INSTITUTO DE ECONOMÍA

PROYECTO de TÍTULO

2018

Diseño de información en subastas de primer precio con creencias heterogéneas

Lucía Langlois Buchholtz

www.economia.uc.cl

Diseño de información en subastas de primer precio con creencias heterogéneas

Lucía Langlois

Diciembre del 2018

Resumen

Se estudia el diseño de información óptimo en una subasta de primer precio con precio mínimo en que los compradores potenciales tienen creencias heterogéneas. Además de fijar un precio mínimo, el vendedor (quien conoce la distribución pero no la realización de las creencias) puede enviar una señal común a todos. Se busca demostrar que la entrega de información a través de una señal binaria beneficia al vendedor.

1. Introducción

Se analiza el comportamiento de los participantes de un proceso de venta particular: una subasta de primer precio en que el vendedor tiene la posibilidad de comunicar, no solo un precio mínimo, sino también información que afecta la valoración de los compradores potenciales. Los compradores potenciales, observan tanto el precio mínimo como la señal y en base a su propia valoración, deciden qué precio ofrecer. Integrar la entrega de información como variable de decisión de uno de los jugadores en un modelo, se conoce como diseño de información. En este trabajo, se modela la revelación de información en un contexto específico (subasta de primer precio con precio mínimo) en que se intenta persuadir a múltiples receptores de información (los compradores potenciales) con creencias heterogéneas a realizar cierta acción (mejorar su oferta).

Originalmente, el diseño de mecanismo se refería a juegos en que, por un lado, un principal elegía y se comprometía a una estructura de pagos y por otro lado, un agente, elegía una acción, que afectaba tanto su pago como el del principal, en base a información exógena. Sin embargo, el proceso de revelación de información también se ha vuelto endógeno. Existe literatura en que el mecanismo de pago está dado y la decisión del principal se refiere a la revelación de información. Pero también existen modelos en que tanto la estructura de pagos como de información están controladas por un jugador; algunos de ellos se refieren a procesos de ventas. El objetivo de este trabajo es caracterizar la estrategia de revelación de información óptima cuando un vendedor realiza un subasta de primer precio con precio mínimo y se enfrenta a compradores potenciales cuyas creencias son heterogéneas.

Respecto a la literatura pertinente, Kamenica y Gentzkow (2011) estudian la relación entre un emisor y un receptor de información, en un contexto en que la acción del receptor determina no solo su utilidad, sino la del emisor, que a su vez, se puede comprometer a dar señales arbitrariamente informativas. Proveen las condiciones necesarias y suficientes para que un emisor de información se beneficie de compartir información con un solo receptor de información cuya creencia a priori es conocida y coincide con la del emisor. En el ejemplo binario (esto es, dos estados y dos acciones posibles para el receptor), los pagos están estructurados (de forma exógena) tal que que cada acción se traduce en la probabilidad de un estado. Esto se logra gracias a que cada acción paga 1 en un estado y 0 en el resto. Esto permite derivar la creencia que determina el paso de una acción a otra y por lo tanto, la creencia deseada por el emisor.

En base a los resultados anteriores, Ely y Szydlowski (2017) analizan un problema principal-agente bajo información asimétrica, en que un principal, informado sobre la dificultad de la tarea, busca inducir a un agente desinformado a realizar el máximo esfuerzo posible a través de un mecanismo de revelación información. En este caso, los pagos tienen un estructura distinta: el agente recibe una recompensa fija en caso de que supere un umbral de esfuerzo acumulado (en términos de tiempo) que representa la dificultad de la tarea. En el ejemplo binario (esto es, la tarea puede tener una dificultad alta o baja), también es posible encontrar creencias a priori críticas. Muestran que no solo la información en si funciona como un incentivo, sino que comprometerse a entregar información más adelante puede persuadir al agente a que comience a trabajar.

En ambos trabajos, los autores encuentran que, bajo ciertas condiciones, revelar información, puede aumentar el beneficio de quien la entrega, ya que con probabilidad positiva se induce al receptor (agente) a alcanzar la creencia mínima necesaria para que realice la acción preferida por el emisor (principal), siendo que dada su creencia inicial, sin información, no la hubiese elegido.

En la literatura anterior, la única decisión del emisor es cómo entregar información; pero existen trabajos sobre procesos de ventas en que tanto la estructura de pago del receptor (comprador potencial) como la información que recibe son decisiones del emisor (vendedor). Por ejemplo, Bergemann y Pesendorfer (2007) estudian la decisión de un vendedor que puede controlar con qué precisión los compradores potenciales conocen su valoración y el formato de venta (a quién vender a qué precio).

Gershkov (2009) describe un mundo en que las valoraciones de los compradores potenciales dependen de un componente privado (conocido individualmente) y uno común (sobre el cual tiene conocimiento el vendedor). El vendedor decide un formato de subasta, observa el componente de valor común y en base a ello, decide una estrategia de revelación de información (que admite discriminación entre los compradores potenciales) y un precio mínimo. Concluyen que el vendedor maximiza su utilidad esperada si revela toda la información a todos los compradores y realiza una subasta de segundo precio con precio mínimo.

Koessler y Skreta (2016) modelan un proceso de venta en que las valoraciones de los participantes dependen de las características del producto (sobre las cuales el vendedor tiene información privada) y de los gustos propios (que son heterogéneos y desconocidos por el vendedor). Encuentran que el vendedor se beneficia de la información privada y no de comprometerse a revelar información o de una certificación tecnológica. Derivan las condiciones bajo las cuales la privacidad de la información del vendedor no afecta su beneficio.

En este trabajo se analiza un proceso de venta, pero no se trata de un problema de diseño conjunto sino que el mecanismo de venta está definido y el vendedor decide un precio mínimo y la estrategia de revelación información, que incluye la posibilidad de no entregar información. A diferencia de las investigaciones de Kamenica y Gentzkow (2011) y Ely y Szydlowski (2017), existe más de un receptor de información y sus creencias difieren entre sí.

Respecto a la heterogeneidad de las creencias, Morris (1995) refuta los argumentos a favor del supuesto de las creencias a priori homogéneas y presenta temas en que se podrían usar diferencias en las creencias iniciales para explicar los fenómenos económicos, entre ellos, teoría de juegos. Defiende la idea de que las probabilidades puedan ser personalizadas y las compara con las funciones de utilidad. La utilidad de cada individuo no se distingue sólo por los *inputs* (lo que se podría entender como la información recibida en el caso de las probabilidades) sino por la forma en que se construye (o bien, la interpretación de la información).

El hecho de que los individuos no tengan las mismas creencias a priori admite que existan diferencias de opinión. En caso contrario, incluso aunque reciban señales distintas, al observar que su creencia difiere de las creencias actualizadas de los otros individuos con los cuales compartía la creencia a priori, pueden deducir la información que recibieron y así, recogiendo toda la información convergen a una misma creencia. La única forma de que información asimétrica explique diferencias en las creencias, es que no se aprenda de las creencias de los otros (Aumann, 1976). Sin embargo, en la realidad, los individuos tienen diferencias de opinión y se informan a partir de las opiniones de los otros.

En cuanto a la organización del trabajo, en la segunda sección se presentan las ideas generales del modelo, en la tercera sección se desarrolla como referencia el caso en que el vendedor no entrega información adicional, que se contrasta en la cuarta sección con el caso en que si se considera la posibilidad de entregar información. La última sección corresponde a una discusión respecto al análisis, en la que se presentan conclusiones.

2. El Modelo

Un vendedor que enfrenta N compradores potenciales busca vender un activo a través de una subasta de primer precio con precio mínimo (r). Esto es, el vendedor invita a los compradores potenciales a realizar una oferta a sobre cerrado y el participante que presente el mayor precio obtiene el activo a su propia oferta, siempre y cuando su oferta sea igual o mayor al precio mínimo.

Por un lado, los compradores potenciales deciden qué precio ofrecer y por otro lado, el vendedor no sólo elige el precio mínimo sino que también tiene la posibilidad de entregar información que puede afectar la decisión de los participantes.

La utilidad del comprador potencial i con $i \in \{1, ..., N\}$ dada la estructura del proceso de venta es

$$\Pi_i = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si se adjudica el activo} \\ 0 & \text{si no se adjudica el activo} \end{cases}$$

donde v_i corresponde a la valoración del comprador potencial i y b_i al precio ofrecido por el comprador potencial i. Ofrecer $b_i > v_i$ genera una utilidad negativa.

Respecto al valor del activo para los compradores potenciales, éste depende del estado la naturaleza. Existe un estado alto (H), en el cual el activo tiene un valor igual a 1 y un estado bajo (L), en el cual el activo tiene valor nulo ($\forall\, i \in \{1, ..., N\}$). Sea x_i la creencia del jugador i de que ocurra H, entonces el valor esperado del activo para el comprador potencial i es

$$v_i = x_i \cdot 1 + (1 - x_i) \cdot 0 = x_i.$$

Esto implica que, en el caso de los compradores potenciales, el valor esperado del activo es equivalente a su creencia sobre el estado H.

Supuesto 1. *Se supone que las creencias a priori de los compradores potenciales (y así, sus valoraciones) tienen una función de distribución $F(x_i)$ de conocimiento común, que es estrictamente creciente y diferenciable.*

Este supuesto implica que $F(x_i)$ tiene soporte completo y una función densidad $f(x_i)$ que es continua y positiva.

Se define también la variable aleatoria Y_i que representa la máxima valoración entre los $(N-1)$ compradores potenciales $j \neq i$, cuya función de distribución se denotan como $G(x_i)$. Dado que las valoraciones son variables independientes, $G(x_i) = F(x_i)^{N-1}$. Así, como $F(x_i)$ es diferenciable y tiene soporte completo, se sigue que $G(x_i)$ también y por lo tanto, tiene una función de densidad continua y positiva que se denomina $g(x_i)$.

Supuesto 2. *El vendedor tiene un precio de reserva nulo y una creencia a priori sobre el estado H positiva.*

El supuesto anterior implica que $v_0 = 0$ y $x_0 > 0$. En cuanto a la utilidad esperada del vendedor, para un r dado es

$$\Pi_0 = E[\text{máx}\{b_1, ..., b_N\}]$$

La secuencia del juego es la siguiente:

1. La Naturaleza extrae las creencias a priori de los jugadores sobre la ocurrencia de los estados de una distribución de conocimiento común y las comunica a cada jugador de forma privada.
2. El vendedor se compromete a una política de revelación de información y la lleva a cabo.
3. Los compradores potenciales actualizan sus creencias en base a la información que entrega el vendedor y a partir de ella eligen qué precio ofrecer.
4. El participante que haya ofrecido la máxima apuesta obtiene el activo y paga su propia apuesta, en caso de superar el precio mínimo.

Para derivar la estrategia de revelación de información óptima y demostrar que el vendedor prefiere entregar información, se desarrolla un argumento en dos partes: primero, se resuelve el problema en que no hay revelación de información (para el cual se nombran resultados conocidos) y luego, se permite la entrega de información.

3. Sin revelación de información

Para el caso sin información, se usan los resultados de Krishna (2002) para una subasta de primer precio con precio mínimo r.

Proposición 1 (Krishna, 2002, análoga a su Prop. 2.2)**.** *En una subasta de primer precio con precio mínimo $r \in (0, 1)$ existe un equilibrio simétrico en el que la estrategia del comprador potencial i con valoración $x_i \geq r$ esta dada por*

$$b_i = \beta(x_i, r) = E[\text{máx}\{Y_i, r\} \mid Y_i < x_i].$$

Demostración. Se conjetura que los compradores potenciales siguen una estrategia de equilibrio simétrico $\beta(x_i, r)$, que es estrictamente creciente y diferenciable en ambos argumentos con $\beta(r,r) = r$.

Se resuelve desde el punto de vista del jugador 1, que tiene una valoración $x_1 \geq r$. Para que el jugador 1 obtenga el activo, el precio que ofrece debe superar el máximo precio ofrecido por el resto, lo que se expresa como $\beta(Y_1, r) < b$ y que equivale a $Y_1 < \beta^{-1}(b_1, r)$. De esta manera, la probabilidad de obtener el activo se puede escribir como $\Pr\big(Y_1 < \beta^{-1}(b_1,r)\big) = G\big(\beta^{-1}(b_1,r)\big)$. Respecto a la probabilidad de que $b_1 = \beta(Y_1, r)$ y ocurra un empate, es nula.

Así, el problema que resuelve el jugador 1 es el siguiente:

$$\max_{b_1 \geq r} \quad (x_1 - b_1) \cdot G\big(\beta^{-1}(b_1, r)\big).$$

La condición de primer orden que se obtiene es

$$-G(\beta^{-1}(b_1, r)) + (x_1 - b_1) \cdot \frac{g(\beta^{-1}(b_1))}{\beta'(x_1, r)} = 0.$$

Reordenando y multiplicando por $\beta'(x_1, r)$:

$$G(\beta^{-1}(b_1)) \cdot \beta'(x_1, r) = (x_1 - b_1) \cdot g(\beta^{-1}(b_1, r)).$$

Si se considera que $b_1 = \beta(x_1, r)$ o bien, $x_1 = \beta^{-1}(b_1)$, entonces queda

$$G(x_1) \cdot \beta'(x_1, r) = (x_1 - \beta(x_1, r)) \cdot g(x_1),$$

que es equivalente a

$$g(x_1) \cdot \beta(x_1, r) + G(x_1) \cdot \beta'(x_1, r) = x_| \cdot g(x_1).$$

El lado izquierdo representa la derivada de una multiplicación, por lo que se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx_1}\Big(G(x_1) \cdot \beta(x_1, r)\Big) = x_1 \cdot g(x_1).$$

Si se integra con límites r y x_1 para restringir que las valoraciones de los otros sean mayores al precio mínimo pero menores a la del comprador potencial en cuestión se obtiene

$$G(x_1) \cdot \beta(x_1, r) - G(r) \cdot \beta(r, r) = \int_r^{x_1} t \cdot g(t)\, dt.$$

Si se divide por $G(x_1)$:

$$\beta(x_1, r) - \frac{G(r)}{G(x_1)} \cdot \beta(r, r) = \int_r^{x_1} t \cdot \frac{g(t)}{G(x_1)}\, dt.$$

Y se reemplaza $\beta(r, r) = r$:

$$\beta(x_1, r) - \frac{G(r)}{G(x_1)} r = \int_r^{x_1} t \cdot \frac{g(t)}{G(x_1)}\, dt.$$

Al despejar $\beta(x_1, r)$ queda

$$\beta(x_1, r) = r\frac{G(r)}{G(x_1)} + \int_r^{x_1} t \cdot \frac{g(t)}{G(x_1)}\, dt,$$

que equivale a

$$\beta(x_1, r) = E[\text{máx}\{Y_1, r\} \mid Y_1 < x_1].$$

Se comprueba la conjetura de que existe un equilibrio simétrico en que todos los compradores potenciales juegan de acuerdo a $\beta(x_i, r)$ que es estrictamente creciente y diferenciable en ambos argumentos y con $\beta(r, r) = r$. Ambas derivadas están definidas ya que $G(x_1) > 0$ (porque la proposición es para $r > 0$ y $x_i \geq r$). Respecto al signo de la derivada de $\beta(x_1, r)$ con respecto a x_1, aumentar x_1 tiene dos efectos: por un lado, disminuye $G(x_1)$ y así, aumenta el valor de ambas fracciones y por otro lado, aumenta el límite superior de integración y por lo tanto, el valor de la integral. Así, la derivada existe y es positiva, lo que demuestra que es diferenciable y estrictamente creciente en x. En cuanto a la derivada de $\beta(x_1, r)$ con respecto a r, que es ${}^{G(r)}/_{G(x_1)}$, dado que se trata de una razón de dos funciones de distribución estrictamente positivas, es positiva. Por último, al desarrollar $\beta(x_i = r, r)$ se obtiene r. $\square$

Ofrecer $b_i > x_i$ es subóptimo ya que dada la estructura de pagos, con probabilidad positiva el individuo i puede adjudicarse el activo y obtener una utilidad negativa. Sin pérdida de generalidad, se cumple que $b_i \leq x_i$ y así, dado que $x_i \in [0, 1]$ y no tiene sentido ofrecer un precio negativo, se cumple que $b_i \in [0, 1]$. Esto implica que cualquier jugador con una valoración menor al precio mínimo, realiza una oferta menor al precio mínimo; dadas las reglas del juego, quedan fuera. Suponiendo que todos los jugadores con $x_i \geq r$ siguen la estrategia anterior, el pago esperado del comprador potencial i que conoce su valoración x_i es:

$$m(x_i, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i < r \\ G(x_i) \cdot \beta(x_i, r) & \text{si } x_i \geq r \end{cases}$$

con $G(x_i) \cdot \beta(x_i, r) = r \cdot G(r) + \int_r^{x_i} t \cdot g(t)\, dt$.

El pago esperado ex ante del jugador i, esto es, antes de conocer su valoración, es

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^1 m(x_i, r) \cdot f(x_i)\, dx_i \\ &= \int_0^r 0 \cdot f(x_i) + \int_r^1 G(x_i) \cdot \beta(x_i, r) \cdot f(x_i)\, dx_i \\ &= \int_r^1 \left(r \cdot G(r) + \int_r^{x_i} t \cdot g(t)\, dt \right) \cdot f(x_i)\, dx_i \\ &= r \cdot G(r) \cdot \big(1 - F(r)\big) + \int_r^1 \left(\int_r^{x_i} t \cdot g(t)\, dt \right) \cdot f(x_i)\, dx_i. \end{aligned}$$

Al intercambiar el orden de integración del segundo término se obtiene

$$\begin{aligned} M(r) &= r \cdot G(r) \cdot \big(1 - F(r)\big) + \int_r^1 t \cdot g(t) \cdot \left(\int_t^1 f(x_i)\, dx_i \right)\, dt \\ &= r \cdot G(r) \cdot \big(1 - F(r)\big) + \int_r^1 t \cdot g(t) \cdot \big(1 - F(t)\big)\, dt. \end{aligned}$$

Respecto a la utilidad esperada del vendedor, como se trata de un equilibrio simétrico, es N veces el pago esperado ex ante de los compradores potenciales:

$$\Pi_0 = N \cdot \left(r \cdot G(r) \cdot \big(1 - F(r)\big) + \int_r^1 y \cdot g(t) \cdot \big(1 - F(t)\big)\, dt \right).$$

Proposición 2. *Existe un* $r^* \in (0,1)$ *que satisface* $r^* = \frac{1-F(r^*)}{f(r^*)}$ *y maximiza la utilidad del vendedor.*

Demostración. Al maximizar Π_0 con respecto al precio mínimo r se obtiene la siguiente condición de primer orden:

$$N \cdot \Big(G(r) \cdot \big(1 - F(r) - r f(r)\big) + r \cdot g(r) \cdot \big(1 - F(r)\big) - r \cdot g(r) \cdot \big(1 - F(r)\big) \Big) = 0$$

que al anular los términos semejantes con signos contrarios y dividir por N y $G(r)$ se puede expresar como

$$1 - F(r) - r \cdot f(r) = 0.$$

Al despejar r se deriva el precio mínimo óptimo para el vendedor:

$$r^* = \frac{1 - F(r^*)}{f(r^*)}.$$

Se descarta la posibilidad de que el precio mínimo sea nulo, ya que la derivada evaluada en $r = 0$ tiene un signo positivo:

$$\left.\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\right|_{r=0} = 1 > 0.$$

De la misma forma, se descarta que el precio mínimo sea igual a 1, ya que la derivada evaluada en $r = 1$ es negativa:

$$\left.\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\right|_{r=1} = -f(r) < 0.$$

Este resultado es interesante ya que el precio mínimo no depende de la función de distribución ni de densidad de la máxima valoración, sino que de las funciones individuales y así, no depende del número de participantes. □

4. Con revelación de información

Para el caso en que el vendedor entrega información, se usa el resultado de Kamenica y Gentzkow (2011) en el ejemplo en que existen dos estados, un solo receptor que elige entre dos posibles acciones, comparte creencias con el emisor de información y enfrenta una estructura de pagos tal que se puede derivar una creencia crítica a partir de la cual el receptor toma la acción preferida por el emisor. Concluyen que lo óptimo para el vendedor es enviar una señal binaria que maximiza la probabilidad de enviar el mensaje que genera la creencia mínima necesaria para que el receptor tome la elija la acción preferido por el emisor.

Sin embargo, en este modelo, existe más de un receptor de información, los compradores potenciales y tienen creencias heterogéneas y desconocidas por el vendedor, por ello, el vendedor no puede enviar un mensaje discriminando según la creencia a priori.

Supuesto 3. *El vendedor puede entregar información a través de una señal binaria cuyas razones de verosimilitud son objetivas.*

Existen dos posibles mensajes h y l, donde q_i es la probabilidad que atribuye el individuo i a que se envíe la señal h. Se define α como la probabilidad de que se envíe el mensaje h condicional a que ocurre el estado H y γ como la probabilidad de que se envíe el mensaje h condicional a que ocurre el estado L. Así, α y γ corresponden a las razones de verosimilitud, pero también son las variables de decisión del vendedor ya que el vendedor se compromete a mostrarle a los compradores potenciales la información que encuentre; sin embargo, decide cómo buscar información y así, afecta la probabilidad de enviar una señal condicional a que ocurre un estado.

La creencia actualizada del individuo i si observa el mensaje h es

$$x_i^h = \frac{\alpha \cdot x_i}{\alpha \cdot x_i + \gamma \cdot (1 - x_i)}, \tag{1}$$

mientras que, si observa el mensaje l es

$$x_i^l = \frac{(1-\alpha) \cdot x_i}{(1-\alpha) \cdot x_i + (1-\gamma) \cdot (1 - x_i)}. \tag{2}$$

Es importante notar que para $\gamma = 0$, $x_i^h = 1$ para cualquier creencia a priori y que la función es indeterminada en $x_i = 0$. Para $\alpha = 1$, se cumple que $x_i^l = 0$ para cualquier creencia a priori; sin embargo, si es que $\gamma = 1$, entonces la función es indeterminada en $x_i = 1$. En el caso, en que $\alpha = \gamma$, ocurre que $x_i = x_i^l = x_i^h$.

En cuanto a la interpretación de los mensajes, se entiende h como el mensaje optimista y l como el mensaje pesimista, por lo que, naturalmente, la probabilidad de que se envíe mensaje h condicional a que ocurre el estado H es mayor que la que se envíe la señal l. Dicho de otra forma, se cumple que $\alpha \geq \gamma$.

En la figura 1 se presentan las creencias actualizadas para cada mensaje y para las distintas combinaciones de α y γ. Las líneas que no son sólidas se refieren a cuando el jugador observa el mensaje h; mientras que las líneas sólidas representan cuando se observa el mensaje l. Los colores permiten distinguir los resultados para diferentes valores de α y γ. La línea naranja representa el caso extremo en que $\alpha = \gamma$ y por lo tanto, la señal no es informativa. Por ello, la gráfica corresponde a la función identidad, lo que implica que la creencia actualizada es igual a la a priori. Para $x_i = 1$, esta función es indeterminada. Las curvas rojas representan el caso en que tanto α como γ son interiores (estos $\in (0,1)$). El color morado refleja el caso en que $\alpha = 1$ y $\gamma \in (0,1)$, lo que genera que x_i^l para cualquier creencia a priori sea igual a cero (excepto para $x_i = 1$ donde la función es indeterminada). El color rosado presentan el caso en que $\alpha \in (0,1)$ y $\gamma = 0$, lo que produce que x_i^h para cualquier creencia a priori sea igual a 1 (excepto para $x_i = 0$, punto en el que la función es indeterminada). Por último, las rectas de color azul muestran el caso extremo en que $\alpha = 1$ y $\gamma = 0$ y por lo tanto, $x_i^h = 1$ y $x_i^l = 0$ (excepto para $x_i = 0$ y $x_i = 1$, puntos en el que la función es indeterminada).

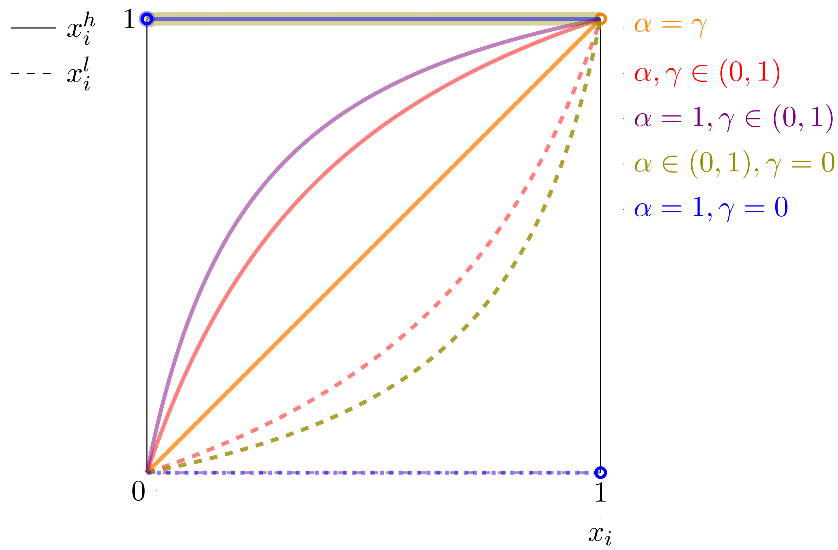

Figura 1: Actualización de las creencias en base al mensaje observado para diferentes combinaciones de α y γ

La distancia entre los valores α y γ permite separar las creencias resultantes de observar cada mensaje, para cada creencia inicial. Esto se refleja en la figura 2 en que cada color representa el resultado de una diferencia entre las probabilidades condicionales distinta.

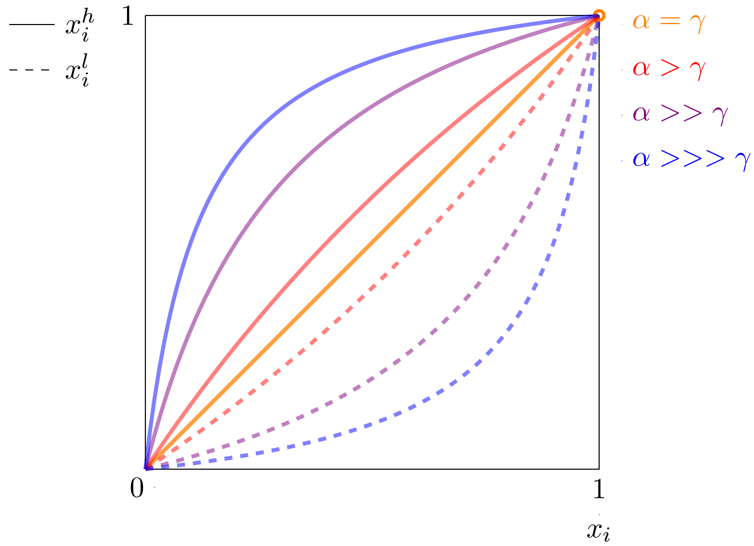

Figura 2: Efecto en las creencias actualizadas de aumentar la diferencia entre α y γ

La entrega de información afecta la distribución de las valoraciones, ya que si se observa el mensaje h las creencias se concentran en valores más altos; mientras que si se observa el mensaje l ocurre lo contrario. Se denominan $F_h(x_i, \alpha, \gamma)$, $f_h(x_i, \alpha, \gamma)$, $G_h(x_i, \alpha, \gamma)$ y $g_h(x_i, \alpha, \gamma)$ a las funciones resultantes de enviar el mensaje h y $F_l(x_i, \alpha, \gamma)$, $f_l(x_i, \alpha, \gamma)$, $G_l(x_i, \alpha, \gamma)$ y $g_l(x_i, \alpha, \gamma)$ a las funciones resultantes de enviar el mensaje l.

Las funciones de distribución nuevas $F_h(x_i, \alpha, \gamma)$ y $F_l(x_i, \alpha, \gamma)$ equivalen a la función de distribución individual original, evaluada en la creencia a priori que genera una creencia x_i. La nueva función de distribución si se observa el mensaje h es

$$F_h(x_i, \alpha, \gamma) = F\left(\frac{\gamma \cdot x_i}{\gamma \cdot x_i + \alpha \cdot (1 - x_i)}\right)$$

y si se observa el mensaje l es

$$F_l(x_i, \alpha, \gamma) = F\left(\frac{(1-\gamma) \cdot x_i}{(1-\gamma) \cdot x_i + (1-\alpha) \cdot (1 - x_i)}\right).$$

Se deriva de las expresiones anteriores es que si $\gamma = 0$, entonces $F_h(x_i, \alpha, \gamma) = 0$ (excepto para $\alpha = 0$ o $x_i = 1$ ya que en esos casos la función es indeterminada) y que si $\alpha = 1$, entonces $F_l(x_i, \alpha, \gamma) = 1$ (excepto para $\gamma = 1$ o $x_i = 0$ ya que en esos casos la función es indeterminada).

Respecto a la probabilidad de observar un mensaje, las creencias actualizadas deben cumplir la restricción bayesiana que establece que la información afecta la distribución de las creencias sin cambiar su valor esperado, esto es,

$$x_i = q_i \cdot x_i^h + (1 - q_i) \cdot x_i^l.$$

Al reordenar se obtiene una expresión para la probabilidad de que se envíe la señal h, a saber:

$$q_i = \frac{x_i - x_i^l}{x_i^h - x_i^l}.$$

Si se reemplaza x_i^h y x_i^l de acuerdo a las ecuaciones (1) y (2) queda

$$q_i = \alpha \cdot x_i + \gamma \cdot (1 - x_i).$$

Ahora la utilidad del vendedor depende de las señales binarias que elige, ya que estas determinan la función de distribución de las valoraciones y así, el precio mínimo requerido. A su vez, definen la probabilidad de que se envíe cada señal. La utilidad del vendedor es

$$\Pi_0 = N \cdot \Big(q_0(\alpha, \gamma | x_0) \cdot M_h\big(\alpha, \gamma, r_h(\alpha, \gamma)\big) + \big(1 - q_0(\alpha, \gamma | x_0)\big) \cdot M_l\big(\alpha, \gamma, r_l(\alpha, \gamma)\big) \Big)$$

con

$$\begin{aligned} M_h\big(\alpha, \gamma, r_h(\alpha, \gamma)\big) &= r_h \cdot G_h(r_h) \cdot \big(1 - F_h(r_h)\big) + \int_{r_h}^{1} t \cdot g_h(t) \cdot \big(1 - F_h(t)\big)\, dt \\ &= r_h \cdot F_h(r_h)^{N-1} \cdot \big(1 - F_h(r_h)\big) + \int_{r_h}^{1} t \cdot (N-1) \cdot F_h(t)^{N-2} \cdot f(t) \cdot \big(1 - F_h(t)\big)\, dt, \end{aligned}$$

$$r_h(\alpha, \gamma) = \frac{1 - F_h(r_h)}{f_h(r_h)},$$

$$\begin{aligned} M_l\big(\alpha, \gamma, r_l(\alpha, \gamma)\big) &= r_l \cdot G_l(r_l) \cdot \big(1 - F_l(r_l)\big) + \int_{r_l}^{1} t \cdot g_l(t) \cdot \big(1 - F_l(t)\big)\, dt \\ &= r_l \cdot F_l(r_l)^{N-1} \cdot \big(1 - F_l(r_l)\big) + \int_{r_l}^{1} t \cdot (N-1) \cdot F_l(t)^{N-2} \cdot f(t) \cdot \big(1 - F_l(t)\big)\, dt \end{aligned}$$

y

$$r_l(\alpha, \gamma) = \frac{1 - F_l(r_l)}{f_l(r_l)}.$$

M_h depende de α y γ a través de F_h y r_h (que a su vez depende de F_h). Lo mismo sucede para M_l con F_l y r_l. Dado que $\gamma = 0$ genera $F_h = 0$, también produce $M_h = 0$; análogamente, dado que $\alpha = 1$ genera $F_l = 1$, también produce $M_l = 0$.

Si $\alpha = \gamma$, entonces la señal no es informativa y los compradores potenciales mantienen sus creencias. Al evaluar α y γ en las funciones de distribución nuevas, se obtiene $F_h = F$ y $F_l = F$ y así, la utilidad del vendedor es equivalente al caso en que no entrega información.

Si $\alpha = 1$ y $\gamma = 0$, entonces la probabilidad de que ocurra el estado H es 1 cuando se observa el mensaje h y nula cuando se observa el mensaje l, independiente de la creencia a priori. Con esos valores, $F_h = F(0) = 0$ y que $F_l = F(1) = 1$ y la utilidad del vendedor es nula.

Proposición 3. *La decisión del vendedor es $\alpha^* = 1$ y $\gamma^* \in (0, 1)$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que ambas variables de decisión son probabilidades y por lo tanto, toman valores entre 0 y 1, se requiere demostrar: $\partial\Pi_0/\partial\alpha > 0$ para todo α y γ (lo que demuestra que $\alpha^* = 1$), $\partial\Pi_0/\partial\gamma < 0$ para $\gamma = 1$ y $\alpha = 1$ (lo que demuestra que el vendedor prefiere entregar información) y $\Pi_0(\alpha = 1, \gamma = 0) = 0$ (que permite descartar esa solución esquina).

Las derivadas parciales de la función de utilidad con respecto a α y γ son

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial\alpha} = N \cdot \left(x_0 \cdot \Big(M_h - M_l\Big) + q_0 \cdot \frac{\partial M_h}{\partial\alpha} + (1 - q_0) \cdot \frac{\partial M_l}{\partial\alpha}\right)$$

y

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial\gamma} = N \cdot \left((1 - x_0) \cdot \Big(M_h - M_l\Big) + q_0 \cdot \frac{\partial M_h}{\partial\gamma} + (1 - q_0) \cdot \frac{\partial M_l}{\partial\gamma}\right).$$

Si se define $M_h^*(\alpha, \gamma) = M_h(\alpha, \gamma, r_h^*(\alpha, \gamma))$ y $M_l^*(\alpha, \gamma) = M_l(\alpha, \gamma, r_l^*(\alpha, \gamma))$ entonces sus derivadas con respecto a α y γ son

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial M_h^*}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial M_h^*}{\partial r_h^*} \cdot \dfrac{\partial r_h^*}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial M_h}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial M_h^*}{\partial\gamma} = \dfrac{\partial M_h^*}{\partial r_h^*} \cdot \dfrac{\partial r_h^*}{\partial\gamma} + \dfrac{\partial M_h}{\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial M_l^*}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial M_l^*}{\partial r_l^*} \cdot \dfrac{\partial r_l^*}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial M_l}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial M_l^*}{\partial\gamma} = \dfrac{\partial M_l^*}{\partial r_l^*} \cdot \dfrac{\partial r_l^*}{\partial\gamma} + \dfrac{\partial M_l}{\partial\gamma} \end{array}$$

y por el Teorema del Envolvente el segundo término de cada expresión se anula y queda

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial M_h^*}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial M_h}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial M_h^*}{\partial\gamma} = \dfrac{\partial M_h}{\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial M_l^*}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial M_l}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial M_l^*}{\partial\gamma} = \dfrac{\partial M_l}{\partial\gamma} \end{array}$$

Como M_h y M_l dependen de α y γ a través de F_h y F_l respectivamente, si se define $y_h = F_h$ e $y_l = F_l$ entonces las derivadas de M_h y M_l con respecto a α y γ se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial M_h}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial M_h}{\partial y_h} \cdot \dfrac{\partial F_h}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial M_h}{\partial\gamma} = \dfrac{\partial M_h}{\partial y_h} \cdot \dfrac{\partial F_h}{\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial M_l}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial M_l}{\partial y_l} \cdot \dfrac{\partial F_l}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial M_l}{\partial\gamma} = \dfrac{\partial M_l}{\partial y_l} \cdot \dfrac{\partial F_l}{\partial\gamma}. \end{array}$$

Lema 1. *Sean Z_1 y Z_2 variables aleatorias con funciones de distribución $H_1(z_1)$ y $H_2(z_2)$ respectivamente. Si $H_1(z_1)$ domina estocásticamente a $H_2(z_2)$, entonces $E[z_1] > E[z_2]$.*

Dado que las funciones de distribución son monótonas, si una función de distribución domina estocásticamente a otra (la distribución se concentra en valores más altos), entonces la esperanza asociada a ella es mayor. En este caso, $F_h(x, \alpha, \gamma)$ y F_l afectan, de forma monótona, la distribución asociada a M_h y M_l respectivamente. Por lo que, el signo de la derivada de M_h con respecto a su función de distribución es igual al signo de su derivada con respecto a F_h. Lo mismo sucede para M_l. Esto permite concluir que el primer término de las derivadas de M_h y M_l con respecto a las variables de decisión son negativas.

Lema 2. *Para cualquier combinación de α y γ, con $0 < \gamma \leq \alpha \leq 1$, las derivadas de las funciones de distribución $F_h(x_i, \alpha, \gamma)$ y $F_l(x_i, \alpha, \gamma)$ con respecto a α y γ tienen los siguientes signos:*

$$0 > \frac{\partial F_h(x_i, \alpha, \gamma)}{\partial \alpha}, \quad 0 < \frac{\partial F_h(x_i, \alpha, \gamma)}{\partial \gamma}, \quad 0 > \frac{\partial F_l(x_i, \alpha, \gamma)}{\partial \alpha}, \quad y \quad 0 < \frac{\partial F_l(x_i, \alpha, \gamma)}{\partial \gamma}.$$

Demostración. A modo de simplificación se definen las siguientes equivalencias:

$$\varphi_h(x_i, \alpha, \gamma) \equiv \left(\frac{\gamma \cdot x_i}{\gamma \cdot x + \alpha \cdot (1 - x_i)} \right) \qquad \varphi_l(x_i, \alpha, \gamma) \equiv \left(\frac{(1-\gamma) \cdot x}{(1-\gamma) \cdot x_i + (1-\alpha) \cdot (1 - x_i)} \right).$$

Dado que $F_h(x_i, \alpha, \gamma)$ y $F_l(x_i, \alpha, \gamma)$ equivalen a la distribución original (que es diferenciable) evaluada en un punto determinado, éstas también son diferenciables si se cumple que $0 < \gamma \cdot x_i + \alpha \cdot (1 - x_i) < 1$ (lo cual se cumple con $0 < \gamma \leq \alpha \leq 1$). Las derivadas parciales de las funciones de distribución con respecto a las variables α y γ son

$$\frac{\partial F_h}{\partial \alpha} = f_h(\varphi_h) \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha} \qquad \frac{\partial F_h}{\partial \gamma} = f_h(\varphi_h) \frac{\partial \varphi_h}{\partial \gamma}$$
$$\frac{\partial F_l}{\partial \alpha} = f_l(\varphi_l) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \alpha} \qquad \frac{\partial F_l}{d\gamma} = f_l(\varphi_l) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \gamma}.$$

Como f_h y f_l son siempre positivas, para determinar el signo de la derivada se obtiene el signo del segundo término

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha} = \frac{-\alpha \cdot x_i \cdot (1 - x_i)}{(x_i \cdot (\gamma - \alpha) + \alpha)^2} < 0 \qquad \frac{\partial \varphi_h}{\partial \gamma} = \frac{\alpha \cdot x_i \cdot (1 - x_i)}{(x_i \cdot (\gamma - \alpha) + \alpha)^2} > 0$$
$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial \alpha} = \frac{(1-\gamma) \cdot x \cdot (1 - x_i)}{(1 - x_i \cdot (\gamma - \alpha) - \alpha)^2} > 0 \qquad \frac{\partial \varphi_l}{\partial \gamma} = \frac{-x_i \cdot (1 + \alpha \cdot x - \alpha - x_i)}{(1 - x_i \cdot (\gamma - \alpha) - \alpha)^2} \leq 0$$

donde en el último caso, la desigualdad es estricta cuando $\alpha < 1$. De esta manera el signo de la derivada de la función de distribución con respecto a α y γ es igual al signo de la derivada parcial de la función φ_h y φ_l (según corresponda) con respecto a las variables. □

De acuerdo al Lema 1 y gracias a que se trata de funciones de distribución monótonas, el primer término de las derivadas anteriores es siempre negativo y por ello, el signo de la expresión completa depende de los signos del segundo término, determinados en el el Lema 2. Así, se obtiene

$$0 < \frac{\partial M_h}{\partial \alpha}, \quad 0 > \frac{\partial M_h}{\partial \gamma}, \quad 0 > \frac{\partial M_l}{\partial \alpha}, \quad \text{y} \quad 0 < \frac{\partial M_l}{\partial \gamma}.$$

Respecto a la diferencia entre M_h y M_l es positiva ya que dado que F_h domina estocásticamente a F_l, M_h es mayor que M_l.

En la expresión

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \alpha} = N \cdot \left(x_0 \cdot \Big(M_h - M_l \Big) + q_0 \cdot \frac{\partial M_h}{\partial \alpha} + (1 - q_0) \cdot \frac{\partial M_l}{\partial \alpha} \right)$$

los dos primeros términos son positivos, mientras que el tercero es negativo ya que x_0 y q_0 son probabilidades y por ende, positivas. Mientras que en la expresión

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \gamma} = N \cdot \left((1 - x_0) \cdot \left(M_h - M_l \right) + q_0 \cdot \frac{\partial M_h}{\partial \gamma} + (1 - q_0) \cdot \frac{\partial M_l}{\partial \gamma} \right)$$

el primer y el tercer término son positivos y el segundo negativo.

Al evaluar $\partial\Pi_0/\partial\alpha$ con $\alpha = 1$, se anula M_l, lo que deja solo términos positivos y así, una derivada positiva que confirman que ese valor de α es óptimo para cualquier valor de $\gamma \in (0, 1)$.

Respecto al valor de γ, al evaluar $\partial\Pi_0/\partial\gamma$ con $\alpha = 1$ y $\gamma = 1$, $M_h = M_l$, $q_0 = 1$ y $(1 - q_0) = 0$, lo que anula el primer y tercer término y así la derivada queda en términos del segundo término que es negativo, lo que comprueba que la alternativa de no entregar información no es preferida por sobre $\alpha = 1$ y $\gamma \in (0, 1)$.

La combinación $\alpha = 1$ y $\gamma = 0$, anula tanto M_h y M_l porque lo primero genera $F_l = 1$ y lo segundo produce $F_h = 0$; lo que se traduce en una utilidad nula para el vendedor. Esto descarta la posibilidad de que el vendedor elija dar información veraz que convence a cualquiera (sin importar su creencia inicial) ya que existen otras combinaciones que le generan beneficios positivos.

De esta manera, se demuestra que conviene un $\alpha = 1$ para cualquier γ y que dado un $\alpha = 1$, no conviene un $\gamma = 0$ ni un $\gamma = 1$. De esta manera, se concluye que lo óptimo es $\alpha = 1$ y $\gamma \in (0, 1)$. □

5. Discusión

En un contexto de una subasta de primer precio con precio mínimo, la posibilidad de comprometerse a revelar información a través de una señal binaria, beneficia al vendedor. Un resultado interesante es que el número de competidores no afecta el precio mínimo ni el valor de α; sin embargo, respecto a γ solo se demostró que se trataba de una solución interior, sin establecer cuál es su valor exacto ni de que depende.

En investigación futura se podría profundizar en el efecto de los supuestos realizados respecto a las propiedades de la función de distribución de las valoraciones, el formato de entrega de información y la objetividad de las razones de verosimilitud sobre los resultados y encontrar el valor de γ.

La posibilidad de entregar información se restringe a una señal binaria lo que permite demostrar, que el vendedor se beneficia de dar información (aunque sea de una forma específica). Un desafío que queda pendiente es encontrar cuál es la estrategia óptima de entrega de información si la forma en que se revela información es endógena. También plantear la posibilidad de que las razones de verosimilitud no sean las mismas para todos, sino que sean propias de cada individuo.

Referencias

Aumann R. (1976). Agreeing to Disagree. *The Anuals of Statistics*, 61: 206-229.

Bergemann D. y Pesendorfer, M. (2007). Information structures in optimal auctions. *Journal of Economic Theory*, 137: 580-609.

Ely J. y Szydlowski M. (2017). Moving the Goalposts.

Gershkov A. (2009). Optimal auctions and information disclosure. *Review of Economic Design*, 13: 335-344.

Kamenica E. y Gentzkow M. (2011). Bayesian Persuasion. *The American Economic Review*, 101: 2590-2615.

Koessler F. y Skreta V. (2016). Informed seller with taste heterogeneity. *Journal of Economic Theory*, 165: 456-471.

Krishna, V. (2002). Auction Theory. San Diego: Academic Press, 16-26.

Stephen Morris (1995). The Common Prior Assumption in Economic Theory. *Economics and Philosophy*, 11: 227-253.