, si los máximos son interiores, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$p_n^* \leq p_{n+1}^*$$

Demostración. Ver Apéndice B. □

Por consiguiente, si una demanda – en este contexto – es más precio semi-elástica que otra, el precio óptimo cobrado por el monopolista será menor para la demanda más semi-elástica. Esto es intuitivo ya que como el monopolista siempre elige un precio óptimo donde la elasticidad de la demanda es 1 – su costo marginal es 0 – debe subir aún más el precio para *sensibilizar* la demanda menos semi-elástica – tiene mayor margen para explotar la sensibilidad menor a 1 –. Por otro lado, como el precio es por un paquete de derechos, hace sentido que el precio óptimo sea más alto cuando se vende un paquete con un derecho adicional.

Existe otra manera de ordenar las demandas de acuerdo a su semi-elasticidad. Este orden considera como criterio de comparación la razón entre las *semi-elasticidades promedio* de dos demandas.

Definición 4.2. (Orden estrella) Sean X e Y dos variables aleatorias y sean F y G sus respectivas distribuciones. Se dice que Y domina a X en el orden estrella, denotado por $X \leq_* Y$, si $\frac{G^{-1}(F(x))}{x}$ es creciente en $x \in \mathbb{R}_+$.

El orden estrella también es conocido en Teoría de Confiabilidad como orden de mayor función de riesgo creciente en promedio – *more increasing failure rate in average order* –. En [9, capítulo 10, p. 212], los autores muestran la relación entre el orden estrella y las funciones de riesgo promedio. Luego, la interpretación económica de este orden en términos de funciones de riesgo promedio es la siguiente: si Y domina a X en este orden, entonces la semi-elásticidad promedio de la demanda asociada a X es cada vez mayor a la semi-elasticidad promedio de la demanda asociada a Y, ajustadas por cuantil.

Proposición 4.3. *Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con IHR y donde $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n+1} V_i \leq_* \sum_{i=1}^{n} V_i$, y los máximos son interiores, entonces*

$$[1 - F^{n*}(p_n^*)] \leq \left[1 - F^{(n+1)*}(p_{n+1}^*)\right]$$

Demostración. Ver Apéndice B. □

Este resultado es muy importante ya que para las familias de distribuciones que cumplan lo anterior es posible garantizar que un distribuidor conduce a una mayor eficiencia asignativa para cualquier tamaño de mercado. Si bien en § 3.2 se mostró que en mercados grandes la existencia de un distribuidor siempre produce mayor eficiencia asignativa, este resultado asegura mayor eficiencia para cualquier tamaño.

Una aplicación del resultado anterior es la siguiente: sean $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias donde $V_i \overset{i.i.d.}{\sim}$ Exponencial(λ). De acuerdo a un resultado citado en [14],

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n+1} V_i \leq_* \sum_{i=1}^{n} V_i$. Luego por la Proposición 4.3 la probabilidad de venta es creciente para el Problema B cuando la variable aleatoria distribuye exponencial – independiente de λ –. Es decir, establecer un distribuidor es siempre más eficiente que proveer directamente a los consumidores cuando las valoraciones distribuyen exponencial.[21]

Hasta ahora en esta sección sólo se han presentado resultados sobre monotonía para las variables totales, i.e. beneficio total, precio total. Como podrá notarse estos resultados no dicen mucho por sí sólos sobre la relación entre los problemas A y B. Esto se debe a que estas afirmaciones solamente caracterizan al problema B. Así, es necesario introducir un nuevo objeto que mostrará ser útil para compararlos.

Definición 4.3. (Función de riesgo normalizada) Sea V una variable aleatoria con IHR y distribución de probabilidad F. Dado $n \in \mathbb{N}$, su función de riesgo normalizada es $\tilde{h}_n : \{p \in \mathbb{R}_+ : \tilde{F}_n(p) < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\tilde{h}(p) := \frac{\tilde{f}_n(p)}{1-\tilde{F}_n(p)}$, $\forall p \in dom_{\tilde{h}_n}$

La función de riesgo normalizada mide la disminución porcentual en la probabilidad de compra del individuo promedio al aumentar marginalmente el precio normalizado – precio promedio –.

Teorema 4.1. *Sea V una variable aleatoria con IHR y distribución de probabilidad F. Dado $n \in \mathbb{N}$ si $\sum_{i=1}^{n+1} V_i \leq_* \sum_{i=1}^{n} V_i$ y $\tilde{h}_{n+1} \leq \tilde{h}_n$ y los máximos son interiores, entonces*

$$p^*(n)\left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right] \leq p^*(n+1)\left[1 - \tilde{F}_{n+1}(p^*(n+1))\right]$$

Demostración. Ver Apéndice B. □

La conclusión de este teorema afirma que el beneficio esperado óptimo normalizado es creciente en el número de consumidores que enfrenta el monopolista. De los resultados numéricos en § 4.2.2 y § 4.3.2 puede notarse que la segunda hipótesis de este teorema puede no cumplirse para todo n natural – de hecho para ambas distribuciones la monotonía creciente en el precio normalizado comienza desde $n = 7$ –. Esto motiva el siguiente corolario que concluye esta sección.

Corolario 4.1.1. *Sea V una variable aleatoria con IHR y distribución de probabilidad F. Supóngase que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si para todo $n \geq n_0$ las hipótesis del Teorema 4.1 se cumplen. Entonces,*

$$n_0 \left\{ \underset{p \in supp(f)}{max} \; p\left[1 - F(p)\right] \right\} \leq \underset{p_{n_0} \in supp(f^{n_0 *})}{max} \; p_{n_0}\left[1 - F^{n_0 *}(p_{n_0})\right] \implies A \prec B$$

Demostración. Es directa por el Teorema 4.1 y al notar que $\widetilde{A} \prec \widetilde{B}$ es equivalente a $A \prec B$. □

Entonces, si no es posible asegurar monotonía en las funciones de riesgo normalizado para todo $n \in \mathbb{N}$, mediante algún método numérico es posible probar la segunda hipótesis del corolario anterior y así mostrar que proveer los bienes mediante un distribuidor reporta mayor beneficio esperado al monopolista.

5. Síntesis e implicancias

En este trabajo se ha estudiado bajo cuál esquema de venta un monopolista que produce un bien con costo marginal cero obtiene mayor beneficio esperado. Los resultados se han divido en dos partes: mercados grandes y pequeños. Cuando los mercados son grandes, i.e. cuando el monopolista enfrenta muchos consumidores, la estrategia óptima es que establezca un distribuidor

[21] Esto ya que la probabilidad de venta para el problema A es siempre fija – independiente de n – e igual a la del problema B con $n = 1$.

y que éste se encargue de proveer los bienes. Este resultado es válido para cualquier distribución continua no-negativa de creencias, soportada sobre un conjunto convexo y con tasa de riesgo creciente.

Cuando el monopolista enfrenta mercados pequeños, se ha probado que bajo condiciones más restrictivas sobre las variables aleatorias la figura de un distribuidor es óptima. Inclusive, cuando se considera el mercado más pequeño posible, sólo dos consumidores con dos posibles valoraciones por el bien, se muestra que discriminar individualmente es óptimo si la probabilidad de observar la valoración más baja es pequeña. Además, se presentan soluciones numéricas para ambos problemas asociados a valoraciones que distribuyen uniforme estándar y exponencial. Para ambas distribuciones se obtiene que es conveniente delegar la provisión de bienes a un distribuidor.

El esquema de venta elegido tendrá diversas implicancias de interés. La eficiencia de asignación de los bienes, el bienestar de los agentes involucrados en el intercambio y la política de precios son discutidas a continuación.

Eficiencia

Uno de los resultados más interesantes es qué ocurre con la eficiencia asignativa[22] de los bienes bajo las distintas políticas de venta. Como el costo marginal de producción del bien es cero, la eficiencia asignativa es alcanzada si y sólo si la probabilidad de venta es 1. Cuando un distribuidor es quien se encarga de proveer a los consumidores, si este opera en mercados muy grandes, la probabilidad de venta es cercana a uno. Es decir, bajo esta estrategia de venta la eficiencia converge al óptimo social. Esto va en la misma línea del Teorema 3.4 que afirma la convergencia del excedente social normalizado. Mientras que si el monopolista opta por proveer directamente el mercado, la probabilidad de venta es siempre la misma, $1-F(p^*)$, independiente de la cantidad de consumidores. Por tanto, siempre existe pérdida de eficiencia; socialmente no se están explotando todos los beneficios del intercambio.

Por otro lado, si el monopolista opera con un distribuidor en mercados pequeños, se ha mostrado que la probabilidad de venta es estrictamente creciente en la cantidad de consumidores si las valoraciones distribuyen uniforme y exponencial. Más aún, se mostró que la probabilidad de venta es monótona creciente para todo n natural si las valoraciones distribuyen exponencial. Además, para ambas distribuciones se observa una acelerada convergencia al óptimo social, tanto en probabilidad de venta como en el excedente social normalizado. Entonces, la introducción de un distribuidor mejora la eficiencia asignativa en muchas ocasiones. Y esto tiene sentido, ya que la ineficiencia en este mercado es debido a la asimetría informacional y como el distribuidor diluye esta asimetría entonces la eficiencia asignativa debe mejorar.

Si bien la figura de un intermediario está usualmente asociada a la doble marginalización – cuando no hay competencia perfecta en el mercado aguas abajo – y por lo tanto una mayor ineficiencia asignativa, en este trabajo se ha mostrado que cuando hay asimetría informacional la existencia de un distribuidor puede por el contrario mejorar el bienestar agregado. Debido a que el distribuidor conoce perfectamente a los consumidores la discriminación es perfecta, luego no hay pérdida social asociada a este monopolista. Si bien el bienestar de los consumidores es menor cuando hay un intermediario, bajo ciertas condiciones se ha mostrado que es socialmente más eficiente.

En síntesis, la elección de un distribuidor como solución de mercado para el problema del monopolista se acerca más a la de un planificador social que busca maximizar el excedente social.

[22] Nótese que en esta investigación se han discutido dos medidas equivalentes de eficiencia, la probabilidad de venta de los bienes y el excedente social normalizado. Luego es indistinto realizar esta discusión con cualquier de ellas.

Excedentes privados

En mercados grandes, el bienestar de los agentes de este modelo está totalmente caracterizado. Cuando un intermediario se encarga de proveer al mercado, por el Corolario 3.3.2 se sabe que el productor logra la extracción total de la renta informacional. En consecuencia, el excedente de los consumidores es nulo por el Teorema 3.4. Mientras que si hay discriminación individual, cada consumidor obtiene un excedente positivo igual a $\int_{p^*}^{\infty} [1 - F(p)]\, dp$. Luego, los consumidores alcanzan un mayor bienestar cuando son discriminados directamente por el monopolista, mientras que este obtiene un menor excedente privado.

Cuando los mercados son pequeños, monopolista y distribuidor obtienen excedentes estrictamente positivos independiente de la estrategia de venta. Las secciones § 4.2.2 y § 4.3.2 muestran resultados númericos de los excedentes normalizados para las distribuciones uniforme estándar y exponencial. El intercambio mediante un distribuidor reporta al monopolista un excedente privado creciente en el número de personas que participa en el mercado, mientras que para los consumidores es decreciente.

Precios

Cuando el monopolista enfrenta mercados grandes y opera con un distribuidor, se ha demostrado que el precio óptimo normalizado converge a la media de la variable aleatoria que representa las valoraciones. La intuición de este resultado proviene del hecho que al agregar más agentes la asimetría informacional se va diluyendo – la varianza del promedio de las variables aleatorias i.i.d. tiende a cero – lo que se traduce en un mejor conocimiento de los consumidores. Así, el monopolista termina por conocer exactamente la valoración del agente promedio. En cambio, si el monopolista provee al mercado directamente, el precio óptimo normalizado es invariante al tamaño del mercado y siempre es menor o igual a la media.

Cuando los mercados son pequeños y se provee mediante un distribuidor, la particular trayectoria del precio puede ser explicada por dos efectos: *todo o nada* y *mejor conocimiento*. El efecto *todo o nada* presiona hacia abajo el precio del monopolista y tiene relación con el costo esperado de no realizar la venta – tiene una única oportunidad para venderle los derechos al distribuidor –. Por otro lado el efecto *mejor conocimiento* presiona al alza el precio y esto se debe a que la agregación de individuos idénticos *a priori* reduce la varianza de la valoración promedio de los consumidores. Para las distribuciones de probabilidad estudiadas, se observa que el efecto negativo *todo o nada* domina al efecto positivo *mejor conocimiento* en mercados muy pequeños, lo que hace que el monopolista disminuya su precio. A medida que se incorporan más consumidores al mercado y mejoran las estimaciones del monopolista sobre las valoraciones, este efecto es revertido y el monopolista sube el precio normalizado.

Si bien la introducción motiva el problema con mercados tecnológicos[23], este puede aplicarse a distintos mercados. Existen muchas situaciones en las que un monopolista puede decidir distribuir sus bienes a través de un intermediario. Las razones que motivan esto son variadas, desde altos costos de administración y monitoreo a desconocimiento del mercado. Por ejemplo, considérese un productor de máquinas que abastece un mercado en un país extranjero. Sin considerar los costos de administración asociados a la provisión directa es natural pensar que los consumidores de estas máquinas tienen un mejor conocimiento del mercado local que el productor de máquinas. Luego, la elección de un representante podría ser más rentable que proveer directamente.

Por otro lado, se considera que este modelo tiene potencial práctico. Por ejemplo, un monopolista podría estimar una distribución empírica de las valoraciones por su bien de datos

[23]Un ejemplo donde un intermediario es crucial en la transferencia de tecnología es el *Security and Software Engineering Research Center* de la Fundación Nacional de Ciencias de Estados Unidos. Este intermediario contacta centros de investigación de universidades con empresas con necesidades tecnológicas.

obtenidos de alguna encuesta. Luego, podría estudiar a qué distribución parámetrica se ajusta y así obtener una caracterización de las demandas. Si la demanda obtenida es IHR, los criterios de dominancia de esta investigación podrían ayudar al monopolista a decidir cómo vender. Además, debido a que ambas estrategias de venta corresponden a precios uniformes, su implementación no debiera ser relativamente costosa.

La literatura sobre franquicias atribuye la existencia de representantes a diversos motivos: costos de monitoreo, financieros, y costos de producción asociados a diferencias en conocimiento de los mercados [17]. La asimetría informacional en este modelo induce al monopolista a buscar un representante y así obtener una mejor estimación de lo que están dispuestos a pagar los consumidores. Este trabajo va en la línea de esta teoría, solo que las diferencias en conocimiento de los mercados tienen implicancias por el lado de la demanda. Más aún, como este modelo no contempla costos de administración de proveer individualmente a los consumidores, si se incluyeran, vender derechos de distribución podría ser aún más atractivo. Por tanto, esta investigación también puede comprenderse como una justificación teórica complementaria de la existencia de representantes en mercados con asimetría informacional.

Como línea futura de investigación se propone profundizar la caracterización de la clase de distribuciones para las que agregar es una estrategia dominante en mercados de tamaño arbitrario. El levantamiento del supuesto sobre creencias i.i.d. y conocimiento imperfecto de los consumidores son también extensiones interesantes. La incorporación de costos de producción es una extensión natural. Si bien muchos resultados parecieran ser robustos a la inclusión de un costo marginal constante, quizás costos convexos podrían modificar algunas conclusiones. Por último, también se considera relevante continuar el estudio de la relación entre distintos órdenes estocásticos que han mostrado ser útiles en este trabajo y en la literatura económica sobre riesgo e incertidumbre.

A. Herramientas matemáticas

En este apéndice se enuncian lemas, proposiciones y todos los objetos matemáticos de carácter instrumental para este trabajo.

Lema A.1. *Sea X una variable aleatoria. Si X tiene IHR, entonces todos sus momentos son finitos.*

Demostración. Ver [4, capítulo 2, p. 32]. □

Lema A.2. *Sea X una variable aleatoria con distribución F. Luego, F es IHR si y sólo si $ln[1-F]$ es cóncava en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}_+ : F(x) < 1\}$.*

Demostración. Ver [4, capítulo 2, p. 25]. □

Lema A.3. *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con distribuciones de probabilidad F_1 y F_2 respectivamente. Si ambas distribuciones son IHR, entonces su convolución también es IHR. En consecuencia, si X es una variable aleatoria con distribución F, IHR, entonces F^{n*} también es IHR, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para la primera parte del Lema, ver [4, capítulo 2, p. 36]. La consecuencia se prueba por inducción sobre el número de veces que la distribución es convolucionada. El caso base, $n = 1$, es directo ya que F es IHR. Supóngase que la afirmación es verdadera para algún $1 < k$ natural, i.e. si F es IHR, luego F^{k*} también lo es. Como $F^{(k+1)*}$ es por definición igual a la convolución de F y F^{k*}, i.e. $F^{(k+1)*} \equiv F \star F^{k*}$, luego por la primera parte del lema $F^{(k+1)*}$ es IHR. □

Definición A.1. (Función log-cóncava) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}$ una función medible. Luego f es log-cóncava en su soporte, denotado $supp(f)$, si

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq [f(x_1)]^{\lambda}[f(x_2)]^{1-\lambda}$$

$\forall x_1, x_2 \in supp(f)$ y $\forall \lambda \in [0,1]$.

Observación. Esto es equivalente a decir que $ln f$ debe ser una función cóncava.

Lema A.4. *Sean f una función de densidad de una variable aleatoria X, con $supp(f) = (a,b)$, y F su correspondiente distribución de probabilidad. Luego, si f es continuamente diferenciable y log-cóncava en (a,b), entonces F y $1-F$ son log-cóncavas en (a,b).*

Demostración. Ver [2, p. 3,4]. □

Observación. La importancia de las funciones log-cóncavas es la siguiente: si una densidad es log-cóncava y continuamente diferenciable entonces $1-F$ es log-cóncava por el Lema A.4 lo que implica que su distribución es IHR por el Lema A.2. Así, existe otra manera de comprobar si una distribución es IHR. Esto es bastante útil ya que muchas veces resulta muy complejo estudiar esta propiedad al calcular directamente la función de riesgo y ver si es o no decreciente, e.g. para la distribución normal.

Proposición A.1. *Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con IHR y donde $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, la variable aleatoria $V(n)$ tiene IHR.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por la Definición 3.3 se sabe que la distribución de $V(n)$ es $\tilde{F}_n$. Luego por el Lema A.2 basta probar que la función $1-\tilde{F}_n$ sea log-cóncava. Recuérdese que $\forall p \in supp(f)$, $\tilde{F}_n(p) = F^{n*}(np)$, entonces $\tilde{F}_n$ es al menos dos veces diferenciable. Además, como $\tilde{f}_n(p) = f^{n*}(np)$ y F^{n*} tiene IHR por el Lema A.3, luego

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 ln\left[1-\tilde{F}_n(p)\right]}{dp^2} &= \frac{-\tilde{f}_n'(p)\left[1-\tilde{F}_n(p)\right] - \tilde{f}_n^2(p)}{\left[1-\tilde{F}_n(p)\right]^2} \\
&= \frac{-n^2\tilde{f}_n'(p)\left[1-\tilde{F}_n(p)\right] - n^2\tilde{f}_n^2(p)}{\left[1-\tilde{F}_n(p)\right]^2} \\
&= n^2\left[\frac{-f^{n*\prime}(np)\left[1-F^{n*}(np)\right] - f^{n*\,2}(np)}{\left[1-F^{n*}(np)\right]^2}\right] \leq 0
\end{aligned}$$

ya que el término entre corchetes es la segunda derivada de $ln\left[1-F^{n*}\right]$ y por el Lema A.2 esta es no-positiva. □

Proposición A.2. *Sea $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con IHR y donde $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$. Entonces, $\{V(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi seguramente a $\mathbb{E}[V_i]$. En particular, $\{V(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a una variable aleatoria degenerada V con distribución Heaviside centrada en $\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[V_i]$, definida por*

$$H_{\mathbb{E}[V_i]}(p) := \begin{cases} 0 & si\ p < \mathbb{E}[V_i] \\ 1 & si\ p \geq \mathbb{E}[V_i] \end{cases}, \forall p \text{ que pertenece al soporte de } F.$$

Demostración. Por el Lema A.1 e independencia, se tiene que $\mathbb{E}[V_i] < +\infty$ y $Var[V_i] < +\infty$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[V(n)] = \mathbb{E}[V_i]$ y $Var[V(n)] = \frac{Var[V_i]}{n}$. Entonces, por la Ley Fuerte de Grandes Números, $\{V(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi seguramente a $\mathbb{E}[V_i]$, que puede comprenderse como una variable aleatoria degenerada V con $\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[V_i]$ y $Var[V] = 0$. Luego esto implica que $\{V(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a V. Es decir, $lim_{n\to\infty}\tilde{F}_n(p) = H_{\mathbb{E}[V_i]}(p)$ para todos los puntos p de continuidad de $H_{\mathbb{E}[V_i]}$. □

Lema A.5. *Sea* $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias con IHR y donde* $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F$, $\mathbb{E}[V_i] = \mu$. *Además, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *sea* $p^*(n) = argmax\{\, p(n)[1 - \tilde{F}_n(p(n))]\,\}$ *interior. Entonces,*

$$lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x) = 0$$

para casi todo $x < \mu$ *en medida de Lebesgue.*

Demostración. Por la Proposición A.2 se tiene que $\tilde{F}_n$ converge en distribución a H_μ. Entonces por el Teorema 3.2.3 de [6] – conocido como Teorema de Portmanteau –, se tiene que para cualquier función g continua y acotada,

$$lim_{n\to\infty}\int g(x)\, d\tilde{F}_n(x) = \int g(x)\, dH_\mu$$

Así, como las densidades asociadas a las $\tilde{F}_n$ existen y H_μ es una Heaviside centrada en μ lo anterior implica

$$lim_{n\to\infty}\int g(x)\tilde{f}_n(x)\, dx = g(\mu)$$

Ahora, sea g una función continua y acotada cualquiera con soporte $[0,\mu)$. Por lo anterior se tiene que $\lim_{n\to\infty}\int g(x)\tilde{f}_n(x)\, dx = 0$. Como la elección de g fue arbitraria es directo

$$lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x) = 0$$

para casi todo x en $[0,\mu)$ en medida de Lebesgue. □

Definición A.2. (Función de *hazard* de una variable aleatoria discreta) Sea V una variable aleatoria discreta y sea F su distribución de probabilidad con soporte I_V. Luego, la función de *hazard* de V es $h: I_V \to [0,1]$, definida por $h(k) := \frac{F(V=k)}{\sum_{k\le j} F(V=j)}$, para todo $k \in I_V$.

Proposición A.3. *Sean* $X_1 \sim Ber(p)$, $X_2 \sim Bin(2,p)$ *con* $p \in (0,1)$. *Luego las variables* $V_1 := (a-b)X_1 + b$ *y* $V_2 := (a-b)X_2 + 2b$ *tienen IHR.*

Demostración. Las distribuciones de las variables aleatorias V_1, V_2 están dadas por $F_{V_1}(v) := F_{X_1}\left(\frac{b-v}{b-a}\right)$ para $v \in \{a,b\}$ y $F_{V_2}(v) := F_{X_2}\left(\frac{2b-v}{b-a}\right)$ para todo $v \in \{2a, a+b, 2b\}$. Así, por las Definiciones A.3 y 3.2 es directo que V_1 tiene IHR ya que $h_{V_1}(a) \le h_{V_1}(b)$, donde $h_{V_1}(a) = F_{V_1}(a)$ y $h_{V_1}(b) = 1$. Para V_2, nótese que $h_{V_2}(2a) = F_{V_2}(2a)$, $h_{V_2}(a+b) = \frac{F_{V_2}(a+b)}{F_{V_2}(a+b)+F_{V_2}(2b)}$ y $h_{V_2}(2b) = 1$. Entonces, V_2 tiene IHR si

$$\begin{aligned}
&h_{V_2}(2a) \le h_{V_2}(a+b)\\
&\qquad\qquad \iff F_{V_2}(2a) \le \frac{F_{V_2}(a+b)}{F_{V_2}(a+b) + F_{V_2}(2b)}\\
&\qquad\qquad \iff p^2 \le \frac{2p(1-p)}{2p(1-p) + (1-p)^2}\\
&\qquad\qquad \iff p \le \frac{2}{2p + (1-p)}\\
&\qquad\qquad \iff p(p+1) \le 2
\end{aligned}$$

□

Proposición A.4. *Considérese las hipótesis de la Proposición A.3 y supóngase* $a > 0$. *Luego, la Figura 1 resume los esquemas de venta y precio óptimo en función de la probabilidad* p.

Demostración. Sea $p \in (0,1)$. Se define el beneficio esperado del monopolista asociado a los problemas A y B por $\pi_A := max\{2a, 2b(1-p)\}$ y $\pi_B := max\{2a, (a+b)(1-p^2), 2b(1-p)^2\}$ respectivamente.

Supóngase que $\frac{b-a}{b} < p$. Esto es equivalente a $2b(1-p) < 2a$. Por lo tanto, $\pi_A = 2a$ y $\pi_B = max\{2a, (a+b)(1-p^2)\}$ ya que $2b(1-p)^2 < 2b(1-p)$. Como $(a+b)(1-p^2) \leq 2a$ si y sólo si $\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \leq p$ y dado que

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{b} < \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} &\iff \frac{(b-a)^2}{b^2} < \frac{b-a}{b+a} \\
&\iff (b-a) < \frac{b^2}{b+a} \\
&\iff b^2 - a^2 < b^2 \\
&\iff 0 < a^2
\end{aligned}$$

luego $\pi_A < \pi_B$ si $p < \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$, i.e. $A \prec B$, y es óptimo cobrar $a+b$. Mientras que si $\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \leq p$, entonces $\pi_A = \pi_B$, i.e. $A \simeq B$.

Por otro lado, supóngase que $p \leq \frac{b-a}{b}$. Esto implica que $\pi_A = 2b(1-p)$. Como $2a \leq 2b(1-p)$ y $2b(1-p)^2 < 2b(1-p)$, la comparación relevante de beneficios esperados en este segmento se reduce a $2b(1-p)$ y $(a+b)(1-p^2)$. Luego,

$$\begin{aligned}
2b(1-p) < (a+b)(1-p^2) &\iff 2b < (a+b)(1+p) \\
&\iff \frac{b-a}{b+a} < p
\end{aligned}$$

Como $\frac{b-a}{b+a} < \frac{b-a}{b}$ entonces si $\frac{b-a}{b+a} < p$, $\pi_A < \pi_B$ y es óptimo cobrar $a+b$. Mientras que si $p < \frac{b-a}{b+a}$, luego $\pi_B < \pi_A$ y es óptimo separar y cobrar b (cuando $p = \frac{b-a}{b+a}$ el monopolista está indiferente entre separar y cobrar b o cobrar $a+b$). □

Definición A.3. (Orden usual) Sean X e Y dos variables aleatorias. Luego, se dice que Y domina a X en el orden usual – o en primer orden – si $\forall x \in (-\infty, \infty), P(X > x) \leq P(Y > x)$. Esta relación será denotada por $X \leq_{st} Y$.

Definición A.4. (Orden de Convolución) Sean X e Y dos variables aleatorias tal que $Y = X + U$, en distribución, donde U es una variable aleatoria no negativa e independiente de X. Luego, se dice que Y domina a X en el orden de convolución y se denota $X \leq_{conv} Y$.

Proposición A.5. *Sean X e Y variables aleatorias. Si $X \leq_{conv} Y$, entonces $X \leq_{st} Y$.*

Demostración. Ver [23, capítulo 1, p. 70]. □

Proposición A.6. *Sean X e Y dos variables aleatorias con IHR y F_1 y F_2 sus respectivas distribuciones de probabilidad. Supóngase $F_1(0) = F_2(0) = 0$ y sea $p_i^* \in argmax\{\, p_i\,(1-F_i(p_i))\}$, con $i \in \{1, 2\}$. Luego, si $X \leq_* Y$, entonces*

$$[1 - F_2(p_2^*)] \leq [1 - F_1(p_1^*)]$$

Demostración. Ver demostración Teorema 3 de [14], con $c = 0$, $r = 1$, y $g_i(x) := x\, h_i(x)$, donde h_i es la función de riesgo asociada a F_i. La función g_i es monótona creciente debido a que h_i lo es y las variables aleatorias son no-negativas. □

B. Demostraciones resultados principales

En este apéndice se encuentran las pruebas de todos los resultados fundamentales de este trabajo. Las demostraciones aparecen en el orden en que las afirmaciones fueron enunciadas en el texto.

Demostración Teorema 3.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Debido a que F es IHR, luego por el Lema A.3 F^{n*} también es IHR. Esto quiere decir que el inverso de su función de riesgo, $\frac{1-F^{n*}}{f^{n*}}$, es monótona decreciente. Además es claro que $\frac{1-F^{n*}}{f^{n*}}$ es una función positiva que decae a 0.

Por otro lado, considérese la función identidad, i, sobre el dominio $[a,b]$. La resta de $\frac{1-F^{n*}}{f^{n*}}$ con la función identidad forma una nueva función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $g(p) := \frac{1-F^{n*}(p)}{f^{n*}(p)} - p$, con $p \in [a,b]$.

Supóngase primero que $\frac{1}{f^{n*}(a)} > a$. Entonces $g(a) > 0$. Si b es un número real, $g(b) < 0$. Luego, como g es continua y monótona estrictamente decreciente, por el Teorema del Valor Intermedio existe un único y^*, $a < y^* < b$, tal que $g(y^*) = 0$. Mientras que si b es $+\infty$, como $\frac{1-F^{n*}}{f^{n*}}$ decae a cero y $-i$ es estrictamente decreciente, g también lo es. Por lo tanto, debe atravesar sólo una vez el eje de las abscisas para luego seguir decreciendo. Entonces también existe un único y^*, $a < y^* < b$, tal que $g(y^*) = 0$. Es decir, y^* es finito. Por lo tanto, como $\left.\frac{d\{\,p\,(1-F^{n*}(p))\}}{dp}\right|_{p=a} > 0$ y la función objetivo es diferenciable en todo punto, todo máximo debe ser interior, i.e. el maximizador anula la primera derivada de la función objetivo. Como sólo y^* cumple esto, el máximo es único.

Ahora considérese el caso en que $\frac{1}{f^{n*}(a)} \leq a$. Luego, como $\forall p \in [a,b]$, $\left.\frac{d\{\,p\,(1-F^{n*}(p))\}}{dp}\right|_{p} \leq 0$, entonces el máximo se encuentra en a y es único y global.

Por lo anterior, es evidente que la función objetivo del problema B es *single-peaked.* $\square$

Demostración Teorema 3.2. Sea $0 < \delta < \frac{\mu}{5}$ arbitrario. Primero se demostrará que $p^*(n) < \mu+\delta$ a partir de algún n_0 en adelante. Por la Proposición A.2, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{4} < \tilde{F}_n(\mu+\delta)$ y $\tilde{F}_n(\mu-\delta) < \frac{1}{4}$ si $n \geq n_0$. Además, por el Teorema del Valor Medio, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in (\mu-\delta, \mu+\delta)$, tal que

$$\frac{\tilde{F}_n(\mu+\delta) - \tilde{F}_n(\mu-\delta)}{2\delta} = \tilde{f}_n(x_n)$$

Luego, si $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\left\{\,p(n)\,\left[1-\tilde{F}_n(p(n))\right]\right\}}{dp(n)}\right|_{p(n)=x_n} &= \left[1-\tilde{F}_n(x_n)\right] - \tilde{f}_n(x_n)x_n \\
&\leq 1 - \tilde{f}_n(x_n)x_n \\
&< 1 - \frac{1}{4\delta}(\mu-\delta) \\
&< 0
\end{aligned}$$

En consecuencia, $p^*(n) < x_n < \mu+\delta$. Así, sólo queda demostrar que $\mu-\delta$ es una cota inferior a partir de un algún natural mayor o igual a n_0. También se procede en forma directa.

El Lema A.5 afirma que para casi todo $x < \mu$ en medida de Lebesgue, $\text{lím}_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = 0$, i.e. el conjunto $\{y < \mu \,:\, \text{lím}_{n\to\infty} \tilde{f}_n(y) > 0\}$ tiene medida de Lebesgue cero. Luego, existe $0 < \tilde{\delta} \leq \delta$, tal que $\text{lím}_{n\to\infty} \tilde{f}_n(\mu-\tilde{\delta}) = 0$. Sea $0 < \epsilon < 1$. Entonces para $R := \frac{(1-\epsilon)}{(\mu-\tilde{\delta})} > 0$, existe un n_1 natural tal que si $n \geq n_1$, entonces $\tilde{f}_n(\mu-\tilde{\delta}) < R$. Además, por la Proposición

A.2, existe un n_2 natural tal que si $n \geq n_2$, entonces $1 - \epsilon < 1 - \tilde{F}_n(\mu - \tilde{\delta})$. Por último, sea $N := max\{n_0, n_1, n_2\}$. Así, si $n \geq N$, entonces

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\left\{p(n)\left[1 - \tilde{F}_n(p(n))\right]\right\}}{dp(n)}\right|_{p(n)=\mu-\tilde{\delta}} &= \left[1 - \tilde{F}_n(\mu - \tilde{\delta})\right] - \tilde{f}_n(\mu - \tilde{\delta})(\mu - \tilde{\delta}) \\
&> (1 - \epsilon) - R(\mu - \tilde{\delta}) \\
&= (1 - \epsilon) - \frac{(1 - \epsilon)}{(\mu - \tilde{\delta})}(\mu - \tilde{\delta}) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto por el Teorema 3.1, $\mu - \tilde{\delta} < p^*(n)$ si $n \geq N$. Como $\mu - \delta \leq \mu - \tilde{\delta}$, luego

$$\mu - \delta < p^*(n) < \mu + \delta$$

□

Demostración Teorema 3.3. Sean $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que $\gamma := \delta(1 - \epsilon) + \epsilon\mu > 0$ – nótese que si $0 < \epsilon < 1$, luego $\delta < \mu$ si y sólo si $\gamma < \mu$ –. Por la Proposición A.2, $\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ entonces $\tilde{F}_n(\mu - \delta) < \epsilon$. Luego, por la desigualdad de Markov y la optimalidad de $p^*(n)$ para cada n natural, se tiene que

$$(\mu - \delta)\left[1 - \tilde{F}_n(\mu - \delta)\right] \leq p^*(n)\left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right] \leq \mu$$

Así, $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
&\implies (\mu - \delta)(1 - \epsilon) < p^*(n)\left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right] \leq \mu \\
&\implies \mu - \gamma < p^*(n)\left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right] < \mu + \gamma
\end{aligned}$$

□

Demostración Corolario 3.3.2. Supóngase que el precio óptimo de venta del problema $\widetilde{A}$ es p^*, luego el beneficio normalizado asociado a este problema es $p^*\left[1 - F(p^*)\right]$. Mientras que por el Teorema 3.3 el beneficio normalizado asociado a $\widetilde{B}$ es μ. Luego, por la desigualdad de Markov es directo que $p^*\left[1 - F(p^*)\right] \leq \mu$, i.e. $\widetilde{A} \preceq \widetilde{B}$.

Si el soporte de la distribución es de la forma $[0, b]$, donde $b \in \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$, se demostrará que $p^*\left[1 - F(p^*)\right] < \mu$. Por una propiedad de las variables aleatorias no-negativas – ver [4] para mayores referencias – la media de la variable aleatoria admite la siguiente representación

$$\mu = \int_0^b \left[1 - F(s)\right] ds$$

Como $p^* < b$ – no podría ser igual a b, si este fuera finito, debido a que habría una inconsistencia en la condición de primer orden –, se tiene

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_0^b \left[1 - F(s)\right] ds \\
&= \int_0^{p^*} \left[1 - F(s)\right] ds + \int_{p^*}^b \left[1 - F(s)\right] ds \\
&= \int_0^{p^*} \left\{\left[1 - F(s)\right] - \left[1 - F(p^*)\right]\right\} ds + p^*\left[1 - F(p^*)\right] + \int_{p^*}^b \left[1 - F(s)\right] ds
\end{aligned}$$

El tercer término es no-negativo mientras que el primero es estrictamente positivo. Esto se prueba a continuación.

Por demostrar $\int_0^{p^*} \{[1-F(s)]-[1-F(p^*)]\}\, ds > 0$. Supóngase por el contrario que no, i.e. $\int_0^{p^*} [1-F(s)]-[1-F(p^*)]\, ds = 0$. Esto implica que $F(s)=F(p^*)$ para casi todo $s \in [0,p^*]$ en medida de Lebesgue. Supóngase existe un $\tilde{s} \in [0,p^*]$, tal que $F(\tilde{s}) \neq F(p^*)$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $F(\tilde{s}) < F(p^*)$. Sea $\epsilon := \frac{F(p^*)-F(\tilde{s})}{2}$. Luego, como F es continua $\exists \delta > 0$ tal que si $y \in B_\delta(\tilde{s})$, entonces $F(y) \in B_\epsilon(F(\tilde{s}))$. Pero esto es absurdo ya que existe un $\tilde{y} \in B_\delta(\tilde{s})$ tal que $F(\tilde{y}) = F(p^*)$. Por lo tanto, $\int_0^{p^*} \{[1-F(s)]-[1-F(p^*)]\}\, ds > 0$.

En consecuencia, $p^*\,[1-F(p^*)] < \mu$, i.e. $\widetilde{A} \prec \widetilde{B}$. $\square$

Demostración Teorema 3.4. Por la Definición 3.4 se sabe que el Excedente del Consumidor Normalizado para cada n natural es:

$$\mathrm{EC}(n) := \frac{\int_{p_n^*}^{\infty} [1-F^{n*}(p_n)]\, dp_n}{n}$$

Es claro que la función anterior es decreciente en p_n^* para cada n fijo. Por la Definición 3.5 se tiene que $\mathrm{ES}(n) = \mathrm{EP}(n)+\mathrm{EC}(n)$. Recuérdese que el Excedente Social Normalizado óptimo para cualquier n es $\mathrm{ES}^* := \mu$. Por lo tanto, $\mathrm{EP}(n) \leq \mathrm{ES}(n) \leq \mathrm{ES}^*$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{ES}(n)$ existe y es igual a μ por el Teorema 3.3. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \{\mathrm{EC}(n)\} &= \lim_{n\to\infty} \{\mathrm{ES}(n) - \mathrm{EP}(n)\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \{\mathrm{ES}(n)\} - \lim_{n\to\infty} \{\mathrm{EP}(n)\} \\
&= \mu - \mu \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Demostración Proposición 4.1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $p_i^* \in argmax\{\, p_i\,(1-F^{i*}(p_i))\}$ para $i = n, n+1$. Por la Proposición A.5 se tiene que $\sum_{i=1}^{n+1} V_i$ domina en el orden usual a $\sum_{i=1}^{n} V_i$. Entonces,

$$\begin{aligned}
& 1-F^{n*}(p_n^*) \leq 1-F^{(n+1)*}(p_n^*) \\
\iff & [1-F^{n*}(p_n^*)]\, p_n^* \leq \left[1-F^{(n+1)*}(p_n^*)\right] p_n^* \\
\iff & \pi_n^* \leq \left[1-F^{(n+1)*}(p_n^*)\right] p_n^* \\
\implies & \pi_n^* \leq \pi_{n+1}^*
\end{aligned}$$

$\square$

Demostración Proposición 4.2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Luego, si h_n denota la función de *hazard* asociada a $\sum_{i=1}^{n} V_i$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{d\{\, p\, \left[1-F^{(n+1)*}(p)\right]\}}{dp} &= \left[1-F^{(n+1)*}(p)\right] - p\, f^{(n+1)*}(p) \\
&= \left[1-F^{(n+1)*}(p)\right] [1 - p\, h_{n+1}(p)]
\end{aligned}$$

Como $h_{n+1} \leq h_n$ y $\sum_{i=1}^{n+1} V_i$ domina en el orden usual a $\sum_{i=1}^{n} V_i$, entonces

$$\left.\frac{d\{\, p\ \left[1 - F^{(n+1)*}(p)\right]\}}{dp}\right|_{p=p_n^*} = \left[1 - F^{(n+1)*}(p_n^*)\right]\left[1 - p_n^*\, h_{n+1}(p_n^*)\right]$$
$$\geq \left[1 - F^{(n)*}(p_n^*)\right]\left[1 - p_n^*\, h_n(p_n^*)\right] = 0$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.1 p_{n+1}^* debe ser mayor o igual a p_n^*. □

Demostración Teorema 4.3. Es directa al notar que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n V_i$ es una variable aleatoria IHR por el Lema A.3 y $F^{n*}(0) = 0$ debido a que el soporte es no-negativo y luego utilizar la Proposición A.6. □

Demostración Teorema 4.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{i=1}^{n+1} V_i \leq_* \sum_{i=1}^n V_i$ y los máximos son interiores, entonces

$$\left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right] \leq \left[1 - \tilde{F}_{n+1}(p^*(n+1))\right]$$

ya que $\tilde{F}_n(p(n)) = F^{n*}(p_n)$. Además, como $\tilde{F}_n$ es IHR por la Proposición A.1, $\tilde{h}_{n+1} \leq \tilde{h}_n$ por hipótesis, y $\sum_{i=1}^{n+1} V_i$ domina en el orden usual a $\sum_{i=1}^n V_i$ por la Proposición A.5, entonces

$$\left.\frac{d\{\, p(n)\ \left[1 - \tilde{F}_{n+1}(p(n))\right]\}}{dp(n)}\right|_{p(n)=p^*(n)} = \left[1 - \tilde{F}_{n+1}(p^*(n))\right]\left[1 - p^*(n)\, \tilde{h}_{n+1}(p^*(n))\right]$$
$$\geq \left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right]\left[1 - p^*(n)\, \tilde{h}_n(p^*(n))\right] = 0$$

Por lo tanto por el Teorema 3.1 $p^*(n) \leq p^*(n+1)$. Entonces,

$$p^*(n)\left[1 - \tilde{F}_n(p^*(n))\right] \leq p^*(n+1)\left[1 - \tilde{F}_{n+1}(p^*(n+1))\right]$$

□

C. El vendedor de periódicos: equivalencia problemas A y B

En esta sección se muestra la equivalencia entre el par de problemas A y B y las dos alternativas de venta del productor.

Supóngase que cada retailer j – con $j \in \{1, ..., n\}$ – enfrenta una demanda estocástica, Y_j. Esta variable aleatoria tiene una distribución G_j y función de densidad g_j con soporte $[\underline{\beta_j}, \overline{\beta_j}]$, con $0 \leq \underline{\beta_j} < \overline{\beta_j} \leq \infty$. Los retailers deben proveerse de stock de acuerdo a sus creencias sobre Y_j, ya que se supone que las compras al productor son al comienzo del período mientras que la realización de la demanda ocurre justo antes del término. Si el stock es mayor a la cantidad demandada, estos bienes se pierden. Además, el retailer j toma como dado el precio c_j al que compra los bienes al productor y tanto los costos como las distribuciones son información conocida por todos los agentes. Por último, el precio de retail $r > c_j$ está fijo y es común a los n mercados – r es independiente del precio cobrado por el productor y de la cantidad ofrecida por cada retailer –.

El productor se enfrenta a dos opciones excluyentes: proveer a cada uno de los n retailers mediante un contrato *tómalo o déjalo*, o firmar un contrato de exclusividad con sólo uno de ellos. Luego, la pregunta es: ¿cuál y bajo qué condiciones reporta mayor beneficio al productor?

Proveer a cada retailer

Primero, se presentará el problema del retailer y luego el del productor. A menos que se explicite lo contrario, las demandas serán consideradas idénticamente distribuidas e independientes. Entonces, de ahora en adelante será omitido el subíndice j.

El beneficio esperado – en función del nivel de stock – del retailer se pueden describir por la función $\pi_R : [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \to \mathbb{R}$, definida por

$$\pi_R(y) := -cy + G(y)\mathbb{E}[Y|Y \leq y]\, r + [1 - G(y)]\, yr$$

que es equivalente a

$$\pi_R(y) = -cy + r\int_0^y zg(z)\, dz + [1 - G(y)]\, yr$$

donde $y \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}]$.

Luego, el problema del retailer consiste en maximizar su función de beneficio y su variable de control es el stock del bien solicitado al productor. Nótese que

- $\frac{d\pi_R(y)}{dy} = -c + [1 - G(y)]\, r$
- $\frac{d^2\pi_R(y)}{dy^2} = -g(y)r$

Este problema de maximización es cóncavo, es decir, la función objetivo alcanza su máximo y este es global, interior y único – el dominio es un conjunto convexo –, ya que se cumple lo siguiente:

- $\pi_R(0) = 0$
- $\frac{d\pi_R(0)}{dy} > 0$, ya que se ha supuesto que $r > c$
- $\frac{d^2\pi_R(y)}{dy^2} < 0$, para todo y en el soporte de g

Por lo tanto, de la condición de primer orden se puede obtener una función de demanda inversa, que es la que enfrenta el productor, que describe la disposición a pagar en el margen del retailer, c, para cada nivel de stock, y. Esta relación está dada por $c(y) = [1 - G(y)]\, r$. Con esta relación óptima se puede describir el problema del productor que anticipa la decisión por stock del retailer.

El beneficio del productor no es esperado sino determínistico – el que asume la incertidumbre es el retailer –. La función de beneficio por cada retailer provisto está descrita por $\pi_P : [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \to \mathbb{R}$, y definida por $\pi_P(y) := y\,[1 - G(y)]\, r$, donde $y \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}]$. Luego, como los n retailers enfrentan demandas representadas por la misma distribución de probabilidad, el problema del productor es

$$n\left\{\underset{y \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}]}{max}\, y\,[1 - G(y)]\, r\right\} \tag{3}$$

Entonces, es clara la equivalencia con el problema A. Las funciones objetivo de ambos problemas son idénticas, salvo la multiplicación de una constante positiva, r. Además, ambas maximizaciones son sobre un intervalo real no-negativo.

Contrato de exclusividad

Supóngase ahora que el productor tiene la posibilidad de firmar un contrato de exclusividad con alguno de los n retailers. Al firmar el contrato con el retailer j, el productor deja de proveer a los restantes $n-1$ agentes. Así, el retailer con exclusividad puede ahora proveer n demandas[24]. Se presentará primero el problema del retailer y luego el del productor.

Sea j^* el retailer que firma el contrato de exclusividad con el productor. La variable aleatoria de interés para j^* será la suma de las n demandas independientes e idénticamente distribuidas. Se denotará esta suma por $\tilde{Y}_n := \sum_{j=1}^{n} Y_j$ que distribuye G^{n*}.

Así, el beneficio esperado del retailer j^* se puede describir por la función $\pi_{j^*} : [n\underline{\beta}, n\overline{\beta}] \to \mathbb{R}$, definida por

$$\pi_{j^*}(y_n) := -cy_n + G^{n*}(y_n)\mathbb{E}[\tilde{Y}_n|\tilde{Y}_n \leq y_n]\, r + [1 - G^{n*}(y_n)]\, y_n r$$

que es equivalente a

$$\pi_{j^*}(y_n) = -cy_n + r \int_0^{y_n} z g^{n*}(z)\, dz + [1 - G^{n*}(y_n)]\, y_n r$$

donde $y_n \in [n\underline{\beta}, n\overline{\beta}]$.

Entonces, el problema del retailer consiste en maximizar esta función. Debido a que lo único que ha cambiado con respecto al problema del retailer cuando no hay exclusividad es la variable aleatoria, $\tilde{Y}_n$ y por lo tanto, la distribución, el problema conserva las mismas propiedades, i.e. es cóncavo. La condición de primer orden también entrega una relación entre c y el nivel de stock, y_n, dada por $c(y_n) = [1 - G^{n*}(y_n)]\, r$.

El beneficio del productor ahora está descrito por la función $\pi_{PE} : [n\underline{\beta}, n\overline{\beta}] \to \mathbb{R}$, definida por $\pi_{PE}(y_n) := y_n [1 - G^{n*}(y_n)]\, r$, donde $y_n \in [n\underline{\beta}, n\overline{\beta}]$. Luego, el problema del productor bajo el contrato de exclusividad es

$$\max_{y_n \in [n\underline{\beta}, n\overline{\beta}]} \; y_n [1 - G^{n*}(y_n)]\, r \tag{4}$$

Nuevamente es evidente la equivalencia entre este problema y el problema B; las funciones objetivo son idénticas salvo una constante y el dominio de maximización para ambos casos es un intervalo real no negativo.

D. Versión fuerte del Teorema 3.2

En esta sección se prueba que, bajo ciertas ciertas condiciones, el precio óptimo normalizado es menor o igual a la media cuando el monopolista opera en mercados grandes a través de un intermediario – i.e. converge a la media por abajo –. Primero se presenta un lema y luego la proposición que afirma lo anterior.[25]

Lema D.1. *Sea $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias absolutamente continuas tal que $X_j \overset{i.i.d.}{\sim} F \in C^1$ con función característica y primera derivada de la densidad en $L^1(\mathbb{R})$. Además, supóngase $\mathbb{E}[X_j] = \mu < +\infty$ y $Var[X_j] = \sigma^2 < +\infty$. Entonces,*

$$lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(\mu) = +\infty$$

donde $\tilde{f}_n$ representa la densidad de $\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$.

[24] Se supone que el retailer j no incurre en costos para establecerse en cada uno de estos mercados independientes

[25] La idea y formulación de la demostración de D.1 fue provista por el profesor Gregorio Moreno de la Facultad de Matemáticas UC.

Demostración. Supóngase que $\mu = 0$. Para cada n natural se define la variable aleatoria $\tilde{X}_n := \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$. Entonces, $\mathbb{E}[\tilde{X}_n] = 0$ y $Var[\tilde{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$. Denótese por f la densidad de X_j. Como las variables aleatorias son i.i.d., se define la función característica de X_j por ϕ, i.e.,

$$\phi(t) := \mathbb{E}[e^{itX_j}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

Además, como $\mathbb{E}[X_j^2] < \infty$, por el Teorema 3.3.8 de [6], se tiene que

$$\begin{aligned}\phi(t) &= 1 + it\mathbb{E}[X_j] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X_j^2] + O(t^2) \\ &= 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2 + O(t^2) \end{aligned} \tag{5}$$

para un t pequeño, e.g. $|t| < r$. Sin pérdida de generalidad supóngase $r < \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$.

Sea ϕ_n la función característica de la variable $\tilde{X}_n$, i.e.

$$\phi_n(t) := \mathbb{E}[e^{it\tilde{X}_n}]$$

Debido a que las variables X_j son independientes e idénticamente distribuidas, ϕ_n se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\phi_n(t) : &= \mathbb{E}[e^{it\tilde{X}_n}] \\ &= \mathbb{E}\prod_{j=1}^{n} \exp\left\{i\frac{t}{n}X_j\right\} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\exp\left\{i\frac{t}{n}X_j\right\} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \phi\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n \end{aligned} \tag{6}$$

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_n(t)|\, dt < +\infty$ por hipótesis, la fórmula de inversión –Teorema 3.3.5 de [6]– afirma que

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\phi_n(t)\, dt \tag{7}$$

Por lo tanto, al evaluar (7) en $\mu = 0$ y utilizar (6), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it0}\phi\left(\frac{t}{n}\right)^n dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n dt \end{aligned} \tag{8}$$

Ahora bien, sea $k := ||f'||_{L^1}$. Por hipótesis se sabe que $k < +\infty$. Supóngase que $r < k$. Entonces, se define la siguiente partición de la integral en (8):

$$
\begin{aligned}
I_n^1 &:= \frac{1}{2\pi}\int_{[-rn,rn]} \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n dt \\
I_n^2 &:= \frac{1}{2\pi}\int_{[-kn,-rn]} \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n dt + \int_{[rn,kn]} \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n dt \\
I_n^3 &:= \frac{1}{2\pi}\int_{[-kn,kn]^c} \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n dt
\end{aligned}
$$

Afirmación.

a. $lim_{n\to\infty} I_n^1 = +\infty$

b. $lim_{n\to\infty} |I_n^2| = 0$

c. $\forall n \geq 2,\ |I_n^3| \leq \frac{2k}{\pi}$

Demostración. (a). Por (5) y un cambio de variable, $v = \frac{t}{\sqrt{n}}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
I_n^1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-rn,rn]} \left(1 - \frac{t^2}{2n^2}\sigma^2 + O\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right)^n dt \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{[-r\sqrt{n},r\sqrt{n}]} \left(1 - \frac{v^2}{2n}\sigma^2 + O\left(\frac{v^2}{n}\right)\right)^n dv \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Luego, por el Teorema 3.4.2 de [6], $\left(1 - \frac{v^2}{2n}\sigma^2 + O\left(\frac{v^2}{n}\right)\right)^n \to e^{\frac{-v^2}{2}\sigma^2}$ si $n \to +\infty$, entonces la integral en (9) converge a una constante,

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-v^2}{2}\sigma^2}\, dv = \frac{e^{\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}
$$

Por lo tanto, $I_n^1 = O(\sqrt{n})$.

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 - \frac{t^2}{2n^2}\sigma^2 > 0$, debido a que $|t| < \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$, entonces $I_n^1 \geq 0$. En consecuencia, $\exists R > 0$, tal que $I_n^1 \geq R\sqrt{n}$. Esto implica

$$
lim_{n\to\infty} I_n^1 = +\infty
$$

(b). Como X_j es absolutamente continua, por el Lema de Riemann-Lebesgue se sabe que $\phi(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Luego es directo que $\forall \epsilon > 0$, $\sup\limits_{|t|>\epsilon} |\phi(t)| < 1$. Tómese $\epsilon := r$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\forall t \in [-k,-r] \cup [r,k]$,

$$
|\phi(t)| < 1 - \delta \qquad (10)
$$

Así, al aplicar un cambio de variable y utilizar (10) se obtiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
|I_n^2| &= \left|\frac{n}{2\pi}\left(\int_{[-k,-r]} \phi(u)^n\, du + \int_{[r,k]} \phi(u)^n\, du\right)\right| \\
&\leq \frac{n}{2\pi}\left(\int_{[-k,-r]} |\phi(u)|^n\, du + \int_{[r,k]} |\phi(u)|^n\, du\right) \\
&< \frac{n}{\pi}(k-r)(1-\delta)^n
\end{aligned}
$$

Entonces, $lim_{n\to\infty} |I_n^2| = 0$

(c). Nótese que para cualquier $u \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
|u\phi(u)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{iux} f(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i}\frac{d(e^{iux})}{dx} f(x)\,dx\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{i}e^{iux} f'(x)\right|\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f'(x)\right|\,dx
\end{aligned}$$

i.e. $|\phi(u)| \leq \frac{k}{u}$. Así, luego de aplicar un cambio de variable,

$$\begin{aligned}
|I_n^3| &= \left|\frac{n}{2\pi}\int_{[-r,r]^c} \phi(u)^n\,du\right| \\
&\leq \frac{n}{2\pi}\int_{[-k,k]^c} |\phi(u)|^n\,du \\
&\leq \frac{n}{2\pi}\int_{[-k,k]^c} \left(\frac{k}{|u|}\right)^n\,du \\
&= \frac{nk^n}{\pi}\int_{k}^{+\infty} \frac{1}{u^n}\,du \\
&= \frac{nk^n}{\pi}\frac{k^{-(n-1)}}{(n-1)} \\
&\leq \frac{2k}{\pi}
\end{aligned}$$

con $n \geq 2$. □

Por lo anterior y como $\tilde{f}_n(0) = I_n^1 + I_n^2 + I_n^3$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$lim_{n\to\infty}\,\tilde{f}_n(0) = +\infty$$

Si $k \leq r$ el dominio de integración en (8) sólo se divide en $[-kn, kn]$ y $[-kn, kn]^c$ y se aplican los resultados (a) y (c) de la afirmación anterior.

Probar el lema cuando $\mu \neq 0$ es directo al notar que la densidad de la variable $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ evaluada en μ es equivalente a evaluar la densidad de $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)$ en 0, luego basta tomar la transformación $\hat{X}_j = X_j - \mu$. □

Nótese que el Lema D.1 requiere dos hipótesis que no han sido supuestas en este trabajo, que la función característica y la densidad pertenezcan a $L^1(\mathbb{R})$. Ninguna de ellas es muy exigente para las variables aleatorias absolutamente continuas más conocidas – exponencial, normal, gamma, entre otras –, salvo la distribución uniforme estándar. Esta distribución no cuenta con función característica en $L^1(\mathbb{R})$ – mientras que la primera derivada de su densidad sí –. El hecho de que no cuente con función característica absolutamente integrable limita el uso de la fórmula de inversión para recuperar la densidad.

Proposición D.1. *Sea* $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias con IHR tal que* $V_i \overset{i.i.d.}{\sim} F \in C^1$ *con función característica y primera derivada de la densidad en* $L^1(\mathbb{R})$*. Además, sean* $\mathbb{E}[V_i] = \mu$ *y* $p^*(n) = argmax\,\{\, p(n)[1 - \tilde{F}_n(p(n))]\,\}$ *interior, donde* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces,*

$$\forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \implies \mu - \delta < p^*(n) \leq \mu$$

Demostración. Supóngase por contradicción que para todo n_0 natural existe un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ y $\mu < p^*(n)$. Esto implica que $\left.\frac{d\{\, p(n)\,[1-\tilde{F}_n(p(n))]\}}{dp(n)}\right|_{p(n)=\mu} > 0$. Sea $R := \frac{1}{\mu} > 0$. Luego, por el Lema D.1, existe un $n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_1$, entonces $R < \tilde{f}_n(\mu)$. Así, si $n \geq max\{n_0, n_1\}$,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\left\{\, p(n)\,\left[1 - \tilde{F}_n(p(n))\right]\right\}}{dp(n)}\right|_{p(n)=\mu} &= \left[1 - \tilde{F}_n(\mu)\right] - \tilde{f}_n(\mu)\mu \\
&\leq 1 - \tilde{f}_n(\mu)\mu \\
&< 1 - R\mu \\
&= 1 - \frac{1}{\mu}\mu = 0
\end{aligned}$$

Pero esto es absurdo. En consecuencia, por el Teorema 3.2 existe un $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_1$, luego

$$\mu - \delta < p^*(n) \leq \mu$$

□

Referencias

[1] H. Aydogdu, *Some bounds for the n-fold convolution of concave and log-concave distribution functions*, Communications, Series A1:Mathematics and Statistics, 56 (2007), pp. 17 – 25.

[2] M. Bagnoli and T. Bergstrom, *Log-concave probability and its applications*, Economic Theory, 26 (2005), pp. 445 – 469.

[3] M. Banciu and P. Mirchandani, *Technical note- new results concerning probability distributions with increasing generalized failure rates*, Operations Research, 61 (2013), pp. 925 – 931.

[4] R. E. Barlow and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley and Sons, Inc., 1965.

[5] Y.-K. Che and I. L. Gale, *The optimal mechanism for selling to a budget-constrained buyer*, Journal of Economic Theory, 92 (2000), pp. 198 – 233.

[6] R. Durrett, *Probability: theory and examples*, Cambridge University Press, 2010.

[7] M. Harris and A. Raviv, *A theory of monopoly pricing schemes with demand uncertainty*, The American Economic Review, 71 (1981), pp. 347 – 365.

[8] Y. H. K. Jong S. Kang, Sung L. Kim and Y. S. Jang, *Generalized convolution of uniform distributions*, Journal of Applied Mathematics and Informatics, 28 (2010), pp. 1573 – 1581.

[9] B.-E. Khaledi and S. Kochar, *Stochastic Orders in Reliability and Risk*, vol. 208 of Series Lecture Notes in Statistics, Springer, 2013, ch. 10: A Review on Convolutions of Gamma Random Variables, pp. 199 – 217.

[10] M. Khouja, *The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research*, The International Journal of Management Science, 27 (1999), pp. 537 – 553.

[11] V. Krishna, *Auction Theory*, Academic Press, 2010, ch. 5: Mechanism Design, pp. 61 – 83.

[12] M. A. Lariviere, *Supply chain contracting and coordination with stochastic demand*, in Quantitative Models for Supply Chain Management, S. Tayur, R. Ganeshan, and M. Magazine, eds., vol. 17 of International Series in Operations Research and Management Science, Springer Science + Business Media, New York, 1999, ch. 8, pp. 233 – 268.

[13] ——, *A note on probability distributions with increasing generalized failure rate*, Operations Research, 54 (2006), pp. 602 – 604.

[14] M. A. Lariviere and E. L. Porteus, *Selling to the newsvendor: an analysis of price-only contracts*, Manufacturing and Service Operations Management, 3 (2001), pp. 293 – 305.

[15] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

[16] R. P. McAfee and P. J. Reny, *Correlated information and mechanism design*, Econometrica, 60 (1992), pp. 395 – 421.

[17] A. P. Minkler, *Why firms franchise: a search cost theory*, Journal of Institutional and Theoretical Economics, 148 (1992), pp. 240 – 259.

[18] M. Moller and M. Watanabe, *Advance purchase discounts versus clearance sales*, The Economic Journal, 120 (2010), pp. 1125 – 1148.

[19] V. Nocke and M. Peitz, *Monopoly pricing and demand uncertainty: final sales versus introductory offers*. PIER Working Paper 04-029, University of Pennsylvania, 2004.

[20] ——, *A theory of clearance sales*, The Economic Journal, 117 (2007), pp. 964 – 990.

[21] Y. Qin et al., *The newsvendor problem: Review and directions for future research*, European Journal of Operational Research, 213 (2011), pp. 361 – 374.

[22] J. Riley and R. Zeckhauser, *Optimal selling strategies: when to haggle, when to hold firm*, The Quarterly Journal of Economics, 98 (1983), pp. 267 – 289.

[23] M. Shaked and J. G. Shanthikumar, *Stochastic Orders*, Springer, 2007.

[24] D. F. Spulber, *Monopoly pricing of capacity usage under asymmetric information*, The Journal of Industrial Economics, 41 (1993), pp. 241 – 257.

[25] C. A. Wilson, *On the optimal pricing policy of a monopolist*, Journal of Political Economy, 96 (1988), pp. 164 – 176.